

ÜBER EINEN LINEAREN MEHRDIMENSIONALEN APPROXIMATIONSPROZESS

von
M. SALLAY

Es bezeichne $f(x + 2\pi) = f(x)$ eine auf der ganzen reellen Achse stetige Funktion. Nach einem bekannten Satz der Approximationstheorie kann man für jedes $f(x)$ ein trigonometrisches Polynom T_m höchstens m -ter Ordnung konstruieren, so dass

$$(1) \quad |f(x) - T_m(x)| \leq \kappa_0 \omega\left(f; \frac{1}{m}\right)$$

besteht, wo

$$(2) \quad \omega\left(f; \frac{1}{m}\right) = \max_{\substack{h \leq \frac{1}{m} \\ x \in [0, 2\pi]}} |f(x+h) - f(x)|$$

ist. (S. [2]) Es ist möglich, die Approximationspolynome in der Form $T_m(x) = A_m\{f; x\}$ zu wählen, wobei A_m einen linearen Operator bedeutet, welcher den Raum $C_{2\pi}$ der stetigen Funktionen mit der Periode 2π in den Raum der trigonometrischen Polynome höchstens m -ter Ordnung transformiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $A_m(f)$ die Funktionen $f(x)$ in der Grössenordnung $\omega\left(f; \frac{1}{m}\right)$ approximiert, sind die folgenden:

1. $\max |A_m f| \leq \kappa_1 \max |f(x)|$ für $f \in C_{2\pi}$,
2. $\max |f - A_m f| \leq \kappa_2 \frac{\lambda}{m}$ für $f \in \text{Lip}_\lambda 1^1 \cap C_{2\pi}$,

wo κ_1 und κ_2 von f , m , A_m und λ unabhängige Konstante sind.

Betrachten wir die in dem Gebiet $D = \{0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ in jeder Veränderlichen stetigen Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$. Definieren wir für die Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine, von den Parametern m_i (wo m_i ganze Zahlen sind) abhängige lineare Transformationsfolge $\{A_{m_1 \dots m_n}\}$, welche den Raum der Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in den Raum der in der jeder Veränderlichen stetigen Funktionen transformiert.

¹ $f \in \text{Lip}_\lambda 1$, wenn $|f(x+h) - f(x)| \leq \lambda |h|$.

Es seien im weiteren der Stetigkeitsmodul von $f(x_1, \dots, x_n)$

$$(3) \quad \omega(f; v_1, \dots, v_n) = \max_{\substack{h_i \leq v_i \\ 0 \leq x_i \leq 1}} |f(x_1 + h_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n)|$$

und die Norm des Operators $A_{m_1 m_2 \dots m_n}$

$$\|A_{m_1 m_2 \dots m_n} f\| = \max_{x_i \in D} |A_{m_1 \dots m_n} f|.$$

In unserer Arbeit beweisen wir, dass für die Approximation von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ durch $A_{m_1 \dots m_n} f$ für passende Wahl der Transformationen eine zu dem eindimensionalen Fall analoge Abschätzung gültig ist. In weiteren zeigen wir, dass sich durch spezielle Wahl von $A_{m_1 m_2 \dots m_n}$ eine Abschätzung für die Approximation der periodischen Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ durch trigonometrische Polynome $T_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)$ in x_i höchstens m_i -ter Ordnung ergibt. Für den Fall $n = 2$ sind solche trigonometrischen Polynome in den Arbeiten [1] und [3] konstruiert. Eine ähnliche Theorie ist gültig, wenn wir statt der trigonometrischen Polynome eine gewisse singuläre Integraltransformation von $f(x_1, x_2)$ betrachten. (S. [3].)

1.

Es sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine in dem Gebiet D in jeder Veränderlichen stetige Funktion. Betrachten wir die lineare Transformationsfolge $\{A_{m_1 \dots m_n}\}$, und setzen wir voraus, dass

$$(4) \quad \|A_{m_1 \dots m_n} f\| \leq \kappa_1 \|f\|$$

besteht, wo κ_1 eine von f , m_i und $A_{m_1 \dots m_n}$ unabhängige Konstante ist.

Bezeichnen wir mit C^* die zu dem Raum C der stetigen Funktionen gehörigen Funktionen, für welche

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i - y_i|.$$

$x_i, y_i \in D$

Setzen wir im weiteren voraus, dass für $f \in C^*$

$$(5) \quad \|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \frac{1}{n} \kappa_2 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}$$

gültig ist, wo κ_2 eine von f , m_i , λ_i und $A_{m_1 \dots m_n}$ unabhängige Konstante ist.

Satz 1. *Es seien die Bedingungen (4) und (5) erfüllt. Dann gilt für $f \in C$ die Ungleichung*

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq (\kappa_1 + \kappa_2 + 1) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right).$$

Vor dem Beweis beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. *Zu jeder Funktion $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ können wir ein multilineares Polynom der Gestalt*

$$(6) \quad p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (a_i x_i + b_i)$$

konstruieren, für welches die Ungleichungen

$$(7) \quad \max |f(x_1, \dots, x_n) - p(x_1, \dots, x_n)| \leq \omega(f; v_1, \dots, v_n)$$

und

$$(8) \quad \begin{aligned} & |p(x_1, x_2, \dots, x_n) - p(y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \\ & \leq \omega(f; v_1, \dots, v_n) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{v_i} \end{aligned}$$

gelten.

Beweis. Es nehme die Funktion $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in den Eckpunkten des n -dimensionalen Parallelepipeds mit Kantenlänge $v_1, v_2, \dots, v_n$ die Werte von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ an.²

Betrachten wir den zu der z -Achse senkrechten Streifen mit der Breite $\omega(f; v_1, \dots, v_n)$ der die Fläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ enthält. Es ist hinreichend zu zeigen, dass der Streifen auch die Oberfläche $z = p(x_1, \dots, x_n)$ enthält. Für $n = 1$ ist die Behauptung leicht ersichtlich. Setzen wir voraus, dass die Behauptung für $n - 1$ gültig ist.

Schneiden wir die Fläche $z = p(x_1, \dots, x_n)$ mit den $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen $x_n^l = \beta_l$ $x_n^0 \leq \beta_l \leq x_n^0 + V_n$, so bekommen wir $(n - 1)$ -dimensionale Oberflächen der Gestalt

$$z = p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \beta_l) = \prod_1^{n-1} (a_i x_i + b_i) \cdot (a_n \beta_l + b_n),$$

wo $p(x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l)$ in den Eckpunkten des $(n - 1)$ -dimensionalen Parallelepipeds mit Kantenlänge $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ dieselben Werte annimmt, wie die Funktion $f(x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l)$. Da nach der Induktionsvoraussetzung der Streifen mit der Breite $\omega(f[x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l]; v_1, \dots, v_{n-1}, 0) \leq \omega(f[x_1, \dots, x_n]; v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ die Oberfläche $z = p(x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l)$ $x_n^0 \leq \beta_l \leq x_n^0 + U_n$ enthält, folgt unsere Behauptung.

² Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $p(x_1, \dots, x_n)$ eindeutig bestimmt ist. Da in der Darstellung (6) von $p(x_1, \dots, x_n)$ die Anzahl der Koeffizienten gleich $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ist, ist es hinreichend zu beweisen, dass die Determinante des Systems $D_n \neq 0$ ist. Es sei

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{12^{n-1}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{22^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2^{n-1}1} & a_{2^{n-1}2} & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

und es nehme x_n die Werte $x_n^0, x_n^1 = x_n^0 + v_n, 0 \leq x_n^0 \leq 1, v_n \neq 0$ an. Dann

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} x_n^0 & \dots & a_{12^{n-1}} x_n^0 & a_{11} & \dots & a_{12^{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2^{n-1}1} x_n^0 & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} x_n^0 & a_{2^{n-1}1} & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} \\ a_{11} x_n^1 & \dots & a_{12^{n-1}} x_n^1 & a_{11} & \dots & a_{12^{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2^{n-1}1} x_n^1 & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} x_n^1 & a_{2^{n-1}1} & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} \end{vmatrix} = (x_n^0 - x_n^1)^{2^{n-1}} D_{n-1}^2 \neq 0.$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes 1. Teilen wir die Kante des n -dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge 1 in $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$ Teile. So ist der Würfel in $\prod_{i=1}^n m_i$ Parallelepipede zerlegt. Konstruieren wir für jedes Parallelepiped die Funktion $p(x_1, \dots, x_n)$ die in den Eckpunkten dieselben Werte annimmt, wie die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$.

Dann ergibt sich wegen (4), (5), (7) und (8)

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| &= \\ &= \|f(x_1, \dots, x_n) - p(x_1, \dots, x_n) + p(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} p(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ A_{m_1 \dots m_n} p(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq (1 + \kappa_1) \|f(x_1, \dots, x_n) - p(x_1, \dots, x_n)\| + \\ &+ \|p(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} p(x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq (1 + \kappa_1 + \kappa_2) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right) \end{aligned} \quad \text{w. z. b. w.}$$

2.

Im weiteren setzen wir voraus, dass die partiellen Derivierten r -ter Ordnung der Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ im Gebiet D existieren und dort stetig sind. Bezeichnen wir mit $A_{m_1 \dots m_n}^k$ $k = 1, 2, \dots, r+1$ die lineare Transformationsfolge

$$A_{m_1 \dots m_n}^1 f = A_{m_1 \dots m_n} f, \quad A_{m_1 \dots m_n}^k f = A^1(A_{m_1 \dots m_n}^{k-1} f).$$

Setzen wir voraus, dass $A_{m_1 \dots m_n}^1 f$ die Bedingung

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} A^1 f(x_1, \dots, x_n) = A_{m_1 \dots m_n}^1 \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

befriedigt. Wir zeigen, dass die Ungleichungen

$$(10) \quad \|A_{m_1 \dots m_n}^k g\| \leq \kappa_1^k \|g\| \quad \text{für } g \in C$$

und

$$(11) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq (\kappa_1 + 1)^r \frac{\kappa_2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i} \quad \text{für } f \in C^*$$

gelten.

Die Gültigkeit von (10) ist leicht ersichtlich. Wir beweisen (11) durch vollständige Induktion. Für $r = 0$ ergibt sich die Bedingung (5). Setzen wir voraus, dass (11) für $r-1$ gültig ist, d. h.

$$(12) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq (\kappa_1 + 1)^{r-1} \frac{\kappa_2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| = \\ & = \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f - A^1 \left(f - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right) \right\| \leq \\ & \leq (1 + \kappa_1) \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq (1 + \kappa_1)^r \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}, \end{aligned}$$

letzteres wegen (12).

Satz 2. Setzen wir voraus, dass die partiellen Derivierten r -ter Ordnung der Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ existieren und stetig sind. Betrachten wir die lineare Approximationsfolge $A^i = A_{m_1 \dots m_n}^i$ $i = 1, 2, \dots, r+1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq \\ & \leq \prod_{l=0}^r [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^l + \kappa_1 + 1] \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right)^r \sum_{\substack{\sum_{i=1}^n r_i = r \\ 0 \leq r_i \leq r}} \frac{r!}{\prod_{i=1}^n r_i!} \omega \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \Big), \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion. Für $r = 0$ ergibt sich der Satz 1. Setzen wir voraus, dass die Behauptung für $r-1$ gültig ist. Es ist

$$\begin{aligned} & \left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f(x_1, \dots, x_n) \right\| = \\ & = \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A^i f - A^1 \left(f - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A^i f \right) \right\|. \end{aligned}$$

Da die Funktion $g = f - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A^i f$ stetig ist und nach (10) und (11) die Relationen

$$\|A^1 g\| \leq \kappa_1 \|g\|$$

und

$$\|g - A^1 g\| \leq (\kappa_1 + 1)^r \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}$$

gültig sind, ergibt sich aus dem Satz 1

$$\begin{aligned} & \|g(x_1, \dots, x_n) - A^1 g(x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ & \leq [(\kappa_1 + 1)^r \kappa_2 + \kappa_1 + 1] \omega \left(g; \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_n} \right). \end{aligned}$$

Da die partiellen Derivierten erster Ordnung der Funktionen $g(x_1, \dots, x_n)$ existieren, bekommen wir aus (13) die Abschätzung

$$\|g - A^1 g\| \leq [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^r + \kappa_1 + 1] \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \|g_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)\|.$$

Da die partielle Derivierten $r - 1$ -ter Ordnung der Funktionen f_{x_i} $i = 1, \dots, n$ existieren, so folgt aus (9) und aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
 \|g_{x_i}\| &\leq \\
 &\leq K^* \left(\sum_1^n \frac{1}{m_i} \right)^{r-1} \sum_{\substack{\sum r_j + r_i = r-1 \\ 0 \leq r_i \leq r-1}} \frac{(r-1)!}{\prod r_i! \cdot (r_i+1)!} \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_i^{r_i+1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right) = \\
 (15) \quad &= K^* \left(\sum_1^n \frac{1}{m_i} \right)^{r-1} \sum_{\substack{\sum r_j = r \\ 0 \leq r_j \leq r-1 \text{ } j \neq i \\ 0 \leq r_i \leq r \text{ } r_i \neq 0}} \frac{r!}{\prod r_j!} \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right),
 \end{aligned}$$

wobei

$$K^* = \prod_{l=0}^{r-1} [\kappa_2(\kappa_1+1)^l + \kappa_1 + 1].$$

Setzt man (15) in (14) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &\left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f(x_1, \dots, x_n) \right\| \leq \\
 &\leq \prod_{i=0}^r [\kappa_2(\kappa_1+1)^l + \kappa_1 + 1] \left(\sum_1^n \frac{1}{m_i} \right)^r \sum_{\substack{\sum r_i = r \\ 0 \leq r_i \leq r}} \frac{r!}{\prod r_i!} \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right) \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{w. z. b. w.}
 \end{aligned}$$

3.

Es sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine in jeder Veränderlichen stetige und nach 2π -periodische Funktion. Betrachten wir die lineare Transformation

$$T_{m_1 \dots m_n} = \gamma^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x_1 + 2u_1, \dots, x_n + 2u_n) \prod_{i=1}^n F_{m_i}(u_i) du_i$$

mit

$$\gamma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \prod_{i=1}^n F_{m_i}(u_i) du_i$$

und

$$F_{m_i}(u_i) = \left[\frac{\sin m_i u_i}{m_i \sin u_i} \right]^4.$$

Die Transformation transformiert den Raum $C_{2\pi}$ der stetigen nach 2π -periodischen Funktionen in den Raum der trigonometrischen Polynome in x_i höchstens m_i -ter Ordnung, ferner befriedigt sie die Bedingungen (4) und (5)

mit den Konstanten $\kappa_1 = 1$ und $\frac{\kappa_2}{n} < 3$. (S. [1].) Nach dem Satz 1 können

wir für $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein trigonometrisches Polynom konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - T_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)\| &\leq \left(\frac{3n}{2\pi} + 2\right) \omega\left(f; \frac{2\pi}{m_1}, \dots, \frac{2\pi}{m_n}\right) \leq \\ &\leq \left(\frac{3n}{2\pi} + 2\right) (2\pi + 1) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right) \end{aligned}$$

besteht.

Betrachten wir jetzt die Transformationsfolge $T_{m_1 \dots m_n}^k$. Es ist leicht ersichtlich, dass $T_{m_1 \dots m_n}^1 = T_{m_1 \dots m_n}$ die Bedingung (9) befriedigt, ferner transformiert jede Transformation die Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ in den Raum der trigonometrischen Polynome in x_i höchstens m_i -ter Ordnung. Setzen wir voraus, dass die partiellen Derivierten r -ter Ordnung der Funktionen existieren. Nach dem Satz 2 können wir ein trigonometrisches Polynom $T_{m_1 \dots m_n}^*$ ($x_1, \dots, x_n$) konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - T_{m_1 \dots m_n}^*(x_1, \dots, x_n)\| &\leq K^{**} \left(\sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{m_i} \right)^r \\ &\sum \frac{r!}{\prod r_i!} \omega\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{2\pi}{m_1}, \dots, \frac{2\pi}{m_n}\right) \end{aligned}$$

besteht mit

$$K^{**} = \prod_{l=1}^r \left(\frac{3n}{2\pi} 2^l + 2 \right).$$

(Eingegangen: 24. März, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] CAPRA, V.: "Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi trigonometrici ed algebrici." *Univ. Politec. Torino. Rend. Sem. Mat.* **17** (1958) 327—346.
- [2] JACKSON, D.: "On approximation by trigonometric sums and polynomials". *Transactions Amer. Math. Soc.* **14** (1912) 491—515.
- [3] НАТАНСОН, И. П.: "О приближении к многократно дифференцируемым периодическим функциями при помощи сингулярных интегралов." *Доклады Академии Наук СССР Том. 82* 163 (1952) 337—339.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МНОГОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

M. SALLAI

Резюме

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ в области $D = \{0 \leq x_i \leq 1; i = 1, \dots, n\}$ непрерывна по каждому переменному $x_1, \dots, x_n$. Пусть далее $A_{m_1 \dots m_n} f$ обозначает линейное преобразование функций $f(x_1, \dots, x_n) \in C$, для которого выполняются условия (4) и (5).

Теорема 1. Тогда для $f \in C$

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq (\kappa_1 + \kappa_2 + 1) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right),$$

где

$$\omega(f, v_1, \dots, v_n) = \max_{\substack{h_i \leq v_i \\ 0 \leq x_i \leq 1}} |f(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, \dots, x_n)|.$$

Предположим, что существуют, причем непрерывные в области D частные производные r -ого порядка функций $f(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $A_{m_1 \dots m_n}^k$ $k = 1, 2, \dots, r+1$ последовательность линейных преобразований $A_{m_1 \dots m_n}^1 f = A_{m_1 \dots m_n} f$; $A_{m_1 \dots m_n}^k f = A^1(A_{m_1 \dots m_n}^{k-1} f)$, которая удовлетворяет условию (9).

Теорема 2. Тогда

$$\left\| f - \sum_1^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq \prod_{i=0}^r [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^i + \kappa_1 + 1] \cdot \left(\sum_1^n \frac{1}{m_i} \right)^r \sum_{\substack{\sum r_i = r \\ 0 \leq r_i \leq 1}} \frac{r!}{\prod r_i!} \omega\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right).$$