SUR UN CRITÈRE D'APPROXIMATION UNIFORME

par

ÁKOS CSÁSZÁR

À la mémoire de mon ami
regretté J. Czipszer

Dans un ouvrage récent [1] de J. CZIPSZER et de l'auteur le critère général suivant d'approximation uniforme a été démontré:

(A) *Soient E un ensemble quelconque et $\mathfrak{S}$ une classe de fonctions réelles définies sur E, jouissant des propriétés suivantes:*

(1) *Les fonctions $f \in \mathfrak{S}$ sont bornées;*

(2) *Les fonctions constantes appartiennent à $\mathfrak{S}$;*

(3) *$f \in \mathfrak{S}$ implique $f + c \in \mathfrak{S}$ pour tout nombre réel c;*

(4) *Si $f, g \in \mathfrak{S}$, on a* $\max(f, g) \in \mathfrak{S}$ *et* $\min(f, g) \in \mathfrak{S}$.

Supposons que, pour une fonction réelle bornée F et des nombres $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ quelconques, il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à la condition

(5) *$x, y \in E$, $F(y) - F(x) \geqq \varepsilon$ entraînent* $\max\limits_i \left(f_i(y) - f_i(x)\right) \geqq \delta$.

Alors la fonction F peut être approchée uniformément aussi près que l'on veut par des fonctions appartenant à $\mathfrak{S}$.

Nous avons déduit de ce critère plusieurs corollaires, en particulier un critère dû à G. NÖBELING et H. BAUER ([2], p. 58, Korollar).

En examinant les possibilités de généraliser le théorème (A), nous avons montré ([1], § 3, exemple 2) que si l'on supprime des hypothèses la condition (3), le théorème cesse d'être valable. Dans ce qui suit, je vais examiner du même point de vue les autres conditions figurant dans l'hypothèse de (A) et je vais montrer que (A) n'est plus valable dès qu'on supprime une quelconque des conditions (1) à (4). Par contre, la condition d'après laquelle la fonction à approcher F doit être bornée, peut être omise sans toucher la validité du théorème.

1. Posons $E = (-\infty, +\infty)$ et soit $\mathfrak{S}$ le plus petit treillis contenant les polynômes (rationnels), c'est-à-dire la classe des fonctions ayant la forme

$$f(x) = \max\left(g_1(x), \ldots, g_n(x)\right), \tag{1.1}$$

où

$$g_i(x) = \min\left(h_{i1}(x), \ldots, h_{in_i}(x)\right) \tag{1.2}$$

et les $h_{ij}(x)$ sont des polynômes. On constate aisément que cette classe $\mathfrak{S}$ satisfait aux conditions (2) à (4). De plus, pour la fonction $F(x) = \sin x$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, les fonctions $f_1(x) = \frac{\delta}{\varepsilon} x \in \mathfrak{S}$, $f_2(x) = -\frac{\delta}{\varepsilon} x \in \mathfrak{S}$ satisfont à (5). Cependant, F n'est pas limite uniforme de fonctions appartenant à $\mathfrak{S}$. En effet, si f est donné par (1.1) et (1.2), vu que la différence de deux polynômes ne change de signe qu'un nombre fini de fois, il existe des nombres c_i et des indices $1 \leqq m_i \leqq n_i$ tels que

$$g_i(x) = h_{im_i}(x) \quad \text{pour} \quad x \geqq c_i ;$$

de même, il existe un nombre c et un indice $1 \leqq k \leqq n$ tels que

$$f(x) = g_k(x) = h_{km_k}(x) \quad \text{pour} \quad x \geqq c .$$

Par suite, on a soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, soit $f(x) = a$ pour $x \geqq c$.

2. Posons $E = [0, 1]$ et désignons par $\mathfrak{S}$ la classe des fonctions continues dans $[0, 1]$ telles que

$$f(y) - f(x) \geqq y - x \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x < y \leqq 1 . \tag{2.1}$$

Les conditions (1) et (3) sont évidemment remplies; il en est de même pour (4). En effet, si $f, g \in \mathfrak{S}$ et $h = \max(f, g)$ ou $h = \min(f, g)$, alors

$$h(y) - h(x) \geqq y - x$$

est valable pour $0 \leqq x < y \leqq 1$ lorsque $h(x) = f(x)$, $h(y) = f(y)$ ou $h(x) = g(x)$, $h(y) = g(y)$; or, si par exemple $h(x) = f(x)$, $h(y) = g(y)$, il y a un z tel que $x \leqq z \leqq y$, $f(z) = g(z) = h(z)$, et alors

$$h(z) - h(x) = f(z) - f(x) \geqq z - x ,$$

$$h(y) - h(z) = g(y) - g(z) \geqq y - z ,$$

donc

$$h(y) - h(x) \geqq y - x .$$

De plus, pour $F(x) = \dfrac{x}{2}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, la condition (5) est remplie en choisissant la seule fonction $f(x) = \dfrac{\delta'}{2\varepsilon} x \in \mathfrak{S}$ où $\delta' = \max(\delta, 2\varepsilon)$. Pourtant, la classe $\mathfrak{S}$ étant évidemment fermée par rapport à la convergence uniforme, la fonction $F \notin \mathfrak{S}$ ne peut pas être approchée aussi près que l'on veut par des fonctions appartenant à $\mathfrak{S}$.

3. Soient E le disque fermé $x^2 + y^2 \leqq 1$ dans le plan et $\mathfrak{S}$ la classe des fonctions continues sur E et harmoniques à l'intérieur de E. Cette classe satisfait évidemment aux conditions (1) à (3). Posons $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ sont donnés et

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) \geqq \varepsilon ,$$

alors

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \geqq \varepsilon$$

en vertu de l'inégalité du triangle, donc les fonctions

$$f_1(x, y) = \frac{2\delta}{\varepsilon} x , \qquad f_2(x, y) = \frac{2\delta}{\varepsilon} y ,$$

$$f_3(x, y) = -\frac{2\delta}{\varepsilon} x , \qquad f_4(x, y) = -\frac{2\delta}{\varepsilon} y$$

(appartenant à $\mathfrak{S}$) satisfont à la condition (5). Cependant, la classe $\mathfrak{S}$ étant fermée par rapport à la convergence uniforme, la fonction $F \notin \mathfrak{S}$ ne peut pas être approchée uniformément aussi près que l'on veut par des fonctions appartenant à $\mathfrak{S}$.

4. Nous allons montrer que, dans le théorème (A), on peut supprimer la condition que la fonction F soit bornée, cette condition étant une conséquence des autres hypothèses du théorème; la même remarque s'applique aux corollaires déduits de (A) dans [1]. Tout cela s'ensuit du lemme suivant:

Soient E un ensemble quelconque et $\mathfrak{S}$ une classe de fonctions réelles bornées sur F. Supposons que, pour une fonction réelle F et $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un nombre $\delta > 0$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (5). *Alors F est bornée sur E.*

Démonstration. En raisonnant par l'absurde, supposons p. ex. que F n'est pas bornée supérieurement. À un $\varepsilon > 0$ donné, cherchons un $\delta > 0$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (5). Soit $\{x_k\}$ une suite d'éléments de E tels que

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) \geqq \varepsilon . \tag{4.1}$$

Par conséquent, on peut faire correspondre à chaque indice k un $i(k)$ tel que $1 \leqq i(k) \leqq n$ et

$$f_{i(k)}(x_k) - f_{i(k)}(x_1) \geqq \delta .$$

Il existe un i_1 tel que $i(k) = i_1$ est valable pour une infinité des indices k, de sorte qu'on peut trouver une suite partielle $\{x_{1j}\}$ de la suite $\{x_k\}$ telle que $x_{11} = x_1$ et

$$f_{i_1}(x_{1j}) - f_{i_1}(x_{11}) \geqq \delta \qquad (j > 1) .$$

De la même façon, on peut choisir eu égard à (4.1) un indice i_2 et une suite partielle $\{x_{2j}\}$ de la suite $\{x_{1j}\}$ telle que $x_{21} = x_{12}$ et

$$f_{i_2}(x_{2j}) - f_{i_2}(x_{21}) \geqq \delta \qquad (j > 1) .$$

En général, soit $\{x_{mj}\}_{j=1,2,\ldots}$ une suite partielle de la suite $\{x_{m-1,j}\}_{j=1,2,\ldots}$ telle que $x_{m1} = x_{m-1,2}$ et

$$f_{i_m}(x_{mj}) - f_{i_m}(x_{m1}) \geqq \delta \qquad (j > 1) \tag{4.2}$$

pour un indice i_m convenable ($1 \leqq i_m \leqq n$).

Or, dans la suite $\{i_m\}$, un indice doit figurer une infinité de fois, disons

$$i_{m_p} = i \qquad (p = 1, 2, \ldots) . \tag{4.3}$$

Posons

$$y_p = x_{m_p 1} . \tag{4.4}$$

La suite $\{x_{m_p j}\}_{j=1,2,\ldots}$ étant une suite partielle de la suite $\{x_{m_{p-1} j}\}_{j=1,2,\ldots}$, il existe un indice $j_p > 1$ tel que

$$y_p = x_{m_{p-1} j_p} . \tag{4.5}$$

Donc

$$f_i(y_p) - f_i(y_{p-1}) = f_{i_{m_{p-1}}}(x_{m_{p-1}j_p}) - f_{i_{m_{p-1}}}(x_{m_{p-1}1}) \geqq \delta$$

d'après (4.2) à (4.5). Il en résulte $f_i(y_p) \to +\infty$ pour $p \to +\infty$, contrairement à ce que la fonction $f_i \in \mathfrak{S}$ est bornée.

Remarque. Ce lemme peut être déduit d'un théorème de F. P. RAMSEY appartenant à la théorie des graphes (v. [3]) ; en effet, notre démonstration fournit un des résultats de [3].

(Reçu le 16 Juillet 1963)

BIBLIOGRAPHIE

[1] CSÁSZÁR, Á.—CZIPSZER, J.: "Sur des critères généraux d'approximation uniforme." *Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Math.* **6** (1963) 17—26.
[2] NÖBELING, G.—BAUER, H.: "Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen." *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **58** (1955) 54—72.
[3] RAMSEY, F. P.: "On a problem of formal logic." *Proc. London Math. Soc.* (2) **30** (1930) 264—286.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ, СВЯЗАННОМ С РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ

Á. CSÁSZÁR

Резюме

В работе [1] автор и ныне покойный J. CZIPSZER доказали следующую теорему:

Пусть E — произвольное множество, $\mathfrak{S}$ — множество действительных функций, определённых на E. Предположим следующее:

(1) *Функции $f \in \mathfrak{S}$ ограничены;*

(2) *Постоянные принадлежат множеству $\mathfrak{S}$;*

(3) *Если $f \in \mathfrak{S}$, то и $f + C \in \mathfrak{S}$ для любого действительного числа C;*

(4) *Если $f, g \in \mathfrak{S}$, то и* $\max(f, g) \in \mathfrak{S}$, $\min(f, g) \in \mathfrak{S}$.

Предположим, что для ограниченной функции F и для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существуют такие функции $f_1, \ldots, f_n \in \gamma$, что если

(5) *$x, y \in E$ и $F(y) - F(x) \geqq \varepsilon$, то* $\max(f_i(y) - f_i(x)) \geqq \delta$.

Тогда функцию F можно с произвольной точностью равномерно аппроксимировать функциями из множества $\mathfrak{S}$.

Это обобщение одной из теорем работы [2].

В этой работе на примерах показано, что каждое из условий (1), (2) и (4) является в теореме необходимым (по отношению к условию (3) это было доказано в [1]). Однако требование ограниченности функции F можно опустить, поскольку из (1) и из того, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно найти функции $f_i \in \mathfrak{S}$, удовлетворяющие условию (5), уже следует, что и F ограничена.