

ÜBER DIE TOPOLOGISCHE NATUR EINIGER ALLGEMEINER SÄTZE DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

VON
KARL SZILÁRD

In dem vorliegenden Artikel soll gezeigt werden, dass die unten angeführten allgemeinen Sätze der Theorie der elliptischen Funktionen für allgemeinere Klassen der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, als die Klasse der analytischen Funktionen (*mutatis mutandis*) gültig sind.

Diese Sätze sind die folgenden (s. z. B. [4]):

1. Wenn die doppeltperiodische analytische Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z keinen singulären Punkt besitzt, so ist sie eine Konstante.

2. Die doppeltperiodische meromorphe Funktion $f(z)$ vom Grade $r \geq 2$ nimmt in jedem (»kleinsten«) Periodenparallelogramm einen beliebigen gegebenen komplexen Wert genau r -mal an (mehrfache Werte entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.)

3. Eine doppeltperiodische meromorphe Funktion mit einem einzigen einfachen Pol im Periodenparallelogramm kann nicht existieren.

Das Interesse an der Verallgemeinerung solcher Sätze für Klassen nicht-analytischer Funktionen erklärt sich dadurch, dass in den letzten drei Jahrzehnten von mehreren Verfassern komplexwertige Funktionen einer komplexen Veränderlichen untersucht worden waren, deren Realteil und Imaginärteil einem System partieller Differentialgleichungen, welches allgemeiner als das System der Cauchy—Riemannschen Differentialgleichungen ist, genügen (s. [1] und [2]). Es wurden zum Beispiel solche komplexwertige Funktionen $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ untersucht deren Realteil u und Imaginärteil v das Gleichungssystem

$$(1) \quad \begin{aligned} v_y &= au_x + bu_y \\ -v_x &= du_x + cu_y \\ (4ac - (b+d)^2 > 0; \quad a > 0), \end{aligned}$$

won a, b, c und d gegebene stetige Funktionen von x, y, u und v sind, befriedigen (s. [1], wo auch weitere Literatur angeführt wird). Natürlich sind solche Funktionen im Allgemeinen (d. h. für beliebige a, b, c, d , die der obenangeführten Bedingungen genügen) nichtanalytisch. Doch kann man auch für eine beliebige Funktionenklasse die aus allen Lösungen $f = u + iv$ eines bestimmten Gleichungssystems vom Typ (1) besteht, von »ganzen rationalen«, von »ganzen«, »doppeltperiodischen« usw. Funktionen genau so, wie in der klassischen Funktionentheorie sprechen, und sie durch ähnliche Mittel, wie dies im klassischen Falle geschieht, untersuchen. (Die Anführungszeichen

sollen andeuten, dass es sich um Analoga der gleichbenannten Funktionen aus der klassischen Funktionentheorie handelt.) Die Analoga der elliptischen Funktionen in solchen Klassen sind, soweit es dem Verfasser bekannt ist, mit direkten Methoden bisher wenig untersucht worden (vergl. indessen [3]).

Im Folgenden werden wir von den zu betrachtenden Funktionen $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen nur verlangen, dass sie folgende Eigenschaften besitzen sollen (unter gewissen Annahmen über die Koeffizienten a , b , c und d wird es sich hierbei auch um Funktionen $f = u + vi$ handeln, deren Realteil und Imaginärteil einem System vom Typ (1) genügen):

a) Der Definitionsbereich von $f(z)$ ist die ganze endliche z -Ebene mit eventueller Ausnahme von isolierten Punkten, sie ist in jedem Punkte des Definitionsbereiches eindeutig und stetig.

b) $f(z)$ nimmt ihre Werte isoliert an (d. h., wenn $f(z_0) = \zeta_0$ so gibt es um z_0 als Mittelpunkt einen Kreis in dem sonst $f(z) \neq \zeta_0$ ist), oder aber $f(z) \equiv \text{Const.}$

c) Liegt der Punkt z_0 im Innengebiet einer Jordanschen Kurve Γ die selbst, samt Innengebiet aus lauter Punkten des Definitionsbereiches von $f(z)$ besteht, so ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] > 0,$$

wenn z die Kurve Γ im »positiven Sinne« durchläuft (es wird selbstverständlich angenommen, dass auf der Kurve Γ selbst $f(z) \neq f(z_0)$ ist).

d) Es sei z_1 ein Punkt in dem $f(z)$ ($\neq \text{Const.}$) nicht definiert ist und M eine (beliebig gross gewählte) positive Zahl. Dann gibt es um z_1 als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $\rho > 0$, dessen übrigen Punkte, d. h. alle Punkte z mit $0 < |z - z_1| \leq \rho$, zum Definitionsbereich von $f(z)$ gehören und für welche gilt: $|f(z)| \geq M$. Den Punkt z_1 bezeichnen wir als »Pol« der Funktion $f(z)$ d. h. wir postulieren: $f(z)$ soll höchstens Pole als singuläre Stellen besitzen.

e) $f(z)$ ist doppelperiodisch, d. h. es gibt zwei komplexe Zahlen ω_1 und ω_2 ($\neq 0$) deren Quotient ω_1/ω_2 nicht reell ist und für welche gilt: $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$.

Der Kürze halber werden wir Funktionen mit den Eigenschaften a), b), c), d), e) als »doppelperiodische Funktionen der Klasse P « bezeichnen. Es ist bekannt (s. [5]), dass die Funktionen $w = f(z) \neq \text{Const.}$ mit den Eigenschaften a), b) und c) gebietstreue Abbildungen verwirklichen.

Der Vollständigkeit halber soll der bekannte Beweis dieses Satzes hier angeführt werden: Ist $w = f(z)$ eine Funktion mit den Eigenschaften a), b) und c) und ist Γ ein kleiner Kreis mit einem Radius $\rho_0 > 0$ um einen Punkt z_0 ihres Definitionsbereiches (z_0 ist der Mittelpunkt und auf Γ selbst soll $f(z) \neq w_0 = f(z_0)$ sein), so haben wir wegen c) $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - w_0] > 0$, wenn z die Kreislinie Γ im positiven Sinne einmal umläuft. Γ' sei das Bild von Γ in der w -Ebene. Auf Γ' selbst ist, wegen der Stetigkeit von $f(z)$, $\text{Min } |f(z) - w_0| = \rho_1 > 0$. Das bedeutet, dass in der w -Ebene die Kreisscheibe $|w - w_0| \leq \rho_1/2$ keinen Punkt mit der Kurve Γ' gemeinsam hat. Daraus folgt, dass sämtliche w_1 -Werte mit $|w_1 - w_0| < \rho_1/2$ von der Funktion $w = f(z)$ im Kreise $|z - z_0| \leq \rho_0$ angenommen werden. Für alle diese w_1 -Werte gilt nämlich:

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - w_1] = \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - w_0] > 0$$

(s. [5], Seite 655), woraus nach einem bekannten Satze (s. daselbst) folgt, dass es wenigstens ein Punkt z_1 ($|z_0 - z_1| < \rho_0$) mit $f(z_1) = w_1$ existiert. Somit ist die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ in der Umgebung von z_0 gebietstreu, was auch gezeigt werden sollte.

Für die doppeltperiodischen Funktionen der Klasse P beweisen wir nun vier Sätze.

Satz 1. *Es sei $f(z)$ eine doppeltperiodische Funktion der Klasse P . Wenn sie keinen Pol besitzt (d. h. für alle $z \neq \infty$ definiert ist), so ist sie eine Konstante.*

Beweis. Es seien $z = 0, z = \omega_1, z = \omega_2$ und $z_1 = \omega_1 + \omega_2$ die Eckpunkte des Periodenparallelogramms T in dessen Innerem und auf dessen Rande $f(z)$ keinen Pol besitzt und somit stetig ist. Dann ist die Menge \mathfrak{B} der Bildpunkte $w = f(z); z \in T$, beschränkt und abgeschlossen. Die Menge \mathfrak{B} ist wegen der doppelten Periodizität von $f(z)$ überhaupt der Menge aller Bildpunkte $w = f(z)$ identisch, wenn z alle endlichen Werte in der z -Ebene annimmt. Es sei nun $f(z) \neq \text{Const.}$ Dann ist die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ gebietstreu. w_0 sei ein Randpunkt von \mathfrak{B} (\mathfrak{B} besitzt Randpunkte, da sie beschränkt und abgeschlossen ist) und es sei z_0 ein w_0 entsprechender Wert in der z -Ebene [$w_0 = f(z_0)$, — natürlich kann es mehrere solche z_0 -Werte geben]. Da $w_0 = f(z_0)$ ein Randpunkt ist, kann die Abbildung $z \rightarrow w$ im Punkte z_0 nicht gebietstreu sein und somit kann auch $f(z)$ nicht $\neq \text{Const.}$ sein. Die Annahme $f(z) \neq \text{Const.}$ führt also zu einem Widerspruch, daher muss $f(z) \equiv \text{Const.}$ sein, w. z. b. w.

Genau so, wie der Satz 1 wird folgender Satz 1a bewiesen.

Satz 1a. *Die doppeltperiodische Funktion $f(z) \neq \text{Const.}$ der Klasse P nimmt alle komplexen Werte w an.*

Um den Beweis auszuführen braucht man nur zu bemerken, dass wenn es einen komplexen Wert w_1 gäbe, der von $f(z)$ nicht angenommen worden wäre, so müsste die Menge der Bildpunkte mindestens einen Randpunkt w_0 besitzen und weiter (d. h. von der Stelle des Nachweises der Existenz eines Randpunktes an) kann der Beweis des Satzes 1 wörtlich wiederholt werden.

Satz 2. *Es sei R die Anzahl der Pole im Periodenparallelogramm der doppeltperiodischen Funktion $f(z)$ der Klasse P und w_0 sei eine beliebige komplexe Zahl. Dann nimmt $f(z)$ im Periodenparallelogramme den Wert w_0 genau R -mal an (mehrfache Werte entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt s. [5], Seite 258).*

Bevor wir zum Beweise übergehen soll der Begriff des »kleinsten« Periodenparallelogramms näher beschrieben werden (s. [4], Seite 139). Zu einem Periodenparallelogramm T mit den Ecken $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$ zählen wir alle inneren Punkte des Parallelogramms und und ausserdem die Randpunkte $z_0, z_0 + t\omega_1, z_0 + t\omega_2$, wo $0 < t < 1$ ist (zum Beispiel die Eckpunkte $z_0 + \omega_1$ und $z_0 + \omega_2$ werden nicht mehr zum Periodenparallelogramm gezählt). Dadurch wird erreicht, dass »in einem Periodenparallelogramm« von den abzählbar unendlich vielen Punkten $z_1 \pm n\omega_1 \pm m\omega_2$ (z_0 ist ein fixierter Punkt der z -Ebene; $n, m = 0, 1, 2, \dots$) genau einer liegen wird, den wir als Repräsentant dieser Punktmenge im Periodenparallelogramm T betrachten werden. Zum Beispiel ist z_1 ein Pol der Funktion $f(z)$ in T , dann sind die Punkte $z_1 \pm n\omega_1 \pm m\omega_2$ auch Pole von $f(z)$, jedoch nur z_1 von ihnen wird zum Periodenparallelogramm T gezählt. In diesem Sinne merken wir uns: Die Funktion $f(z)$ hat in einem Periodenparallelogramm endlich viele Pole (was laut a) leicht zu zeigen ist). Sie liegen im Inneren von

T , oder aber auf den Seiten $z_0 + t_1 \omega_1$; ($0 \leq t_1 < 1$) und $z_0 + t_2 \omega_2$; ($0 \leq t_2 < 1$). Diejenigen, welche im Inneren von T liegen, bilden eine endliche Punktmenge, welche vom Rande von T einen positiven Abstand ρ hat und es ist leicht einzusehen, dass man durch Verschiebung des Systems der Periodenparallelogramme um weniger als ρ zu einem neuen System der Periodenparallelogramme gelangen kann in dem alle Pole von $f(z)$ innere Punkte der Periodenparallelogramme sind. Dementsprechend nehmen wir auch für das Weitere an, dass alle Pole von $f(z)$ innere Punkte der Periodenparallelogramme sind. Auch können wir uns mit Hilfe der Eigenschaften a) und d) klarmachen, dass $f(z)$ in einem Periodenparallelogramm einen komplexen Wert w_0 nur endlich oft annimmt. Fixieren wir diesen Wert, so werden wir für den nächstfolgenden Beweis annehmen, dass die w_0 -Stellen von $f(z)$ auch im Inneren von T liegen.

Den Satz 2 beweisen wir nun folgendermassen:

Es sei R die Anzahl der Pole und N die Anzahl der w_0 -Stellen von $f(z)$ im Periodenparallelogramm T . (Auf dem Rande gibt es keine Pole und keine w_0 -Stellen.) Nach einem für Funktionen der Klasse P gültigen Satze ist (s. [5], Seite 658)

$$\frac{1}{2\pi} \text{Var}_T \arg [f(z) - w_0] = N - R$$

wo durch T der im positiven Sinne durch z einmal umlaufene Rand des Periodenparallelogramms bezeichnet wird (selbstverständlich werden hier zum Rande alle vier Seiten des Parallelogramms hinzugerechnet). Die Zahl $(N-R)$ ist aber gleich Null, da sich die Änderungen des Argumentes von $[f(z) - w_0]$ beim Durchlaufen der einander gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms T wegen der Periodizität von $f(z)$, gegenseitig aufheben (werden doch die einander gegenüber liegenden Seiten durch z in entgegengesetzten Richtungen durchgelaufen). Somit ist $N = R$, w. z. b. w.

Satz 3. *Es kann keine doppeltperiodische Funktion der Klasse P mit einem einzigen einfachen Pol innerhalb des Periodenparallelogramms existieren.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $f(z)$ im Periodenparallelogramm T einen einzigen einfachen Pol besitzt. Wie vorhin dürfen wir annehmen, dass dieser Pol ein innerer Punkt von T ist. Nach dem vorigen Satze wird jeder komplexe Wert w_1 von der Funktion $f(z)$ in T genau einmal angenommen. Daraus folgt, dass das Bild der Seite $(z_0 + t_1 \omega_1)$, wo $0 \leq t_1 \leq 1$ in der w -Ebene eine einfache Jordan'sche Kurve \mathfrak{S}_1 ist, welche ein beschränktes Innengebiet besitzt. Genau so ist das Bild der Seite $(z_0 + t_2 \omega_2)$, wo $0 \leq t_2 \leq 1$ auch eine einfache Jordansche Kurve \mathfrak{S}_2 welche mit \mathfrak{S}_1 einen gemeinsamen Punkt hat — nämlich den Punkt $w_0 = f(z)$. Die beiden Kurven \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 müssen aber wenigstens einen zweiten gemeinsamen Punkt haben. Betrachten wir nämlich eine genügend kleine kreisförmige Umgebung \mathfrak{Q} des Punktes z_0 (der Punkt z_0 ist der Mittelpunkt von \mathfrak{Q}), so ist das durch die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ entstandene Bild \mathfrak{Q}_1 von \mathfrak{Q} ein durch eine Jordansche Kurve begrenztes Gebiet in der w -Ebene zu dem w_0 als innerer Punkt gehört. Die beiden Kurven \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 schneiden sich in w_0 . \mathfrak{S}_1 teilt das Gebiet \mathfrak{Q}_1 in zwei Teile, der eine Teil gehört zum Innengebiete, der andere zum Aussengebiete der Jordanschen Kurve \mathfrak{S}_1 . Die Kurve \mathfrak{S}_2 verbindet Punkte dieser beiden Teile innerhalb von \mathfrak{Q}_1 , doch besitzt sie, falls der Kreis \mathfrak{Q} genügend klein gewählt wurde, Randpunkte von \mathfrak{Q}_1 sowohl im Innengebiete, als auch im Aussengebiete von \mathfrak{S}_1 , welche

sie miteinander verbindet ohne dabei sonst das Gebiet \mathcal{L}_1 zu treffen. Nach dem Jordanschen Kurvensatze muss also \mathcal{S}_2 die Kurve \mathcal{S}_1 wenigstens in einem Punkte ausserhalb \mathcal{L}_1 schneiden, und dieser Punkt w_1 kann also mit w_0 nicht identisch sein. w_1 muss sowohl einem Punkte $(z_0 + t_1\omega_1)$ als auch einem Punkte $(z_0 + t_2\omega_2)$ entsprechen ($0 < t_1 < 1$ und $0 < t_2 < 1$) und wir gelangen zu dem Widerspruch dass $f(z)$ einen Wert w_1 in T nicht einmal, sondern mindestens zweimal annehmen muss und die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ in T nicht umkehrbar eindeutig sein kann, w. z. b. w.

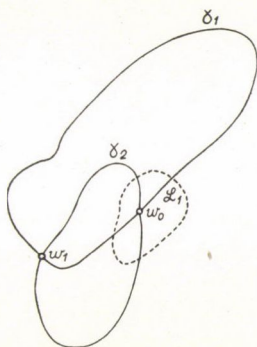


Fig. 1.

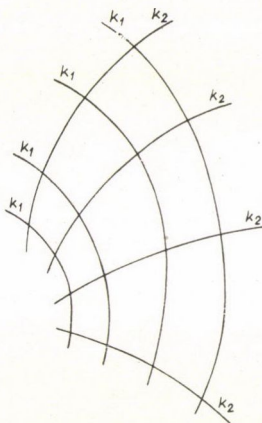


Fig. 2.

Die angeführten Sätze können noch weiter verallgemeinert werden, denn die Funktionen $f(z)$ brauchen gar nicht streng doppelperiodisch zu sein, es genügt, wenn sie in dem unten angegebenen Sinne automorf sind. Verfolgt man aufmerksam die Beweise dieser Sätze, so konstatiert man, dass statt der doppelten Periodizität, d. h. statt der Eigenschaft e) es genügen würde den betrachteten Funktionen $f(z)$ folgende Eigenschaft e') zuzuschreiben:

e') Es sollen zwei Kurvenscharen (die Kurven k_1 und k_2 auf der Figur 2) existieren, die ein krummliniges Gitter bilden, d. h. ein System von zwei Kurvenscharen durch welche die ganze endliche z -Ebene, mit eventueller Ausnahme von isolierten Punkten,¹ in krummlinige »Vierecke« aufgeteilt wird. Wenn T_1 und T_2 zwei solche »Vierecke« sind so soll eine topologische Abbildung $T_1 \rightarrow T_2$ existieren derart, dass die Funktion $f(z)$ in entsprechenden Punkten denselben Wert annimmt. Insbesondere soll $f(z)$ auf den »gegenüberliegenden Seiten« eines solchen »Vierecks« den gleichen Wertevorrat besitzen, wobei die Mengen der $w = f(z)$ -Werte auf beiden Seiten gleichgeordnet sind, wenn z diese Seiten, ausgehend von Ecken auf einer der Seiten des anderen Seitenpaares, durchläuft. (Mehrfach angenommene w -Werte sollen dabei entsprechend mehrfach gezählt werden.) Auch soll es möglich sein dieses Gitter stetig so zu deformieren, dass seine eben geschilderte Eigenschaft

¹ Bemerkung: Diese isolierten Punkte sind singuläre Punkte in Bezug auf das Gitter und auch singuläre Punkte der Funktion $f(z)$, jedoch keine Pole. In der Formulierung der Eigenschaft d) muss dann unter z_1 ein von diesen singulären Punkten verschiedener Punkt verstanden werden.

der Funktion $f(z)$ gegenüber erhalten bleibt. (Z. B. soll eine solche Deformation einer Verschiebung topologisch äquivalent sein.)

Durch Wiederlesen der Beweise der Sätze 1, 1a, 2 und 3 kann man sich überzeugen, dass sie auch für Funktionen $f(z)$ mit den Eigenschaften a), b), c), d), e') glütig sind (wo also der Begriff »doppeltperiodisch« im Sinne der Eigenschaft e') abgeändert werden muss).

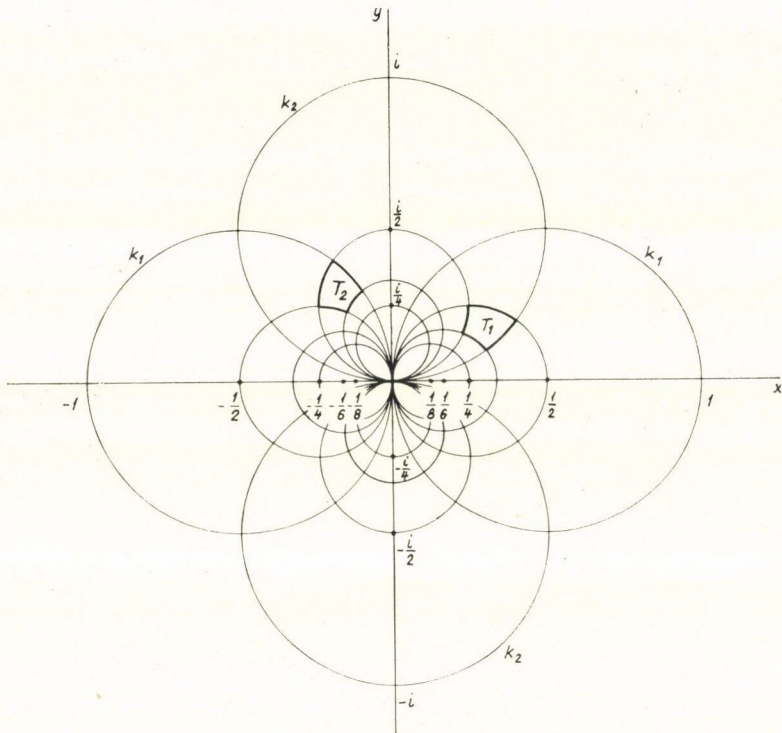


Fig. 3.

Funktionen mit den Eigenschaften a), b), c), d) und e') existieren auch in der Klasse der analytischen Funktionen. Z. B. die Funktion $f(z) = F\left(\frac{1}{z}\right)$, wobei $F(\zeta)$ eine beliebige elliptische Funktion der komplexen Veränderlichen ζ ist, ist eine solche. Wenn wir hier den denkbar einfachsten Fall betrachten und $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = i$ setzen, so sind die Kurven k_1 die Kreise (s. Fig. 3):

$$\left(x - \frac{1}{2n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \text{ und die Gerade } x = 0; (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Die Kurven k_2 sind dann die zu den k_1 orthogonalen Kreise:

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2n}\right)^2 = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \text{ und die Gerade } y = 0; (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Man kann natürlich $f(z)$ wiederum in eine elliptische Funktion zurücktransformieren, doch betreffs der Beweismethode der Sätze 1, 1a, 2 und 3 ist es gut zu wissen, dass es für ihre Beweise genügt nur von den erwähnten topologischen Eigenschaften Gebrauch zu machen.

(Eingegangen: 3. September, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ШНАВАТ, В. В.: "Über Abbildungen die durch Lösungen von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung verwirklicht werden". *Suomalaisen Tiedekatemia Toimituksia. I. Mathematica* **251/8** (1958).
- [2] ЛАВРЕНТЬЕВ, М. А.: "Общая теория квазиконформных отображений плоских областей." *Матем. сб.* **21** (63), (1947) 285—320.
- [3] ДАНИЛЮК, И. И.: "Об автоморфных квазианалитических функциях на поверхностях". *Матем. сб.* **41** (83), (1957) 97—104.
- [4] HURWITZ, A.—COURANT, R.: *Funktionentheorie*. Berlin 1922 (Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Bd. III.).
- [5] SZILÁRD, K.: "Über die Grundlagen der Funktionentheorie". *Math. Zeitschrift* **26** (1927) 653—671.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. SZILÁRD

Резюме

Автор показывает, что некоторые общие теоремы теории эллиптических функций могут быть доказаны топологическими средствами и поэтому они остаются в силе и для некоторых классов неаналитических функций одного комплексного переменного (для которых топологические свойства аналитических функций сохраняются).