A SZMIRNOV-TÉTEL ALKALMAZÁSA EGY RAKTÁROZÁSI PROBLÉMÁRA

ZIERMANN MARGIT

Bevezetés

A termelő vállalatok zavartalan működéséhez szükséges minimális készletek mennyiségének a meghatározása fontos népgazdasági érdek. A gazdasági szakembereket, közgazdászokat és matematikusokat egyaránt foglalkoztatja az a probléma, hogy milyen *módszerrel* határozható meg a zavartalan termelést biztosító minimális raktárkészlet s ezzel kapcsolatban a minimális forgóeszköz szükséglet. A forgóeszköz szükséglet megállapításánál jelenleg alkalmazott számítási módszerek a termelés adott mértékben növekvő volumenéhez ugyanolyan mértékben növekvő forgóeszköz szükségletet engednek meg, illetve írnak elő (akkor is, ha a termelés belső összetétele és az anyagfelhasználási normák változatlanok).

Éppen ezért fordult az Országos Tervhivatal a Matematikai Kutató Intézethez az elmúlt év során azzal a kéréssel, hogy matematikai módszerekkel vizsgáljuk meg azt, hogy a termelés folyamatos anyagellátását biztosító készleteknek az a része, amely a (szállításban, termelésben, stb.) fellépő véletlen ingadozások okozta szükséglet fedezésére szolgál miképpen alakul akkor, ha a termelés nő.

A végzett munkáról tanulmány készült,[1] amelyben egyrészt a feltett kérdéssel kapcsolatos vizsgálatokról adtunk számot, másrészt olyan modelleket állítottunk fel, amelyek alkalmasak a *folyamatos termelést adott valószínűséggel biztosító legkisebb raktárkészlet mennyiségének a meghatározására*, feltéve, hogy egyedi normájú, folyamatos felhasználású és nem helyettesíthető anyagokról van szó.

Jelen cikk a tanulmány 4. §-ának az anyagát öleli fel. A tanulmányban foglalt további gondolatokat és eredményeket tartalmazza PRÉKOPA ANDRÁS sajtó alatt levő [4] cikke.

1. §. A matematikai modell felállítása és tárgyalása

A jelenlegi gyakorlatban sok esetben az a helyzet, hogy ha egy vállalat megrendel valamely K mennyiségű anyagot, akkor ezt a megrendelt mennyiséget egy előre meghatározott időtartamon (pl. negyedéven) belül kizárólag

[1] *Tanulmány a folyamatos termelést biztosító legkisebb raktárkészlettel kapcsolatos egyes problémákról* (a matematikai részt PRÉKOPA A. és ZIERMANN M., a közgazdasági részt BAGÓ F. és RIEB L. írták). Kézirat, 1962.

a megrendelést teljesítő vállalattól függő időpontokban és részletekben kapja meg. A megrendelést teljesítő vállalat tehát csupán arra kötelezi magát, hogy egy meghatározott időpontig a megrendelt K mennyiséget feltétlenül leszállítja, fenntartva magának az előszállítások jogát.

Ez esetben a megrendelő vállalathoz beérkező rész-szállítások mennyiségét s magukat a beérkezések időpontjait is valószínűségi változóknak tekinthetjük.

Ha a több évi tapasztalat azt mutatja, hogy a szóban forgó anyagból megrendelt K mennyiség a vizsgált időtartamon belül (pl. negyedévről negyedévre) *többnyire n alkalommal és nagyjából egyenlő részletekben* érkezik be (és nincs okunk annak feltételezésére, hogy a megrendelést teljesítő vállalat ettől a szokástól a jövőben eltér), akkor ezen utánpótlási rendszer leírására a következő matematikai modellt[2] tartjuk alkalmasnak:

Modell. Tekintsünk egy $[0, T]$ intervallumot, amelyre véletlenszerűen dobunk n pontot. Az n pont helyét a T hosszúságú szakaszon jelölje $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(0 < \xi_i < T,\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Ekkor a ξ_i valószínűségi változók — mint ismeretes — egymástól független, a $[0, T]$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe a ξ_i értékeket, és jelölje ξ_k^* $(k = 1, 2, \ldots, n)$ e számsorozat k-adik elemét. A ξ_k^* valószínűségi változók reprezentálják a beérkezési időpontokat. Minden egyes ξ_k^* pontban $(0 < \xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_n^* < T)$ a megrendelt mennyiség n-ed részével megnő a raktárkészlet.

A következőkben arra a kérdésre adunk feleletet, hogy valamely vizsgált időtartam kezdőpontjában a szóban forgó anyagból mekkora az a legkisebb raktárkészlet, az ún. *kiinduló készlet,* amely a modellben leírt utánpótlást tételezve fel, az *egész időtartam alatti folyamatos napi c intenzitású felhasználást* $1 - \varepsilon$ *valószínűséggel biztosítani tudja.*

Az ε $(0 < \varepsilon < 1)$ kockázat értékeként a gyakorlatban csak igen kis értékek jöhetnek szóba, pl. $\varepsilon = 0{,}08$; $0{,}05$; $0{,}01$, é.i.t. ε értékének a megválasztása természetesen komoly mérlegelésen alapuló döntést kíván (pl. abban a tekintetben, hogy a népgazdaságnak jelentősebb megtakarítást okoz-e az, ha ε értékét növeljük, ami a kiinduló készletet csökkenti ugyan, de a termeléskiesés lehetőségét növeli). A továbbiakban ε értékét adottnak tételezzük fel, azonban, mint látni fogjuk, az alkalmazott módszer mellett n elég nagy értéke biztosítani fogja ε kicsiny voltát.

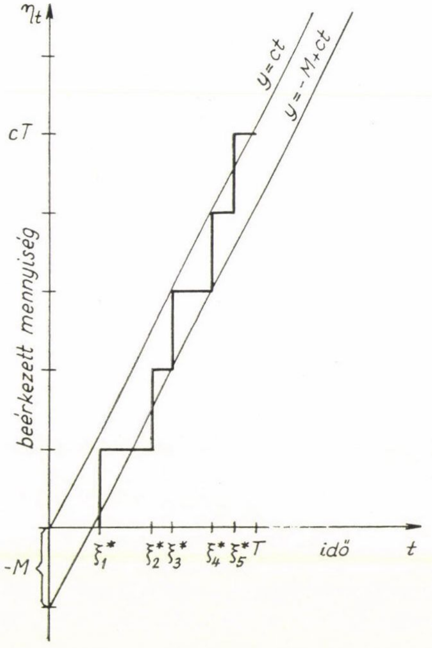
Jelöljük $[0, T]$-vel a vizsgált időtartamot, M-mel a kiinduló készletet. Minthogy napi c intenzitású felhasználást tételeztünk fel, ezért cT a $[0, T]$ időtartam alatti összfelhasználás, tehát a 0 időpontot megelőzően $K = cT$ mennyiséget rendeltünk. Jelölje η_t a t időpontig összesen a raktárba érkezett anyag mennyiségét, és y_t a t időpontig összesen felhasznált (ill. a raktárból kivett) anyagot. A feltételezések értelmében $y_t = ct$.

Az alábbi ábra a modell szerint lejátszódó utánpótlás egy lehetséges realizációját ábrázolja az $n = 5$ esetben.

Az ábrán a vízszintes tengely jelenti az időtengelyt és ezen a ξ_1^*, ξ_2^*, ξ_3^*, ξ_4^*, ξ_5^* pontok a beérkezési időpontokat, a függőleges tengelyen szerepel

[2] Azt az esetet, midőn az utánpótlás rendszerében nemcsak a beérkezési időpontok, hanem az egyes véletlen időpontokban beérkező mennyiségek is véletlen ingadozást mutatnak, tárgyalja PRÉKOPA András — a Bevezetésben említett — cikke.

η_t értéke. A $\xi_1^*, \ldots, \xi_5^*$ időpontok mindegyikében egyenlő mennyiség, $\frac{cT}{5}$ érkezik be. Ezekben az időpontokban tehát η_t értéke $\frac{cT}{5}$ -tel megnő. Ábránkon η_t alakulását a lépcsős függvény mutatja. Az $y = ct$ egyenes pontjai a t időpontig összesen felhasznált (ill. a raktárból kivett) anyag-mennyiséget ábrázolják — napi c egységnyi folyamatos felhasználást tételezve fel.



1. ábra.

Tegyük fel tehát, hogy a 0 időpontban M raktárkészletünk van. Valahányszor $y_t > \eta_t$, akkor az ezen t időpontot megelőző időszakasz egy részében biztosan fennakadás lenne a termelésben anyaghiány miatt, ilyenkor mindig az M raktárkészlethez nyúlunk. Nyilvánvaló tehát, hogy M-et úgy kell megválasztanunk, hogy az η_t lépcsős függvény M-értékével növelt ordinátái nagy valószínűséggel mindig az $y = ct$ egyenes pontjai felett (esetleg rajta) helyezkedjenek el, azaz előre adott valószínűséggel az

(1) $$\eta_t + M \geqq ct$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. A (1) egyenlőtlenséggel ekvivalens az

(2) $$\eta_t \geqq -M + ct,$$

illetve az

(3) $$\eta_t - ct \geqq -M$$

egyenlőtlenséggel. Az ábrán az $y = -M + ct$ egyenes látható.

Általában, ha az előre adott kockázat értéke ε, akkor a (3) egyenlőtlenség alapján M-et úgy kell megválasztanunk, hogy a $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ beérkezési időpontok minden lehetséges elhelyezkedésekor

$$\mathbf{P}\{\inf_{0<t<T} (\eta_t - ct) \geqq -M\} \geqq 1 - \varepsilon \tag{4}$$

legyen.

1. Tétel. *Ha n elég nagy ($n > 20$), akkor a $[0, T]$ időtartam alatti napi állandó c felhasználást $1 - \varepsilon$ valószínűséggel biztosító kiinduló készlet*

$$M \sim \frac{cT\sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{2n}}, \tag{5}$$

ahol $e^{-2n} \leqq \varepsilon < 1$.

Bizonyítás. A (3) egyenlőtlenség mindkét oldalát cT-vel osztva, vezessük be az $x = \frac{t}{T}$, és az $u_x = \frac{\eta_t}{cT}$ jelöléseket. Ekkor (4) helyett a következő összefüggést kapjuk:

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0<x<1} (u_x - x) \geqq -\frac{M}{cT}\right\} \geqq 1 - \varepsilon, \tag{6}$$

ahol u_x lehetséges értékei $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$. Minthogy a modell feltételezése szerint a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egymástól független, egyenletes eloszlásúak a $[0, T]$ intervallumban, tehát a $\zeta_i = \frac{\xi_i}{T}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ valószínűségi változók is azok a $[0, 1]$ intervallumban. Ennek alapján a (6) összefüggésben szereplő u_x mennyiséget tekinthetjük a $[0, 1]$-ben egyenletes eloszlású ζ_i valószínűségi változókból vett n elemű rendezett minta empirikus eloszlásfüggvényének, amelyet $F_n(x)$-szel, míg x ennek a mintának az elméleti eloszlásfüggvénye, amelyet $F(x)$-szel szokás jelölni.

Arra a megállapításra jutottunk tehát, hogy M-et az alábbi összefüggésből kell meghatároznunk:

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0<x<1} \big(F_n(x) - F(x)\big) \geqq -\frac{M}{cT}\right\} \geqq 1 - \varepsilon. \tag{7}$$

N. Szmirnov [1] ismert tétele szerint azonban

$$P\{\sqrt{n} \sup_x \big(F(x) - F_n(x)\big) < y\} \sim \begin{cases} 1 - e^{-2y^2} & \text{ha } y > 0 \\ 0 & \text{ha } y \leqq 0. \end{cases} \tag{8}$$

A (7) valószínűségre alkalmazzuk a Szmirnov-tételt, ekkor

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\inf_{0<x<1} \big(F_n(x) - F(x)\big) \geqq -\frac{M}{cT}\right\} = \\ &= \mathbf{P}\left\{\sqrt{n} \sup_{0<x<1} \big(F(x) - F_n(x)\big) < \sqrt{n}\frac{M}{cT}\right\} \sim 1 - e^{-2\frac{M^2 n}{c^2T^2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ha azt akarjuk, hogy M, a kiinduló raktárkészlet $1 - \varepsilon$ valószínűséggel fedezze a $[0, T]$ időszak alatti napi c felhasználást, akkor (7) és (9)-ből kifolyólag az alábbi egyenletnek kell fenállnia:

$$1 - e^{-2\frac{M^2 n}{c^2 T^2}} = 1 - \varepsilon. \tag{10}$$

Tekintettel arra, hogy $0 < \frac{M}{cT} < 1$, tehát csak olyan ε értékek jöhetnek szóba, amelyre $e^{-2n} \leqq \varepsilon < 1$. Ekkor a (9) egyenletet M-re megoldva, a tétel állításában szereplő M értéket kapjuk.

Az (5) aszimptotikus képlet M értékére annál jobb közelítést ad, minél nagyobb n, tehát minél több részletben szállítják le a megrendelt mennyiséget a vizsgált időtartam alatt. A gyakorlatban azonban többnyire $n = 4, 5,$ é. i. t. M értéke meghatározására ekkor alkalmasabb az alábbi explicit formulát alkalmazni:

2. Tétel. *Ha* $0 < \frac{M}{cT} < 1$, *akkor az adott* ε *értékhez tartozó kiinduló készlet:* M *a következő összefüggésből határozható meg:*

$$\varepsilon = \frac{M}{cT} \sum_{j=0}^{\left[n\left(1-\frac{M}{cT}\right)\right]} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{M}{cT} - \frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(\frac{M}{cT} + \frac{j}{n}\right)^{j-1}, \tag{11}$$

ahol $\left[n\left(1 - \frac{M}{cT}\right)\right]$ az $n\left(1 - \frac{M}{cT}\right)$-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

Bizonyítás. SZMIRNOV [2], s tőle függetlenül BIRNBAUM és TINGEY [3] bebizonyították, hogy minden olyan n, ε és y értékre, amelyre fennáll, hogy

$$\varepsilon = \mathbf{P}\{\sup_x (F_n(x) - F(x)) \geqq y\}, \tag{12}$$

ahol $F_n(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvényű alapsokaságból vett n elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye, igaz a következő összefüggés:

$$\varepsilon = y \sum_{j=0}^{[n(1-y)]} \binom{n}{j} \left(1 - y - \frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(y + \frac{j}{n}\right)^{j-1}, \tag{13}$$

ahol $[n(1 - y)]$ az $n(1 - y)$-ban foglalt legnagyobb egész szám.

A (7) egyenlőtlenséget megfelelően átalakítva, az alábbi, vele ekvivalens egyenlőtlenségre jutunk:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0<x<1} (F_n(x) - F(x)) < \frac{M}{cT}\right\} \geqq 1 - \varepsilon, \tag{14}$$

ahol ε a (13) képletben szereplő kifejezéssel egyenlő, ha $y = \frac{M}{cT}$. Ezzel a bizonyítani kívánt összefüggésre jutottunk.

A csatolt táblázat[3] $\varepsilon = 0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}025$; $0{,}01$; $0{,}005$ értékeihez az $\frac{M}{cT}$ értékeket tartalmazza, $n = 1, 2, \ldots, 40$ esetében.

Így pl. az $n = 5$ esetben, az $\varepsilon = 0{,}05$ kockázathoz tartozó $\frac{M}{cT}$ érték $0{,}50945$, tehát

$$\mathbf{P}\{\inf_{0<x<1} (F_5(x) - F(x)) \geqq -0{,}50945\} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 .$$

Ebből az összefüggésből, a 2. Tétel alapján a következő megállapítást tehetjük:

Ha a $[0, T]$ időszakban 5 egyenlő (vagy közel egyenlő) részletben, de egyenletes eloszlásnak megfelelő véletlen időpontokban érkezik be a megrendelt mennyiség, akkor a 0 időpontban, tehát a vizsgált időszak kezdőnapján $0{,}50945 \cdot cT$ mennyiségnek, azaz az összfelhasználás $50{,}945\%$-ának raktáron kell lennie ahhoz, hogy a $[0, T]$ időtartam alatti napi c egységnyi folyamatos felhasználást $0{,}95$ valószínűséggel biztosítani tudjuk. (Ha pl. $T = 90$ nap, akkor ez kb. 46 napi készletet jelent.)

Ha a közölt táblázatban szereplő értékeket egybevetjük a SZMIRNOV-táblázat (lásd pl. [3], pp. 595.) megfelelő értékeivel, akkor azt tapasztaljuk, hogy az aszimptotikus értékek nagyobbak az „egzakt" értékeknél, továbbá, hogy az eltérés $n = 20$-tól kezdve már nem lényeges, $n = 50$-től kezdve pedig rendkívül kicsi.

Így a fenti példában, midőn $n = 5$, $\varepsilon = 0{,}05$ a SZMIRNOV-táblázatból $\frac{M}{cT} \sim 0{,}5473$, tehát $M \sim cT \cdot 0{,}5473$.

2. §. A rendelt mennyiség és a beérkezési időpontok számának hatása a kiinduló készletre

Az 1.§-ban tárgyalt modellt tételezve fel, vizsgáljuk meg, hogyan alakul M értéke abban az esetben, midőn a következő $[0, T]$ időtartam alatt a napi felhasználás intenzitása, tehát a megrendelt mennyiség is nagyobb. A SZMIRNOV-*tétel* alkalmazásával nyert (5) összefüggés szerint

$$M \sim \frac{cT \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{2n}}, \quad e^{-2n} \leqq \varepsilon < 1 .$$

Tegyük fel, hogy a napi felhasználás $c_1 = kc$ $(k > 1)$, a megrendelt mennyiség tehát kcT, továbbá, hogy az utánpótlás a modellben adott feltételek szerint játszódik le, ismét n számú véletlen beérkezési időponttal. Ekkor, ha az $1 - \varepsilon$ biztonsághoz, továbbá az n, c értékekhez tartozó kiinduló készletet $M(n, c, \varepsilon)$-nal jelöljük, akkor az új kiinduló készlet ugyanazon ε, n, de kc mennyiséghez tartozó értéke (5) szerint

$$k\, M(n, c, \varepsilon)$$

lesz. Ha tehát *a beérkezési időpontok száma változatlan marad, megnövekedett*

[3] A táblázat értékeit Leslie A. MILLER számította ki, „Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics" című dolgozatában *(Journal of the American Statistical Association* **51** (1956), 111—121.

napi termeléshez — feltéve, hogy az ε kockázatot nem változtatjuk — *ugyanolyan arányban megnövelt kiinduló készlet kell.*

A gyakorlatban azonban a megrendelés mennyiségének a növekedése a beérkezési időpontok számának a növekedését vonja sok esetben maga után. Az (5) képletben c helyébe tegyünk kc-t ($k > 1$) és m helyébe zn-et ($z > 1$), akkor

$$M(zn, kc, \varepsilon) = \frac{k}{\sqrt{z}} M(n, c, \varepsilon) < kM(n, c, \varepsilon). \tag{15}$$

Ha tehát *a beérkezési időpontok száma* is *megnő*, akkor — változatlan ε kockézat mellett — *a kiinduló készlet kisebb mértékben növekszik, mint a megrendelés mennyisége.*

TÁBLÁZAT

n	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.025$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.005$
1	.90000	.95000	.97500	.99000	.99500
2	.68377	.77639	.84189	.90000	.92929
3	.56481	.63604	.70760	.78456	.82900
4	.49265	.56522	.62394	.68887	.73424
5	.44698	.50945	.56328	.62718	.66853
6	.41037	.46799	.51926	.57741	.61661
7	.38148	.43607	.48342	.53844	.57581
8	.35831	.40962	.45427	.50654	.54179
9	.33910	.38746	.43001	.47960	.51332
10	.32260	.36866	.40925	.45662	.48893
11	.30829	.35242	.39122	.43670	.46770
12	.29577	.33815	.37543	.41918	.44905
13	.28470	.32549	.36143	.40362	.43247
14	.27481	.31417	.34890	.38970	.41762
15	.26588	.30397	.33760	.37713	.40420
16	.25778	.29472	.32733	.36571	.39201
17	.25039	.28627	.31796	.35528	.38086
18	.24360	.27851	.30936	.34569	.37062
19	.23735	.27136	.30143	.33685	.36117
20	.23156	.26473	.29408	.32866	.35241
21	.22617	.25858	.28724	.32104	.34427
22	.22115	.25283	.28087	.31394	.33666
23	.21645	.24746	.27490	.30728	.32954
24	.21205	.24242	.26931	.30104	.32286
25	.20790	.23768	.26404	.29516	.31657
26	.20399	.23320	.25907	.28962	.31064
27	.20030	.22898	.25438	.28438	.30502
28	.19680	.22497	.24993	.27942	.29971
29	.19348	.22117	.24571	.27471	.29466
30	.19032	.21756	.24170	.27023	.28987
31	.18732	.21412	.23788	.26596	.28530
32	.18445	.21085	.23424	.26189	.28094
33	.18171	.20771	.23076	.25801	.27677
34	.17909	.20472	.22743	.25429	.27279
35	.17659	.20185	.22425	.25073	.26897
36	.17418	.19910	.22119	.24732	.26532
37	.17188	.19646	.21826	.24404	.26180
38	.16966	.19392	.21544	.24089	.25843
39	.16753	.19148	.21273	.23786	.25518
40	.16547	.18913	.21012	.23494	.25205

Ugyanezt a törvényszerűséget tükrözi — természetesen — a csatolt táblázat is. Például $\varepsilon = 0{,}05$, $n = 7$ esetére a táblázat szerint $M = 0{,}43607 \cdot cT$. Ha a napi felhasználás 20%-kal megnő, a beérkezések száma pedig mindössze 2-vel, akkor a táblázat $\varepsilon = 0{,}05$, $n = 9$-hez tartozó értéke 0,38746, tehát $M(9, 1{,}2c, 0{,}05) = 0{,}38746 \cdot 1{,}2 \cdot cT$. Az

$$\frac{M\,(9, 1{,}2\,c, 0{,}05)}{M\,(7, c, 0{,}05)} = \frac{0{,}38746 \cdot 1{,}2 \cdot cT}{0{,}43607 \cdot cT} \sim 1{,}07$$

arány mutatja, hogy míg a felhasználás napi intenzitása 20%-kal, addig a kiinduló raktárkészlet csupán 7%-kal nőtt.

Befejezésül köszönetemet fejezem ki Arató Mátyásnak sok értékes megjegyzéséért.

(Beérkezett: 1963. július 29.)

IRODALOM

[1] Smirnoff, N.: „Sur les écoirtes de la courbe de distribution empirique". *Mat. Sbornik, N. S.* **6** (1939) 3—26.

[2] Смирнов, Н. В.: *Усп. Мат. Наук* **10** (1944) 179—206.

[3] Birnbaum, Z. W.—Tingey, F. H.: „One-sided confidence contours for probability functions." *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 592—596.

[4] Prékopa, A.: "Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions." *Proceedings of the Colloquium on the Applications of Mathematics in Economics, Budapest, 1963 June 18—22.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Н. В. СМИРНОВА К ЗАДАЧЕ О СКЛАДАХ

M. ZIERMANN

Резюме

В настоящее время в экономике часто встречается, что предприятие получает заказанное количество материала K не сразу, а в течение заранее определенного срока, однако то, в каких долях и в какие сроки получит его предприятие, не известно и зависит от завода, выполняющего заказ. В таком случае частные количества доставленного материала и время их прибытия можно рассматривать как случайные величины.

В первом параграфе работы рассматривается тот случай, когда заказанное количество K прибывает по равным частям n за время $[0, T]$ в случайные моменты, а интенсивность употребления на заводе является константой (c). Для описания такой системы пополнения имеется следующая модель: на отрезок $[0, T]$ сбрасываем n точек. Их упорядоченные места обозначаются величинами:

$$0 \leqq \xi_1^* \leqq \xi_2^* \leqq \ldots \leqq \xi_n^* \leqq T\,.$$

Эти точки будут обозначать время прибытия количества материала $\frac{cT}{n}$, где $cT = K$ количество использованного (а также заказанного) материала за время $[0, T]$.

Эта модель дает возможность определить с помощью теоремы Н. В. Смирнова то запасное количество M на складе, с помощью которого завод будет обеспечен материалом с вероятностью $(1 - \varepsilon)$ за период $[0, T]$. Получается, что

$$M \sim \frac{cT\sqrt{\log 1/\varepsilon}}{\sqrt{2\,n}}$$

при заданном риске ε ($e^{-2n} \leqq \varepsilon < 1$), величина которого выбирается из экономических соображений.

Так как теорема Смирнова действует при $n \geqq 20$, то для маленьких значений n величина M определяется по формуле (11). При данном n и ε по таблице можно определить $\frac{M}{cT}$.

Во втором параграфе рассматривается характер изменения M в зависимости от c, т. е. при увеличении заказа. В настоящее время при определении потребности оборотных средств, если объем производства растет, то в такой же степени должна расти потребность оборотных средств. Это не обязательно обосновано, потому что, как видно из выше приведенной формулы, M линейно растет с увеличением константы c, но от n зависит следующим образом: $M \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$, т. е. если $n_1 = zn$ $(z > 1)$, а $c_1 = kc$ $(k > 1)$, то $\frac{M_1}{M} \sim \frac{k}{\sqrt{z}}$.

Тот общий случай, когда отдельные полученные заказы также являются случайными величинами, рассматривается в работе (работа находится в печати) A. Prékopa [4].

ANWENDUNG DES SMIRNOW'SCHEN SATZES AUF EINEN LAGERHALTUNGSPROBLEM

von

M. ZIERMANN

Zusammenfassung

Im wirtschaftlichen Leben von heute kommt häufig der Fall vor, dass die Nachbestellmenge K von irgendeinem Material während einem gewissen Zeitabstand (sagen wir einem Vierteljahr) nur von dem Betrieb abhängig, der die Bestellung entgegengenommen hat, in den verschiedensten Zeitpunkten und Teillieferungen angeliefert kommt. Diese Teillieferungsmengen und ihre Zeitpunkte können als Zufallsvariable betrachtet werden.

Der § 1 des Artikels befasst sich mit einem Fall in dem das bestellte Material während irgendeinem Zeitabstand $[0, T]$ in n gleichgrossen Teilmengen aber in zufälligen Zeitpunkten angeliefert kommt, wobei die tägliche Verbrauchintensität c Konstant ist.

Zur Beschreibung dieser Lagererneuerungssystem dient das hier angeführte Modell:

Auf das Intervall $[0, T]$ werden n Punkten zufallsmässig geworfen. Die auf der Strecke $[0, T]$ nach Grössenordnung gerichtete Stellen der n Punkte sind $0 < \xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_n^* < T$. Es seien die ξ_i^* Zufallsvariable die stattgefundenen Teillieferungszeitpunkten. In jeden solchen Zeitpunkt kommt eine Materialmenge von $\frac{cT}{n}$ an, wo $cT = k$ die, vor dem Zeitpunkt 0 bestellt Menge bedeutet, jene also, die während der Zeit von $[0, T]$ insgesammt verbraucht wird.

Das Modell gibt eine Möglichkeit mit Anwendung der Smirnow'schen Satzes zur asymptotischen Bestimmung jener kleinsten Vorratsmenge M (die

sogenannte Anfangsvorratsmenge) die in dem Zeitpunkt 0 vorhanden sein muss, wenn man den täglichen, stätigen Verbrauch c in dem Zeitintervall $[0, T]$ mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon$ sichern will,

$$M \sim \frac{cT\sqrt{\log\frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{2n}}, \qquad e^{-2n} \leqq \varepsilon < 1 .$$

Der in der Formel angeführte und von verschiedenen wichtigen wirtschaftlichen Auswertungen abhängige Wert der Risiko ε, $0 < \varepsilon < 1$, wird hier als eine gegebene Grösse angenommen.

Da der asymptotische Wert für M nur bei $n > 20$ anwendbar ist, ist die Grösse der Anfangsvorratsmenge bei kleinen n Werten aus den Zusammenhang (11) zu berechnen. Bei angegebene ε und n kann man die $\frac{M}{cT}$ Werte aus der beigefügten Tabelle ablesen.

Der § 2 beschäftigt sich mit der Frage, wie sich der Wert von M ändert, wenn der Tagesverbrauch c und somit die Bestellmenge cT zunimmt.

Bei der Feststellung des Richtsatzes erlauben die zur Zeit angewandten Berechnungsmethoden bei erhöhter Produktion von $\alpha\%$ eine $\alpha\%$-ige Erhöhung auch des Richtsatzes. Das ist aber nicht unbedingt begründet. Wenn nämlich die Voraussetzungen des in § 2 besprochenen Modells erfüllt werden, und dabei die Teillieferungszeitpunkten von n auf zn $(z > 1)$ anwachsen infolge des Zuwachses des Tagesverbrauches von c auf kc $(k > 1)$, dann wird die neue Anfangsvorratsmenge, wie dies aus den Zusammenhang (15) leicht zu sehen ist kleiner sein als das k-fache der ursprünglichen — wenn ε das selbe bleibt.

Den allgemeineren Fall, in dem auch die Mengen der Teillieferungen Zufallsgrössen sind, behandelt sich das unter Druck stehende Werk [4] von A. PRÉKOPA.