ÜBER EINEN SATZ DER KETTENBRUCHLEHRE

von

PÉTER SZÜSZ

Herrn Professor P. Erdős
zum 50. Geburtstag gewidmet

Ein bekannter Satz[1] besagt folgendes: Ist $\frac{p}{q}$ ein irreduzibler Bruch, so folgt aus

$$(1) \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

dass $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch der regelmässigen Kettenbruchentwicklung von α sein muss. Dies lässt sich auch folgendermassen ausdrücken: Im Intervall $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2q^2}\right)$ liegen nur solche α, in deren regelmässigen Kettenbruchentwicklung der Bruch $\frac{p}{q}$ als Näherungsbruch vorkommt. Im folgenden bezeichne ich mit $I_{p,q}$ das Intervall maximaler Länge derjenigen α $(0 < \alpha < 1)$, in deren regelmässigen Kettenbruchentwicklung der schon in irreduzibler Gestalt geschreibene Bruch $\frac{p}{q}$ als Näherungsbruch vorkommt. Bezeichnet $|I|$ die Länge von I, so ist stets

$$(2) \qquad q^2|I_{p,q}| \geqq 1.$$

$q^2 \, | \, I_{p,q} \, |$ hängt nur von p und q ab und lässt sich durch die (endliche) Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$ explizit angeben. Es gilt[2]

$$(3) \qquad q^2|I_{p,q}| = \frac{3}{\left(1 + \frac{q'}{q}\right)\left(2 - \frac{q'}{q}\right)},$$

wobei q' den »vorletzten« Näherungsnenner des endlichen Kettenbruches

$$(4) \qquad \frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_k]$$

---

[1] Vgl. PERRON [1], S. 39.

[2] Vgl. PERRON [1], S. 39 (3) ist dort nicht explizit angegeben, lässt sich aber von der dortigen Formel $\vartheta \leq \frac{B_{u-1}}{B_{u-1} + B_{u-2}}$ leicht herleiten.

bedeutet; hier hängt k von p und q ab. Es gilt

$$a_k \geqq 2\,. \tag{5}$$

Wegen (3),

$$\frac{q'}{q} = [0; a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1] \tag{6}$$

und (5) gilt jedenfalls

$$\frac{4}{3} < q^2 |I_{p,q}| < \frac{3}{2}\,. \tag{7}$$

P. Erdös hat die Frage aufgeworfen, den Mittelwert der $q^2 \mid I_{p,q} \mid$ für $q \to \infty$ asymptotisch zu bestimmen, wenn p sämtliche Zahlen unterhalb q durchläuft, für die $(p, q) = 1$ gilt, d. h. den Grenzwert

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0<p<q \\ (p,q)=1}} q^2 |I_{p,q}| \tag{8}$$

zu bestimmen. In der vorliegenden Note bestimme ich schärfer die asymptotische Verteilung der $q^2 \mid I_{p,q} \mid$, d. h. den Grenzwert

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0<p<q, \\ (p,q)=1, \\ q^2|I_{p,q}|\leqq t}} 1\,, \tag{9}$$

wobei t eine beliebige reelle Zahl ist, die den Ungleichungen

$$\frac{4}{3} \leqq t \leqq \frac{3}{2} \tag{10}$$

genügt. Es wird der folgende Satz bewiesen:

Satz. *Man setze*

$$F_q(t) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0<p<q, \\ (p,q)=1, \\ q^2|I_{p,q}|\leqq t}} 1\,. \tag{11}$$

Dann gilt für $^4/_3 \leqq t \leqq {}^3/_2$

$$\lim_{q\to\infty} F_q(t) = \sqrt{9 - \frac{12}{t}} = F(t)\,. \tag{12}$$

Die folgenden zwei Paragraphen enthalten die zum Beweis von (12) nötigen Hilfssätze; im § 3 wird der Beweis von (12) vollendet.

Aus unserem Satz folgt unmittelbar, dass

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0<p<q \\ (p,q)=1}} q^2 |I_{p,q}| = \int_{^4/_3}^{^3/_2} t\,d\,F(t) = 2 \log 2 = 1{,}3863\ldots \tag{13}$$

womit die Frage von P. Erdös beantwortet ist.

§ 1. Über die Funktion $\varphi_c(n)$

Es sei n eine natürliche Zahl, c eine positive Zahl mit $c \leqq 1$. Man setze

$$\varphi_c(n) = \sum_{\substack{0<m\leqq cn \\ (m,n)=1}} 1\,. \tag{1.1}$$

Es ist also $\varphi_1(n) = \varphi(n)$, wobei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion bedeutet.
Dann gilt

Hilfssatz 1.1. *Es ist*

$$\varphi_c(n) = c\varphi(n) + O(n^\varepsilon) \qquad (n \to \infty) \tag{1.2}$$

wobei $\varepsilon > 0$, *aber sonst beliebig klein ist.*

Beweis. Es gilt

$$\varphi_c(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\left[\frac{cn}{d}\right] = \sum_{d/n} \mu(n)\frac{cn}{d} + O(2^{\nu(n)})\,, \tag{1.3}$$

wobei $\nu(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n bedeutet. Nun ist

$$\nu(n) = o(\log n)\,. \tag{1.4}$$

(1.4) lässt sich folgendermassen beweisen: es ist

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$$

also

$$n \geqq \prod_{p/n} p \geqq p_\varkappa^{\nu(u)-\varkappa}, \tag{1.5}$$

wobei p_χ die χ-te Primzahl bedeutet. Aus (1.5) folgt

$$\log n > (\nu(n) - \varkappa)\log p_\varkappa\,,$$

also

$$\nu(n) < \frac{\log n}{\log p_\varkappa} + \varkappa\,,$$

woraus (1.4) schon folgt. Aus (1.3) und (1.4) erhält man

$$\varphi_c(n) = c\varphi(n) + O(2^{0(\log n)}) = c\varphi(n) + O(n^\varepsilon)$$

womit Hilfssatz 1.1 bewiesen ist.

§ 2. Ein Hilfssatz aus der Kettenbruchlehre

Es sei n gegeben. Dann lässt sich jede Zahl $\frac{a}{n}$ mit $(q, n) = 1$, $a < n$ in einen regelmässigen Kettenbruch

$$\frac{a}{n} = [0 : a_1, \ldots, a_k) \tag{2.1}$$

entwickeln, wobei

$$a_k \geqq 2 \tag{2.2}$$

ist. Bezeichnet B_{k-1} den »vorletzten« Näherungsnenner des Kettenbruches (2.1), so ist wegen (3)

$$n\,|I_{a,n}| = \frac{3}{\left(1+\frac{B_{k-1}}{n}\right)\left(2-\frac{B_{k-1}}{n}\right)}. \tag{2.3}$$

Wegen (2.2) ist

$$\frac{B_{k-1}}{n} < \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Nun gilt der folgende

Hilfssatz 2.1. *Es sei a' eine natürliche Zahl mit*

$$(a', n) = 1 \tag{2.5}$$

und

$$2\,a' \leqq n. \tag{2.6}$$

Dann gibt es genau zwei zwischen 0 *und n gelegene natürliche Zahlen a_1 und a_2 $\big((a_1, n) = (a_2, n) = 1\big)$ derart, dass a' der »vorletzte« Näherungsnenner der endlichen regelmässigen Kettenbruchentwicklung von*

$$\frac{a_1}{n} \quad \textit{und} \quad \frac{a_2}{n}$$

ist.

Beweis. $\frac{a'}{n}$ lässt sich in einen Kettenbruch

$$\frac{a'}{n} = [0, b_1, \ldots, b_k] = [0\,; b_1, \ldots, b_k - 1, 1] \tag{2.7}$$

entwickeln, wobei $b_k \geqq 2$ gesetzt werden darf. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{n} &= [0\,; 1, (b_k - 1), b_{k-1}, \ldots, b_1]\,, \\ \frac{a_2}{n} &= [0\,; b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1]\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Brüche $\frac{a_1}{n}$ und $\frac{a_2}{n}$ sind voneinander offenbar verschieden. Damit ist Hilfssatz 2.1 bewiesen.

§ 3. Vollendung des Beweises

Gehört im Sinne des Hilfssatzes 2.1 zu einer natürlichen Zahl a_1 mit $a_1 < n$, $(a_1, n) = 1$ die Zahl a', so ist

$$n^2 |I_{a_1,n}| = \frac{3}{\left(1 + \frac{a'}{n}\right)\left(2 - \frac{a'}{n}\right)} . \tag{3.1}$$

Da wegen Hilfssatz 2.1 zu jedem a' mit $(a', n) = 1$, $2\,a' \leqq n$ zwei verschiedene Zahlen a_1 und a_2 gehören, ist für jedes t welches den Ungleichungen (10) genügt,

$$\sum_{\substack{n^2 |I_{a,n}| \leqq t \\ a \leqq n \\ (a,n)=1}} 1 = 2 \sum_{\substack{2a' \leqq n \\ (a',n)=1 \\ 3 \leqq t\left(1+\frac{a'}{n}\right)\left(2-\frac{a'}{n}\right)}} 1 . \tag{3.2}$$

Nun betrachte ich den Ausdruck

$$G_n(t) = \sum_{\substack{2a' \leqq n \\ (a',n)=1 \\ 3 \leqq \left(1+\frac{a'}{n}\right)\left(2-\frac{a'}{n}\right)t}} 1 . \tag{3.3}$$

Die Summationsbedingungen $2\,a' \leqq n$ und $3 \leqq \left(1 + \frac{a'}{n}\right)\left(2 - \frac{a'}{n}\right)t$ in (3.3) sind äquivalent mit

$$\frac{n}{2}\left(1 - \sqrt{9 - \frac{12}{t}}\right) \leqq a' \leqq \frac{n}{2} .$$

Die Anzahl der a', die ausserdem $(a', n) = 1$ leisten, ist wegen der Hilfssätze 1.1 und 2.1 gleich

$$\varphi_{1/2}(n) - \varphi_{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{9 - \frac{12}{t}}\right)}(n) = \sqrt{9 - \frac{12}{t}}\, \varphi_{1/2}(n) + O(n^\varepsilon) .$$

Daher ist

$$G_n(t) = \sqrt{9 - \frac{12}{t}}\, \varphi_{1/2}(n) + O(n^\varepsilon) ,$$

woraus wegen (3.2) und wegen der trivialen Ungleichung $\varphi(n) > n^{1-\varepsilon}$ unser Satz schon folgt.

(Eingegangen: 18. März, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] PERRON, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, I. III. Auflage, Stuttgart, 1954.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

P. SZÜSZ

Резюме

Автор в своей работе доказывает следующую теорему: *Пусть* $0 < \frac{p}{q} < 1$, $(p,q)=1$. *Если* $I_{p,q}$ *обозначает интервал состоящий из тех чисел, в разложении которых в цепные дроби встречается дробь* $\frac{p}{q}$, *а* $|I|$ *длину интервала* I, *то для каждого* t, *для которого*

$$\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{3}{2}$$

выполняется предельное соотношение:

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ q^2 |I_{p,q}| \leq t}} 1 = \sqrt{9 - \frac{12}{t}}.$$