

ÜBER DEN ANNÄHERUNGSGRAD DER APPROXIMATION IM STARKEN SINNE VON STETIGEN FUNKTIONEN

von

G. ALEXITS und D. KRÁLIK¹

Prof. P. Erdős anlässlich seines
50. Geburtstages zugeeignet

I. Einleitung

Es sei $[a, b]$ ein endliches, abgeschlossenes, und (a, b) das entsprechende offene Intervall, ferner $f(x)$ eine in $[a, b]$ definierte stetige Funktion; bezeichne außerdem

$$\omega(\delta; a, b) = \sup_{|x'-x| \leq \delta} |f(x') - f(x)| \quad (x', x \in [a, b])$$

den Stetigkeitsmodul von $f(x)$. Wird $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ nach den Funktionen des zur Gewichtsfunktion $w(x) \geq 0$ gehörenden Orthonormalpolynomsystems bzw. des trigonometrischen Systems $\{1; \cos nx, \sin nx\}$ entwickelt (in diesem Fall ist $[a, b] = [0, 2\pi]$ und $f(x)$ periodisch), so bezeichne $s_n(x)$ die n -te Partialsumme bzw.

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}$$

das n -te arithmetische Mittel dieser Entwicklung.

Es ist bekannt, daß einerseits der Annäherungsgrad der Summen $\sigma_n(x)$ von der Größenordnung

$$\max_{c \leq x \leq d} |f(x) - \sigma_n(x)| = O \left[\omega \left(\frac{1}{n}; a, b \right) \right],$$

wenn $\omega(\delta; a, b) \leq \omega(\delta) = O(\delta^\alpha)$ mit einem positiven $\alpha < 1$ ist und für eine geeignete Zahl $0 < \zeta < 1$ $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow$ mit $\delta \downarrow 0$ gilt, andererseits aus dem Bestehen der Abschätzung

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \sigma_n(x)| = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right]$$

für alle n mit einem $\omega \left(\frac{1}{n} \right) \downarrow 0$, $\omega \left(\frac{1}{n} \right) n^\zeta \uparrow \infty$ die Stetigkeit von $f(x)$ folgt, und zwar gilt für seinen Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; c, d)$ in jedem inneren Teilintervall $[c, d]$ von (a, b)

$$\omega \left(\frac{1}{n}; c, d \right) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

¹ Technische Hochschule, Budapest.

Diese Behauptungen sind klassisch, wenn sie sich auf die Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen beziehen (vgl. A. ZYGMUND [9], I. Kap. III. § 13), während sie für die nach Orthogonalpolynomen fortschreitenden Entwicklungen ganz neulich von G. FREUD [5] bewiesen wurden unter der Annahme, daß die Gewichtsfunktion in $[a, b]$ der Forderung

$$0 < m \leq w(x) \leq M$$

Genüge leistet.

Obwohl die zitierten Sätze die Klasse der Funktionen mit vorgegebenem Stetigkeitsmodul entsprechend charakterisieren, geben sie keinen Aufschluß darüber, ob der angegebene Annäherungsgrad dadurch entsteht, daß sich die »schlecht« annähernden Partialsummen im arithmetischen Mittel ausgleichen, oder die »schlecht« annähernden Partialsummen nur so selten auftreten, daß das arithmetische Mittel dennoch den erwünschten Annäherungsgrad erreicht? Wir wollen zeigen, daß tatsächlich der letztere Fall zutrifft, wodurch wir die oben erwähnten Approximationssätze wesentlich verschärfen können.

Führen wir statt der Differenz $|f(x) - \sigma_n(x)|$ die Differenz im starken Sinne, d. h. die Größe

$$h_n(f, x) = \frac{\sum_{v=0}^n |f(x) - s_v(x)|}{n+1}$$

ein. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. Die Funktion $f(x)$ besitze einen Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; a, b) = O(\delta^\alpha)$ mit einem positiven $\alpha < 1$, welcher der folgenden Bedingung genügt: es ist $\omega(\delta; a, b) \leq \omega(\delta)$, wobei $\omega(\delta)$ mit δ monoton wächst und es existieren Zahlen $0 < \frac{\zeta}{2} < \vartheta < \zeta < 1$ derart, daß $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow + \infty$, $\omega(\delta)/\delta^\vartheta \downarrow 0$ für $\delta \downarrow 0$ gelten. Wird $f(x)$ in $[a, b]$ in eine Reihe nach trigonometrischen Funktionen oder nach den Funktionen des zur Gewichtsfunktion $w(x) \geq 0$ gehörenden Orthogonalpolynomsystems entwickelt, wobei

$$0 < m \leq w(x) \leq M \quad (x \in [a, b])$$

vorausgesetzt wird, so gilt in jedem inneren Teilintervall $[c, d]$ von (a, b)

$$(1) \quad \max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

Ist $f(x)$ nach 2π periodisch und hat der Stetigkeitsmodul von $f(x)$ eine Majorante $\omega(\delta)$ wie im Satz 1, so enthält unser Satz eine Verschärfung eines klassischen Satzes von S. BERNSTEIN. Dann gilt nämlich der

Satz 2. Besitzt die nach 2π periodische Funktion $f(x)$ den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta) \leq \delta^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$, so besteht für die Approximation im starken Sinne durch die Fejérschen Mittel ihrer Fourierreihe durchweg die Beziehung

$$\max_{-\infty < x < +\infty} h_n(f, x) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

In der Tat gilt diese Abschätzung nach Satz 1 in jedem Teilintervall $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 2\pi - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ mit beliebig kleinem $\varepsilon < 0$. Da $f(x)$ nach 2π periodisch ist, kann dieses Teilintervall von der Länge $2\pi - \varepsilon$ mit beliebigem Anfangspunkt gewählt werden. Dann läßt sich $[0, 2\pi]$ mit zwei derartigen Teilintervallen überdecken, die Abschätzung $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ gilt also im ganzen Intervall $[0, 2\pi]$

und daher überall. Es soll nicht unbemerkt bleiben, daß eine derartige Ausdehnung für Orthogonalpolynomialentwicklungen im allgemeinen nicht möglich ist, da schon die klassischen Orthonormalpolynome in den Endpunkten des Orthogonalitätsintervalls unbeschränkt werden, und daher in den Endpunkten die entwickelte Funktion evtl. überhaupt nicht darzustellen vermögen.

Um auf die Tragweite der Approximation im starken Sinne ein Licht zu werfen, denke man an den Lebensgueschen Satz, nach welchem die Partialsommen $s_n(x)$ einer periodischen Funktion $f(x)$, welche einer Lipschitzbedingung α -ter Ordnung genügt, die Funktion mit dem Annäherungsgrad $O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right)$ approximieren, und diese Abschätzung kann im allgemeinen nicht mehr verbessert werden (vgl. ZYGMUND [9], I. S. 315). Auf Grund unseres starken Approximationssatzes können wir jedoch behaupten, daß die den Annäherungsgrad verderbenden Partialsommen, wie aus dem folgenden Satz ersichtlich, nur selten auftreten:

Satz 3. *Wächst die positive, monotone Zahlenreihe $\{\lambda_n\}$ beliebig langsam gegen Unendlich, so approximieren die Partialsommen $s_n(x)$ die Funktion $f \in \text{Lip } \alpha$ in jedem Punkt x mit dem Annäherungsgrad*

$$f(x) - s_n(x) = O\left(\frac{\lambda_n}{n^\alpha}\right) \quad (0 < \alpha < 1),$$

außer höchstens einer Teilfolge $\{s_{n_k}(x)\}$, deren Indizes eine Folge $\{n_k\}$ der Dichte Null² bilden.

Bezeichne in der Tat $\nu(n)$ die Anzahl der Indizes $n_k \leq n$, und wähle wir n derart, daß

$$\frac{\nu(n)}{n} \geq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n}$$

sei. Setzen wir $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ (Lipschitzbedingung), so folgt aus unserem Satz 2 die Existenz einer Konstante A , so daß

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n |f(x) - s_\nu(x)| \leq \frac{A}{n^\alpha}.$$

Nach Annahme ist $|f(x) - s_{n_k}(x)| \geq \frac{\lambda_{n_k}}{n_k^\alpha}$, und es ist keine Beschränkung der

² Bezeichnet $\nu(n)$ die Anzahl der Indizes $n_k \leq n$, so heißt n_k von der Dichte Null, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n} = 0$ ist.

Allgemeinheit, wenn $\lambda_{nk}/n_k^\alpha \downarrow 0$ vorausgesetzt wird, da die Folge $\{\lambda_n\}$ nach Annahme langsam wächst. Dann folgt aber

$$\begin{aligned} \frac{A}{n^\alpha} &\geq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n |f(x) - s_\nu(x)| \geq \frac{1}{n} \sum_{n_k \leq n} |f(x) - s_{n_k}(x)| \geq \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{n_k \leq n} \frac{\lambda_{n_k}}{n_k^\alpha} \geq \frac{\lambda_n}{n^\alpha} \cdot \frac{\nu(n)}{n} \geq \frac{\lambda_n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n}, \end{aligned}$$

also gilt

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n} \leq \frac{2A}{\lambda_n},$$

woraus sich wegen $\lambda_n \rightarrow +\infty$ die Behauptung ergibt.

Es ist erwähnenswert, wie wir unseren Hauptsatz 1 beweisen. Die Behauptung wurde für $\omega\left(\frac{1}{n}; a, b\right) \leq \delta^\alpha$ mit $a < \frac{1}{2}$ schon bewiesen (ALEXITS [1], S. 295—300). Daraus und aus der oben erwähnten Tatsache, daß die Behauptung des Satzes für alle $\alpha < 1$ gilt, wenn man nicht die starke, sondern die gewöhnliche Approximation betrachtet, folgt unsere verschärfte Behauptung auf Grund zweier Hilfssätze über numerische Reihen. Der Gedanke, einen Teil der Approximationstheorie auf einfache reihentheoretische Sätze zu gründen, war schon bisher fruchtbar. Er scheint zuerst bei ALEXITS [2] und [3] aufgetreten zu sein, wo er zur approximationstheoretischen Charakterisierung der Klasse Lip 1 diente. Mit derselben Methode konnte KRÁLIK [6] die Eigenschaften des Weylschen Integrals gebrochener Ordnung, insbesondere die tiefliegenden Hardy-Littlewood-schen Sätze sehr einfach herleiten. Neuerlich wurden diese Ergebnisse von ALEXITS und KRÁLIK [4] wesentlich verschärft. Außerdem konnten auf diesem Weg auch Approximationssätze für allgemeine Orthogonalreihen gewonnen werden. (ALEXITS—KRÁLIK [4] und TANDORI [8]). Dies alles weist darauf hin, daß die Methode, approximationstheoretische Untersuchungen auf einfache reihentheoretische Hilfssätze zu gründen, auch weiter angewendet werden kann, insbesondere dann, wenn die explizite Darstellung der approximierenden Funktionen hoffnungslos zu sein scheint.

2. Reihentheoretische Hilfssätze

Hilfssatz 1. Die Reihe Σu_n sei konvergent zu A und es bestehe

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n |s_\nu - A| = O[\Theta(n)],$$

wo $s_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} u_k$, $\Theta(x) > 0$ eine monoton gegen Null abnehmende Funktion ist, so daß für große x die Beziehungen $\Theta(x)x^\xi \uparrow$ und $\Theta(x)x^\beta \downarrow$ mit $0 < \beta < \xi < 1$ gelten. Ist $\Lambda(x)$ konvex, differentierbar und $\Lambda(x) \downarrow 0$, $\Lambda(x)x^\eta \uparrow$ für ein $\eta > 0$ und $\eta + \xi < 1$, so konvergiert auch die Reihe $\Sigma \Lambda(n) u_n$ und es ist

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \left| \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Lambda(k) u_k \right| = O[\Lambda(n) \Theta(n)].$$

Beweis. Die Konvergenz der Reihe $\sum A(n) u_n$ ergibt sich durch eine einfache Abel-Transformation, die Abweichung ihrer ν -ten Teilsumme von der Reihensumme ist daher $\sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k$. Führen wir die Reihe $(u_0 - A) + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ mit den Bezeichnungen

$$u_0 - A = u_0^*, \quad u_n = u_n^* \quad \text{für } n > 0$$

bzw.
$$s_k^* = \sum_{\nu=0}^k u_{\nu}^*, \quad \sigma_k^* = \frac{s_0^* + s_1^* + \dots + s_k^*}{k + 1}$$

ein, so haben wir

$$|\sigma_k^*| \leq \frac{1}{k + 1} \sum_{\nu=0}^k |s_{\nu}^*| = \frac{1}{k + 1} \sum_{\nu=0}^k |s_{\nu} - A| = O[\Theta(k)].$$

Es ist offenbar

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k^* = \sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k.$$

Nach zweimaliger Abel-Transformation erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{n + 1} \sum_{\nu=0}^n \left| \sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k^* \right| &\leq \frac{1}{n + 1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu+1}^{\infty} (k + 1) |\sigma_k^*| \Delta^2 A(k) + \\ &+ \frac{1}{n + 1} \sum_{\nu=0}^n (\nu + 1) |\sigma_{\nu}^*| \Delta A(\nu + 1) + \frac{1}{n + 1} \sum_{\nu=0}^n A(\nu + 1) |s_{\nu}^*| = \\ &= O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu+1}^{\infty} k \Theta(k) \Delta^2 A(k) + O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \nu \Theta(\nu) \Delta A(\nu + 1) + \\ &+ O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n A(\nu + 1) |s_{\nu}^*| = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

S_1 genügt offensichtlich der Beziehung

$$S_1 = O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Delta^2 A(k) \cdot k^{1-\beta} \cdot k^{\beta} \Theta(k).$$

Da $k^{\beta} \Theta(k)$ nach Annahme monoton abnimmt, kann die rechte Seite folgenderweise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \nu^{\beta} \Theta(\nu) \cdot \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Delta^2 A(k) k^{1-\beta} &= \\ = O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \nu^{\beta} \Theta(\nu) \left\{ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} k^{-\beta} \Delta A(k) + \nu^{-\beta} A(\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Für die Differenz $\Delta A(k)$ gilt die Beziehung:

$$\Delta A(k) = |\Delta A(k)| < k^{-1} A(k),^3$$

so daß das erste Glied in der geschweiften Klammer durch

$$\sum_{k=v+1}^{\infty} k^{-1-\beta} A(k) = O[A(v)] \sum_{k=v+1}^{\infty} k^{-1-\beta} = O[v^{-\beta} A(v)]$$

abgeschätzt werden kann. Infolgedessen erhalten wir wegen der Eigenschaften von $\Theta(x)$ und $A(x)$ das Ergebnis:

$$\begin{aligned} S_1 &= O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n A(v) \Theta(v) = O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n v^\eta A(v) v^\xi \Theta(v) v^{-\eta-\xi} = \\ &= O[n^{-1+\eta+\xi} A(n) \Theta(n)] \sum_{v=1}^n v^{-\eta-\xi} = O[A(n) \Theta(n)]. \end{aligned}$$

Für S_2 gilt die Beziehung

$$S_2 = O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n A(v) v^{-1} v \Theta(v) = O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n A(v) \Theta(v),$$

also erhalten wir wie im Fall von S_1 die Abschätzung

$$S_2 = O[A(n) \Theta(n)].$$

Zu einer ähnlichen Abschätzung gelangen wir für S_3 durch eine Abel-Transformation:

$$\begin{aligned} S_3 &= O(n^{-1}) \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} \Delta A(v+1) \cdot (v+1) \frac{1}{v+1} \sum_{k=0}^v |s_k^*| + A(n+1) \times \right. \\ &\times (n+1) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |s_k^*| \left. \right\} = O(n^{-1}) \sum_{v=0}^{n-1} A(v+1) \Theta(v) + O[A(n) \Theta(n)] = \\ &= O[A(n) \Theta(n)], \end{aligned}$$

womit der Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. Sei $\lambda(x) \uparrow +\infty$ eine von unten konkave, differenzierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften: Es gibt ein $\eta > 0$ so, daß $\lambda(x)x^{-\eta} \downarrow$, und $\Delta^2 \lambda(x) = O[\lambda(x)/x^2]$. Sei weiterhin $\omega(\delta)$ eine monoton wachsende Funktion, für die $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ ist und außerdem positive Zahlen $\eta < \vartheta < \zeta < 1$ existieren,

³ Wegen $A(x)x^\eta \uparrow$ haben wir $[A(x)x^\eta]' \geq 0$, d. h. $A'(x)x^\eta + \eta A(x)x^{\eta-1} \geq 0$, und daraus $A'(x) \geq -\eta A(x)x^{-1}$ bzw.

$$|A'(x)| = -A'(x) \leq \eta A(x)x^{-1} < A(x)x^{-1}.$$

Auf Grund des Mittelwertssatzes der Differentialrechnung gilt

$$\Delta A(k) = A(k) - A(k+1) = -A'(k + \tau_k) \quad (0 < \tau_k < 1),$$

woraus wir erhalten:

$$|A'(k + \tau_k)| \leq |\Delta A(k)| < A(k) \cdot k^{-1}.$$

für die (für genügend kleine $\delta > 0$) die Beziehungen $\omega(\delta)|\delta^\zeta \uparrow$ und $\omega(\delta)|\delta^\theta \downarrow$ gelten. Konvergieren die $(C, 1)$ -Mittel σ_n der Reihe Σu_n zu σ und gilt

$$\sigma_n - \sigma = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

so konvergieren die $(C, 1)$ -Mittel $\sigma_n(\lambda)$ der Reihe $\Sigma \lambda(n) u_n$ zu einer Zahl $\sigma(\lambda)$ mit der Approximationsgeschwindigkeit

$$\sigma_n(\lambda) - \sigma(\lambda) = O\left[\lambda(n) \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Beweis. Bezeichne σ_n^* das n -te $(C, 1)$ -Mittel der Reihe $(u_0 - \sigma) + u_1 + \dots$ so gilt

$$\sigma_n^* = \sigma_n - \sigma,$$

und wir haben

$$|\sigma_n^*| \leq |\sigma_n - \sigma| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Bezeichnen wir das n -te $(C, 1)$ -Mittel der Reihe $\lambda(0)(u_0 - \sigma) + \lambda(1)u_1 + \dots$ mit $\sigma_n^*(\lambda)$, so gilt

$$\sigma_n^*(\lambda) - \sigma_m^*(\lambda) = \sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda).$$

Nach einer bekannten Transformationsformel ([7]) ist aber

$$\begin{aligned} |\sigma_n^*(\lambda) - \sigma_m^*(\lambda)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) \right] (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta^2 \lambda(k)| + \\ &+ \sum_{k=m}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta^2 \lambda(k)| + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta \lambda(k+1)| + \\ &+ \frac{2}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta \lambda(k+1)| + \lambda(n) |\sigma_n^*| + \lambda(m) |\sigma_m^*|. \end{aligned}$$

Es seien S_1^* und S_2^* die beiden ersten Glieder der rechten Seite. Nach unseren Voraussetzungen gilt für S_1^* die Abschätzung:

$$\begin{aligned} S_1^* &= O(m^{-1}) \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \omega\left(\frac{1}{k}\right) \lambda(k) k^{-2} = O[m^{-1} \lambda(m)] \sum_{k=1}^{m-1} k^\zeta \omega\left(\frac{1}{k}\right) k^{-\zeta} = \\ &= O\left[m^{-1+\zeta} \lambda(m) \omega\left(\frac{1}{m}\right)\right] \sum_{k=1}^{m-1} k^{-\zeta} = O\left[\lambda(m) \omega\left(\frac{1}{m}\right)\right]. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von S_2^* bemerken wir, daß für S_2^* die Relation

$$S_2^* = O(1) \sum_{k=m}^{n-1} k \omega\left(\frac{1}{k}\right) \lambda(k) k^{-2} = O(1) \sum_{k=m}^{n-1} k^{-1-\vartheta+\eta} k^\vartheta \omega\left(\frac{1}{k}\right) \lambda(k) k^{-\eta}$$

besteht. Im Sinne unserer Voraussetzungen sind aber $\omega\left(\frac{1}{x}\right)x^\vartheta$ und $\lambda(x)x^{-\eta}$ monoton abnehmend, daher ergibt sich

$$S_2^* = O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)\lambda(m)m^{\vartheta-\eta}\right]\sum_{k=m}^{n-1}k^{-1-(\vartheta-\eta)},$$

woraus wegen $\vartheta - \eta > 0$ für S_2^* die Größenordnung $\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)$ folgt. Damit

haben wir für $S_1^* + S_2^*$ die Größenordnung $\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)$ bewiesen. Da nun aus $\lambda(x)x^{-\eta}\downarrow$ und aus der monotonen Abnahme des nichtnegativen Differentialquotienten $\lambda'(x)$ in ähnlicher Weise wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 in der Fußnote 2 die Beziehung

$$|\Delta\lambda(k)| < \lambda(k)k^{-1}$$

folgt, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{2}{m+1}\sum_{k=1}^{m-1}(k+1)|\sigma_k^*||\Delta\lambda(k+1)| &= O(m^{-1})\sum_{k=1}^{m-1}k\omega\left(\frac{1}{k}\right)k^{-1}\lambda(k) = \\ &= O\left[\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right]. \end{aligned}$$

Da für die übrigen Glieder die Größenordnung $\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)$ offensichtlich gilt, haben wir den Beweis des Hilfssatzes 2 vollendet.

3. Beweis des Satzes 1

Gilt für den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; a, b)$ die Beziehung

$$\omega(\delta; a, b)/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma} \rightarrow +\infty$$

für $\delta \rightarrow 0$ mit einer geeigneten Zahl $\gamma > 0$, so folgt aus dem schon zitierten Satz von ALEXITS ([1], S. 295—300) die Beziehung (1). Strebt aber der Quotient $\omega(\delta; a, b)/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma}$ für kein $\gamma > 0$ gegen $+\infty$ wenn $\delta \rightarrow 0$, so existieren nach

Annahme des Satzes 1 Zahlen $0 < \frac{\zeta}{2} < \vartheta < \zeta < 1$, für die die Beziehungen

$\omega(\delta)/\delta^\vartheta \downarrow 0$, $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow +\infty$ mit $\delta \downarrow 0$ gültig sind, wo $\omega(\delta)$ die Majorantenfunktion von $\omega(\delta; a, b)$ bedeutet. Die Funktion $\lambda(x) = x^{\zeta/2}$ erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2, wenn wir dort $\eta = \frac{\zeta}{2}$ setzen. Sodann folgt für

die Punkte x eines jeden inneren Teilintervalls von (a, b) : $\sigma_n(x) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, wo $\sigma_n(x)$ entweder das n -te Fejérsche Mittel der Fourierreihe

von $f(x)$ bezeichnen kann (S. BERNSTEIN), oder das n -te $(C, 1)$ -Mittel der Entwicklung nach dem zur Gewichtsfunktion $\omega(x)$ gehörigen Orthonormalpolynomsystem bedeutet (G. FREUD [5]). Nach dem Hilfssatz 2 approximieren die n -ten $(C, 1)$ -Mittel der transformierten Fourierreihe $\sum v^{\zeta/2}(a_v \cos vx +$

+ $b_\nu \sin \nu x$) bzw. der Polynomreihe $\sum \nu^{\zeta/2} c_\nu p_\nu(x)^4$ in allen diesen Punkten x die der transformierten Reihe entsprechende Funktion $f_{\zeta/2}(x)$ gleichmäßig in der Größenordnung $n^{\zeta/2} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$. Auf Grund der in der Einleitung zitierten Sätze ist somit der Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; f_{\zeta/2})$ von $f_{\zeta/2}(x)$ in jedem inneren Teilintervall $[c, d] \subset (a, b)$ von der Größenordnung $\omega(\delta)/\delta^{\zeta/2}$. Für diesen letzteren Stetigkeitsmodul gilt aber bei $\delta \rightarrow 0$ die Bedingung $\omega(\delta; f_{\zeta/2})/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma} \rightarrow +\infty$ mit geeignetem $\gamma > 0$, da $\omega(\delta; f_{\zeta/2})/\delta^{\zeta/2} = O[\omega(\delta)/\delta^\zeta]$, wo $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow +\infty$ und $\frac{\zeta}{2} < \frac{1}{2}$ ist. Infolgedessen sind die transformierten Reihen stark $(C, 1)$ -summierbar und für ihre Teilsummen $s_\nu\left(x; \frac{\zeta}{2}\right)$ besteht die Relation (ALEXITS [1], S. 295—300):

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \left| s_\nu\left(x; \frac{\zeta}{2}\right) - f_{\zeta/2}(x) \right| = O\left[n^{\zeta/2} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Wählen wir für die Funktionen $A(x)$ bzw. $\ell(x)$ des Hilfssatzes 1 die Ausdrücke $x^{-\zeta/2}$ bzw. $x^{\zeta/2} \omega\left(\frac{1}{x}\right)$ (den Exponenten des Hilfssatzes 1 ξ, β bzw. η entsprechen in unserem Fall die Zahlen $\frac{\zeta}{2}, \vartheta - \frac{\zeta}{2}$ bzw. $\frac{\zeta}{2}$), so folgt aus dem

⁴ Daß diese Reihen wieder die Fourierreihenentwicklungen einer L^2 -integrierbaren Funktion sind, können wir z. B. folgenderweise einsehen. Sei $s_n(x)$ die n -te Teilsumme der Fourierreihenentwicklung von $f(x)$, $T_n(x)$ das in $[a, b]$ am besten approximierende Polynom höchstens n -ter Ordnung, so haben wir:

$$\int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 w(x) dx \leq \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 w(x) dx = O\left[\omega^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right], \text{ d. h.}$$

$$\sum_{\nu=2^{n+1}}^\infty c_\nu^2 = O\left[\omega^2\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

und eine ähnliche Beziehung gilt für den trigonometrischen Fall mit $a_\nu^2 + b_\nu^2 = c_\nu^2$. Sodann haben wir:

$$\sum_{\nu=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \nu^\zeta c_\nu^2 \leq 2^{n\zeta} \cdot 2^\zeta \sum_{\nu=2^{n+1}}^{2^{n+1}} c_\nu^2 = O\left[2^{n\zeta} \omega^2\left(\frac{1}{2^n}\right)\right] = O(1) 2^{n\zeta} \cdot 2^{-2n\vartheta} = O[2^{-(2\vartheta-\zeta)n}]$$

wegen $\omega\left(\frac{1}{2^n}\right) 2^{n\vartheta} \downarrow 0$ mit $n \rightarrow +\infty$.

Es ist also

$$\sum_{k=1}^\infty k^\zeta c_k^2 = O(1) \sum_{n=0}^\infty \sum_{\nu=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \nu^\zeta c_\nu^2 = O(1) \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{2^{2\vartheta-\zeta}}\right)^n < \infty, \text{ da } 2\vartheta - \zeta > 0 \text{ ist,}$$

woraus nach dem Riesz-Fischerschen Satz folgt, daß die transformierten Reihen Fourierreihen einer $L^2[a, b]$ -integrierbaren Funktion $f_{\zeta/2}(x)$ sind.

Hilfssatz 1 für die Teilsummen $s_n(x)$ der ursprünglichen Reihen die Beziehung

$$\max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right],$$

wie wir es behauptet haben.

Der Fall $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ soll eigens hervorgehoben werden. Dann genügt $f(x)$ in $[a, b]$ einer Lipschitzbedingung α -ter Ordnung. Aus unseren beiden Sätzen ergibt sich unmittelbar das folgende

Korollar. *Genügt $f(x)$ in $[a, b]$ einer Lipschitzbedingung α -ter Ordnung mit $\alpha < 1$, so gilt in $[c, d] \subset (a, b)$*

$$\max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O \left(\frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Ist $f(x)$ nach 2π periodisch und sind die $\sigma_n(x)$ die Fejérschen Mittel, so gilt dieser Annäherungsgrad auf der ganzen Zahlengerade.

(Eingegangen: 14. März, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALEXITS, G.: *Convergence Problems of Orthogonal Series*. Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1961.
- [2] — „Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier" (ungarisch, französische Zusammenfassung). *Matematikai és Fizikai Lapok* **48** (1941) 410—422.
- [3] — „Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 29—42.
- [4] ALEXITS, G. und KRÁLIK, D.: „Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960) 387—399.
- [5] FREUD, G.: „Über die $(C, 1)$ -Summen der Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) 197—208.
- [6] KRÁLIK, D.: „Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 49—64.
- [7] PALEY, R. E. A. C. und ZYGMUND, A.: „On some Series of Functions". *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* **26** (1930) 337—357.
- [8] TANDORI, K.: „Über Approximationen mit allgemeinen Orthogonalreihen". *Annales Univ. Sci. Budapest. R. Eötvös* **3—4** (1960—1961) 351—356.
- [9] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series*. Cambridge, 1959, I, II.

О ПОРЯДКЕ АППРОКСИМАЦИИ СИЛЬНОГО СУММИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

G. ALEXITS и D. KRÁLIK

Резюме

Пусть $s_n(x)$ обозначает n -ные частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по системе ортонормированных полиномов, порожденных на отрезке $[a, b]$ весовой функцией $w(x)$, соответствующего по тригонометрической системе (в дальнейшем $[a, b] = [0, 2\pi]$) и $f(x)$ периодическая функция с периодом 2π . Пусть также

$$h_n(f, x) = \frac{\sum_{\nu=0}^n |f(x) - s_\nu(x)|}{n+1}.$$

Докажем следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть для модуля непрерывности $\omega(\delta, a, b)$ функции $f(x)$ будет: $\omega(\delta, a, b) = O(\delta^\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$), кроме того пусть $\omega(\delta, a, b) \leq \omega(\delta)$, где $\omega(\delta) \uparrow$ и для подходящих чисел $0 < \zeta/2 < \vartheta < \zeta < 1$ $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow + \infty$, $\omega(\delta)/\delta^\vartheta \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Если на $[a, b]$ весовая функция $w(x)$ удовлетворяет неравенству $0 < m \leq w(x) \leq M$, тогда на каждом $[c, d] \subset (a, b)$

$$\max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

Теорема 2. Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π и $\omega(\delta) \leq \delta^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), тогда

$$\max_{-\infty < x < +\infty} h_n(f, x) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

Теорема 3. Для периодической функции $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) с периодом 2π в каждой точке x будет:

$$f(x) - s_n(x) = O \left(\frac{\lambda_n}{n^\alpha} \right),$$

за исключением может быть такой подпоследовательности $\{s_{n_k}(x)\}$, индексы которой образуют подпоследовательность $\{n_k\}$ нулевой плотности в последовательности натуральных чисел. Здесь $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность, произвольно медленно, но монотонно стремящаяся $k + \infty$.

Доказательство выше перечисленных теорем опирается на две элементарные, обобщенного характера вспомогательные теоремы теории рядов.