MÁGNESES DIPÓLUS FORGÓ MOZGÁSA IDŐBEN LASSAN VÁLTOZÓ MÁGNESES TÉRBEN

BÉKÉSSY ANDRÁS és JÁNOSSY LAJOS[1]

1. Legyen egy atom mágneses momentuma

$$M = \mu_B \cdot s, \tag{1}$$

ahol μ_B a Bohr-féle magneton és s a mágnesezés irányába mutató egységvektor.

H térerősségű mágneses térben az s vektor precesszió jellegű mozgást végez, amelyet nem-relativisztikus közelítésben az

$$\dot{s} = \frac{2}{\hbar} \mu_B (s \times H) \tag{2}$$

mozgásegyenlet ír le, hacsak a mágneses térnek és az atom mágnesezettségének inhomogén voltát figyelmen kívül hagyjuk; az evvel járó effektusokat akkor tudnánk figyelembe venni, ha (2) helyett a Pauli-egyenleteknek megfelelő hidrodinamikai egyenleteket választanánk a tárgyalás alapjául.

Ha H állandó, vagy ha változik is időben, de rögzített irányba mutat, akkor (2) megoldása azonnal felírható; alkalmasan választott koordinátarendszerben $H_x = H_y = 0$, $H_z = H(t)$, és

$$\begin{aligned} s_x &= \sin\Theta \cdot \cos\psi, \\ s_y &= -\sin\Theta \cdot \sin\psi, \\ s_z &= \cos\Theta, \\ \psi &= \frac{2}{\hbar}\mu_B \cdot \int_{t_0}^{t} H(t')\,dt', \end{aligned} \tag{3}$$

ahol t_0 és Θ integrációs állandók. (Csak két tetszőleges integrálási állandó van, mert feltettük, hogy s egységvektor.) A (3) megoldás mutatja, hogy s a H térerősség irányával állandó szöget zár be, — akár változik H az időben, akár nem —, a precesszió szögsebessége pedig

$$\omega(t) = \dot{\psi} = \frac{2}{\hbar}\mu_B H(t).$$

2. Ha egy atom inhomogén mágneses téren halad át, akkor mágnesezési vektorának precesszióját (2) írja le, ahol H most az atom környezetében ural-

[1] Központi Fizikai Kutató Intézet

kodó mágneses térerősséget jelenti. Miközben az atom a téren áthalad, a reá ható erő irány és nagyság szerint is változik. Ha az erő csak nagyság szerint változik, de irány szerint nem, akkor, mint a (3) egyenletrendszer mutatja, a precessziós kúp nyílásszöge változatlan marad. Általában azonban fel kell tételeznünk, hogy a mágneses térerő az atom pályája mentén irányát is változtatja, és elemezni akarjuk a precessziónak a tér irányának változásával járó módosulását is. Meg kell tehát oldani a (2) egyenletet — legalább is közelítőleg — mind nagyság, mind irány szerint változó, az idő függvényeként adott $\boldsymbol{H}$ érték mellett.

Vezessünk be evégett egy speciális koordinátarendszert a következőképpen. Legyen $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/H$, legyen tehát $\boldsymbol{h}$ a mágneses térerősség (pillanatnyi) irányába mutató egységvektor, és legyenek az $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ orthogonális rendszert alkotó egységvektorok az alábbi egyenletekkel értelmezve:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{h}\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = \dot{\boldsymbol{h}}/\dot{h}\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2\,, \tag{4}$$

ahol $\dot{h} = |\,\dot{\boldsymbol{h}}\,|$. Az (1) vektoregyenletet bontsuk komponensekre az $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ rendszerben, legyen tehát

$$s_k = \boldsymbol{s}\,\boldsymbol{e}_k\,, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{5}$$

és ekkor (2) szerint az s_k komponensekre a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{h}\, s_2\,, \\ \dot{s}_2 &= K\, s_3 - \dot{h} s_1\,, \\ \dot{s}_3 &= -\, K\, s_2\,, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol

$$K = \frac{2}{\hbar}\, \mu_B\, H(t) + \frac{\ddot{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{h} \times \dot{\boldsymbol{h}})}{\dot{\boldsymbol{h}}^2}\,, \quad H(t) = |\,\boldsymbol{H}\,|\,, \tag{7}$$

és $\dot{h} = |\,\dot{\boldsymbol{h}}\,|$, mint előbb.

Vezessük be az

$$u = \int\limits_0^t K(t')\, d\,t'$$

mennyiséget új változóként és jelöljük vesszővel az u szerinti differenciálást. Az u független változóval a (6) rendszer átmegy az

$$\left\{ \begin{aligned} s_1' &= k\, s_2\,, \\ s_2' &= s_3 - k\, s_1 \\ s_3' &= -\, s_2 \end{aligned} \right. \tag{8}$$

rendszerbe, ahol

$$k = \frac{\dot{h}}{K} = \left|\, \frac{d\boldsymbol{h}}{du} \,\right|. \tag{9}$$

Ha a mágneses tér egyáltalán nem változtatja irányát, akkor $\dot{h} = 0$, és (7) szerint $K = \frac{2}{\hbar}\, \mu_B H(t)$, továbbá (3) szerint u az a szög, amellyel a preceszszió folyamán a mágneses dipólus a kezdő időponttól t-ig elfordult. Abban az esetben, ha a tér iránya változik, de ez a változás lassú a precesszióhoz képest, az u mennyiség még jó közelítéssel méri ezt a szöget. A dimenziótlan (szám dimenziójú) k mennyiség tehát (9) szerint a mágneses tér $\boldsymbol{h}$ irányának elfordulását méri a precessziós szögelforduláshoz képest (közelítőleg), és ezért gyakorlatilag feltételezhető, hogy $k \ll 1$.

3. Ha $k' = 0$, azaz ha a mágneses tér nem fordul el, vagypedig K-val arányos szögsebességgel fordul el, akkor a (7) rendszer megoldása

$$s_1 = -\,k\,a\cos\psi + b\,, \tag{9a}$$

$$s_2 = a\,\omega\sin\psi\,, \tag{9b}$$

$$s_3 = a\cos\psi + k\,b\,, \tag{9c}$$

ahol

$$\omega = \sqrt{1+k^2}\,, \quad \psi = \omega\,u + \varphi\,, \tag{10}$$

az a, b, φ mennyiségek pedig integrálási állandók, amelyek között az

$$\omega^2(a^2+b^2) = 1 \tag{11}$$

összefüggés áll fenn, ha $\boldsymbol{s}$ egységvektor.

Könnyen kiszámítható, hogy a precesszió tengelye az $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$ síkban fekszik és az $\boldsymbol{e}_1$ iránnyal olyan szöget zár be, amelynek szinusza k/ω, a precessziós kúp nyílásszögének szinusza pedig éppen $a\omega$. Ha $k \ll 1$, akkor (9) és az éppen mondottak szerint a precesszió olyan tengely körül megy végbe, amely kissé elhajlik a mágneses tér $\boldsymbol{e}_1$ irányától; a precessziós kúp ugyan *utána fordul* a mágneses tér irányának, *de nyílásszöge állandó marad.*

Plauzibilis ezek után feltételezni, hogy a precesszió jellege akkor sem változik lényegesen, ha k lassan ugyan, de változik, tehát $k' \neq 0$, $k' \ll 1$. Ezt a következőkben ismertetett meggondolások támasztják alá.

4. A (8) rendszer harmadik egyenletének differenciálása útján az $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \text{konst.} = 1$ integrál felhasználásával s_3-ra az

$$s_3'' + s_3 = k\sqrt{1 - s_3^2 - (s_3')^2} \tag{12}$$

egyenlet adódik, ahol a jobboldalon álló négyzetgyököt s_1 előjelével egyezőnek kell választani. (Hacsak a kezdeti $s_1(0)$ nincs nagyon közel a nulla értékhez, akkor feltételezhető, hogy s_1 hosszú ideig tartja előjelét.)

Mivel $k \ll 1$, a (12) egyenlet kicsiny, nem-lineáris taggal perturbált rezgésegyenletnek tekinthető, és így alkalmazhatjuk rá N. M. Krülov és N. N. Bogoljubov módszerének azt a válfaját, amelyet Ju. A. Mitropoljszkij dolgozott ki és írt le ([1], 107—115. o.).

Legyen

$$k = \varepsilon\,k(\varepsilon\,u)$$

alakú, ahol $\varepsilon \ll 1$. A k mennyiség ilyen alakban való felvételével nemcsak azt kötjük ki, hogy $k \ll 1$, hanem azt is, hogy $k' \ll k$. A megoldást

$$s_3 = a(u)\cos\psi(u) + \varepsilon\,r_1(\varepsilon\,u, a, \psi) + \varepsilon^2 r_2(\varepsilon\,u, a, \psi) + \ldots$$

alakban keressük, ahol a és ψ az

$$a' = \varepsilon A_1(\varepsilon u, a) + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon u, a) + \dots$$
$$\psi' = 1 + \varepsilon B_1(\varepsilon u, a) + \varepsilon^2 B_2(\varepsilon u, a) + \dots$$

egyenletnek tegyenek eleget, és kikötjük, hogy a ψ-ben periodikus $r_1, r_2, \dots$ függvények Fourier-sorában az alapharmonkus nulla amplitúdójú, másszóval, hogy s_3-ban az alapharmonikus teljes amplitúdója $a(u)$.

A számolás részleteit itt mellőzzük és ismét a már idézett [1] munkára utalunk. Az-eredmény az, hogy

$$A_1 = A_2 = 0, \qquad B_1 = 0, \qquad B_2 = \frac{1}{2} k^2(0),$$

tehát még második közelítésben is (ε^3 nagyságrendű tagoktól eltekintve) $a = a(u_0) =$ konst., a precesszió kúpszöge nem változik, (12) teljes megoldása pedig ebben a közelítésben azonos a (9c) egyenlettel (ε^3 nagyságrendtől eltekintve).

5. Annak bizonyítására, hogy a precesszió kúpszöge hosszú időn keresztül nem változhat lényegesen, szolgál még az alábbi meggondolás.

A (8) egyenletrendszert hozzuk *normálalakra*, vagyis s_1, s_2, s_3 helyett vezessünk be olyan új változókat, amelyeknek változása (az u szerinti deriváltja) kicsiny. Ilyen mennyiség a (9) egyenletekben szereplő a és φ. Fogjuk fel a (9) egyenleteket transzformációs egyenleteknek, vagyis tegyük fel, hogy a és ψ függnek u-tól. A függést (8) szerint a következő egyenletek fejezik ki:

$$(13) \qquad \begin{cases} (a\,\omega)' = -\dfrac{k'b}{\omega}\cos\psi, \\[2ex] \psi' = \omega + \dfrac{k'b}{a\,\omega^2}\sin\psi, \end{cases}$$

$\omega^2(a^2 + b^2) = 1$, $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ mint előbb.

Egyszerűsítésül legyen

$$a\,\omega = \cos\lambda,$$
$$k = \operatorname{tg}\mu,$$

így

$$\omega = \frac{1}{\cos\mu}, \qquad b = \frac{1}{\omega}\sin\lambda = \sin\lambda\cos\mu$$

és (13)-ból

$$(14) \qquad \begin{cases} \lambda' = \mu'\cos\psi \\ \psi' = \omega + \mu'\operatorname{tg}\lambda\sin\psi. \end{cases}$$

Feltételezve, hogy $\mu' = (\operatorname{arc\,tg} k)'$ kicsiny, a (14) egyenletek mutatják, hogy a λ és a

$$(15) \qquad \varphi = \psi - \int_0^u \omega\, du' = \psi - \Omega(u)$$

változó deriváltja kicsiny:

$$(16)\qquad \begin{cases} \lambda' = \mu' \cos \psi \\ \varphi' = \mu' \operatorname{tg} \lambda \sin \psi . \end{cases}$$

Ezek tehát normálegyenletek a fenti értelemben.

(14) szerint $\psi' \sim \omega$ és mivel $\omega \sim 1$, a ψ változó kb. arányos u-val, ennélfogva a (14) első egyenletének integrálásából adódó

$$\lambda(u) - \lambda(0) = \int_0^u \mu'(x) \cos \psi(x)\, dx$$

egyenlőségből arra következtethetünk, hogy

$$|\lambda(u) - \lambda(0)| \ll |\mu(u) - \mu(0)|,$$

mivel az alatt az idő alatt, amíg μ lényegesen megváltozik, cos ψ-nek igen sok periódusa lezajlik.

Ez a következtetés természetesen nem állja meg helyét, ha a precesszió periódusa és μ között rezonancia van, ha tehát pl.

$$\mu'(u) \sim \cos \psi(u) .$$

6. Tegyük fel most, hogy a precesszió és a mágneses tér változása között olyan jellegű rezonancia van, amelynek következtében az

$$\frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u)\, e^{i\Omega(u)}\, du$$

integrál (ahol $\Omega(u) = \int_0^u \omega(u)\, du$, mint előbb) nagy u értékekre nem elhanyagolhatóan kicsiny. Ebben az esetben a (16) normálegyenletek megoldása a

$$(17)\qquad \begin{aligned} \bar{\lambda}' &= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \cos\bigl(\bar{\varphi} + \Omega(u)\bigr)\, du \\ \bar{\varphi} &= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \operatorname{tg} \bar{\lambda} \sin\bigl(\bar{\varphi} + \Omega(u)\bigr)\, du \end{aligned}$$

egyenletek megoldásához áll közel (lásd [1], 327—332. o.) az integrálás u szerint itt állandó $\bar{\varphi}$ és $\bar{\lambda}$ mellett értendő.

A

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \varrho \cos \alpha = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \cos \Omega(u)\, du \\ \beta_2 &= \varrho \sin \alpha = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \sin \Omega(u)\, du \end{aligned} \qquad (\varrho \geqq 0)$$

jelölésekkel (17)-ből

$$\bar{\lambda}' = \beta_1 \cos \bar{\varphi} - \beta_2 \sin \bar{\varphi} = \varrho \sin (\bar{\varphi} + \alpha)\,, \tag{18a}$$

$$\bar{\varphi} = \operatorname{tg} \bar{\lambda}(\beta_1 \sin \bar{\varphi} + \beta_2 \cos \bar{\varphi}) = \varrho \operatorname{tg} \bar{\lambda} \sin (\bar{\varphi} + \alpha)\,. \tag{18b}$$

E rendszernek egy integrálja

$$C = \sin (\bar{\varphi} + \alpha) \cos \bar{\lambda}\,,$$

ennélfogva a (18a) egyenlet felhasználásával

$$\varrho u = \int\limits_{\bar{\lambda}(0)}^{\bar{\lambda}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x - C^2}}\,,$$

vagyis

$$\sin \bar{\lambda} = \sqrt{1 - C^2} \sin (\varrho u + \beta)\,, \tag{19}$$

ahol a β integrációs állandó;

$$\sin \bar{\lambda}(0) = \sqrt{1 - C^2} \sin \beta\,.$$

A ϱ mennyiség természetesen igen kicsiny, úgyhogy $\sin \bar{\lambda}$ a $\sin \bar{\lambda}(o)$ kezdőértéktől kiindulva igen lassan ingadozik $-\sqrt{1 - C^2}$ és $\sqrt{1 - C^2}$ között, $\cos \bar{\lambda}$ pedig C és 1 között. Azonban $\cos \bar{\lambda} \sim a\omega$, eredményünk tehát azt jelenti, hogy az $a\omega$ mennyiséggel jellemzett precessziós nyílásszög általában még a mondott típusú rezonancia esetében sem csökken le tartósan nullára, hanem a kezdeti $a(0)$ értékből kiindulva igen lassan ingadozik a nulla és egy a kezdeti feltételektől függő határszög között.

(Beérkezett: 1963. június 26.)

IRODALOM

[1] Боголюбов, Н. Н.—Митропольский, Ю. А.: *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* 2е издание, Москва, 1958.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ВРЕМЕНИ

А. BÉKÉSSY и L. JÁNOSSY

Резюме

Статья посвящена проблеме вращения свободного магнитного диполя в магнитном поле, медленно изменяющемся по времени.

Пусть $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор в направлении оси диполя, тогда уравнение движения имеет вид:

$$\dot{\boldsymbol{s}} = \frac{\mu_B}{\hbar} \big(\boldsymbol{s}(t) \times \boldsymbol{H}(t)\big)\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{H}(t)$ означает напряженность магнитного поля, а μ_B — константа. В первом приближении вращающийся диполь можно считать классической моделью атома, движущегося в негомогенном магнитном поле, в этом случае μ_B — магнетон Бора, а $\boldsymbol{H}$ — средняя величина силы магнитного поля в непосредственной близости к атому.

Если абсолютная величина $\boldsymbol{H}$ медленно изменяется во времени, а её направление остаётся неизменным, тогда уравнение (1) имеет простое решение. Как известно, при вращении вокруг вектора $\boldsymbol{H}$ с переменной угловой скоростью диполь описывает прецессионный конус, при этом угол раствора конуса остается постоянным.

Даже тогда, если направление $\boldsymbol{H}$ изменяется, имеется важный специальный случай в котором решение пишется в явном виде с тем результатом, что ось прецессионного конуса вращается вместе с магнитным полем, но угол раствора конуса остается постоянным —, именно, введем систему координат, определенную следующим образом:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|}\,; \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\dot{\boldsymbol{h}}}{|\dot{\boldsymbol{h}}|}\,; \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2\,. \tag{2}$$

В системе координат (2) уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_1}{du} = k(u)\cdot s_2\,, \\[2mm] \dfrac{ds_2}{du} = s_3 - k(u)\cdot s_1\,, \\[2mm] \dfrac{ds_3}{du} = -\, s_2\,, \end{cases} \tag{3}$$

где $s_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \mathbf{s}\ (j = 1, 2, 3)\,;\ k = \left|\dfrac{d\boldsymbol{h}}{du}\right|$ и где

$$u = \int_0^t \left(\mu_B\,|\boldsymbol{H}(t')\,| + \frac{\boldsymbol{h}(\dot{\boldsymbol{h}}\times\ddot{\boldsymbol{h}})}{\dot{\boldsymbol{h}}}\right) dt',$$

новая независимая переменная. Если $k(u) = \text{const.}$, тогда решение системы (3) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} s_1 = -\,ka\cos\psi + b\,, \\ s_2 = a\,\omega\sin\psi\,, \\ s_3 = a\cos\psi + kb\,, \end{cases} \qquad (\psi = \omega\,u + \varphi)\,, \tag{4}$$

где $\omega = \sqrt{1+k^2}$ и a, b, φ постоянные, между которыми имеется соотношение, $\omega^2(a^2+b^2) = 1$ показывающее, что вращение происходит под постоянным углом наклона вокруг оси, отклоняющейся от направления $\boldsymbol{e}_1$ (т. е. от направления $\boldsymbol{H}$).

Главный результат работы — установление того, что уравнения (4) *приблизительно* верны и тогда, если $k(u)$ меняется, при условии, что сама функция $k(u)$ и её производная $\frac{dk}{du} = k'$ малы по сравнению с 1, — исключая случай, когда между угловой скоростью прецессии и изменением силы магнитного поля наблюдается сильный резонанс. Из определения ясно, что величина $k(u)$ — если она мала — приближенно выражает соотношение между поворотом поля и угловой скоростью процессии. В силу этого в большинстве важнейших случаев $k(u) \ll 1$ или $k'(u) \ll 1$.

Для решения системы дифференциальных уравнений (3) использовался метод Н. М. Крылова—Н. Н. Боголюбова—Ю. А. Митропольского [1].

ROTATIONAL MOTION OF A FREE MAGNETIC DIPOLE IN A MAGNETIC FIELD SLOWLY VARYING IN TIME

by

A. BÉKÉSSY and L. JÁNOSSY

Abstract

The paper deals with the problem of rotational motion of a free magnetic dipole in a field varying slowly in time.

Let $\boldsymbol{s}$ be the unit vector pointing into the direction of the dipole axis, the equation describing the motion of $\boldsymbol{s}$ in non-relativistic approximation is then the following:

$$\dot{\boldsymbol{s}} = \frac{2\pi}{\hbar} \mu_B (\boldsymbol{s}(t) \times \boldsymbol{H}(t)), \tag{1}$$

where $\boldsymbol{H}(t)$ denotes the magnetic field strength and $\mu_B = \text{const}$. In a first approximation, the rotating dipole may be regarded as a classical modell of an atom moving through an inhomogenous magnetic field, in which case μ_B denotes the Bohr magneton, and $\boldsymbol{H}(t)$ is the average of the field strength in the close vicinity of the atom.

If the absolute value of $\boldsymbol{H}$ varies with time, but its direction remains fixed, equation (1) is easily solvable. As it is well known, the dipole describes a precession cone round $\boldsymbol{H}$ with varying angular frequency, the opening angle of the cone, however, remains strictly constant.

Even if the direction of $\boldsymbol{H}$ varies, there is an important particular case, in which the solution may be exactly written down with the result that the cone of the precession turns round with the magnetic field, but with constant opening angle. Namely, let us introduce a system of coordinates determined by the unit vectors $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ defined as follows:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\dot{\boldsymbol{h}}}{|\dot{\boldsymbol{h}}|}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 . \tag{2}$$

In the system (2) of coordinates the equations of motion derivable from (1) are

$$
\begin{cases} \dfrac{ds_1}{du} = k(u) \cdot s_2 , \\ \dfrac{ds_2}{du} = s_3 - k(u) \cdot s_1 , \\ \dfrac{ds_3}{du} = - s_2 , \end{cases} \tag{3}
$$

where $s_j = \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{s}$, $(j = 1, 2, 3)$, $k = \left| \dfrac{d\boldsymbol{h}}{du} \right|$, with

$$
u = \int_0^t \left[\frac{2\pi}{\hbar} \mu_B \, | \boldsymbol{H}((t')| + \frac{\boldsymbol{h}(\dot{\boldsymbol{h}} \times \ddot{\boldsymbol{h}})}{\dot{\boldsymbol{h}}_2} \right] dt'
$$

as a new independent variable. Now, if $k(u) = \text{const.}$, the solution of the system (3) is

$$
\begin{cases} s_1 = - k \cdot a \cdot \cos \psi + b , \\ s_2 = a \, \omega \sin \psi', \\ s_3 = a \cos \psi + kb , \end{cases} \qquad \psi = \omega u + \varphi \tag{4}
$$

where $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ and a, b, φ are constants with $\omega^2(a^2 + b^2) = 1$, showing that the precession takes place with a constant opening angle around an axis inclined to the direction of $\boldsymbol{e}_1$ (i.e. of $\boldsymbol{H}(t)$).

The main result of the paper is that the equations (4) are approximately valid even if $k(u)$ varies with u, supposed $k(u)$ itself and its derivative dk/du are small compared to 1, — except of cases of strong resonance between the angular velocity of the precession and the changes of the magnetic field. It is clear from the definitions that the quantity $k(u)$ — supposed to be small — expresses the rate of turning of the field to the angular velocity of precession, approximately. Therefore the conditions $k(u) \ll 1$ and $k'(u) \ll 1$ are fulfilled in most practical cases.

The mathematical methods used for analysing (3) were that of N. M. KRYLOV, N. BOGOLYUBOV and of YU. A. MITROPOLSKY, described e.g. in [1].