LINEÁRIS PROGRAMOZÁS TÖBB, EGYIDEJŰLEG ADOTT CÉLFÜGGVÉNY SZERINT

BOD PÉTER

Az elmúlt években számos közgazdasági vita zajlott le nálunk, amelyeken közgazdászok és matematikusok arról tárgyaltak, hogyan lehetne a matematikai programozást eredményesen a népgazdasági tervek optimális variánsainak felkutatására felhasználni. A tudományos irodalomból ismeretes, hogy hasonló viták széles körben zajlanak más országokban is. Kétségtelen, hogy a szóbanforgó problémakörön belül az egyik legvitatottabb és távolról sem megoldott kérdés a célfüggvény közgazdaságilag helyes megválasztása. E cikk szerzője úgy véli, hogy a népgazdasági tervezés matematikai megalapozásánál ritkán célravezető olyan modellek alkalmazása, amelyekben egyetlen célfüggvény szerepel. Indokoltnak látszik, hogy nagyobb figyelmet fordítsunk a több egyidejűleg adott célfüggvény alapján való optimalizálás kérdéseire.

Cikkünkben tájékoztatást adunk a probléma megoldásának bizonyos lehetőségeiről. Az I. pontban három — különböző közgazdasági feltevések mellett alkalmazható — modellt ismertetünk. A II. pontban összefoglalunk néhány ismert eredményt az ún. lineáris vektormaximum probléma megoldására. A III. pontban ezeket felhasználva megmutatjuk, hogyan általánosítható a lineáris programozás szimplex módszerének optimalitási kritériuma efficiencia kritériumokká.

A problémát az alábbi egyszerű példán keresztül érzékeltetjük. Tekintsünk egy nyílt, kétszektorú, külkereskedelmi kapcsolatokat nem tartalmazó lineáris népgazdasági modellt, amelynek a technológiai mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Tételezzük fel, hogy a brutto termelés túl nem léphető mértékét az egyes ágazatokban a

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

kapacitásvektor, míg a társadalom minimális szükségleteit a végső (fogyasztásra és felhalmozásra szolgáló) termékekből az

$$\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor fejezi ki.

Jelölje ξ a brutto termelés és $\mathbf{x}$ a végső felhasználás nem negatív vektorait, akkor érvényesek az alábbi összefüggések:

$$(E - A) \cdot \xi = \mathbf{x} \quad \text{illetve} \quad \xi = (E - A)^{-1} \mathbf{x}$$

Vagyis az elérhető végső felhasználást az alábbi feltételek korlátozzák[1]:

$$(E - A)^{-1} \mathbf{x} \leqq \mathbf{k}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{s}_0$$

Az e feltételek által meghatározott halmazból kell már most optimális programot választani és tegyük fel, hogy ezt a választást háromféle szempont szerint lehet értékelni:

1. a végső felhasználás volumene alapján,
2. a ,,belföldi árrendszer'' alapján, amely szerint a kétféle termék áraránya 2 : 5 és végül
3. ,,nemzetközi árrendszer'' alapján, amely szerint a kétféle termék áraránya 1 : 3.

Vagyis olyan programra van szükségünk, amely három egyidejűleg adott célfüggvény (mégpedig $y_1 = x_1 + x_2$; $y_2 = 2x_1 + 5x_2$ és $y_3 = x_1 + 3x_2$) szerint a ,,lehető legjobb''.

I.

A feladat általános megfogalmazása érdekében tekintsünk olyan lineáris döntési feladatokat, amelyeknél egyidejűleg több célfüggvény szerepel. A lehetséges megoldások halmaza ebben az esetben:

$$L = \{\mathbf{x} \mid A\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

Legyenek az egyes célfüggvények:

$$y_1 = \mathbf{c}_1^* \mathbf{x}$$
$$y_2 = \mathbf{c}_2^* \mathbf{x}$$
$$\vdots$$
$$y_k = \mathbf{c}_k^* \mathbf{x}$$

vagy tömören

$$\mathbf{y} = C\,\mathbf{x}\,.$$

Megállapodunk abban, hogy az egyes célfüggvények mindig nagyobb függvényértékkel fejezik ki a gazdaságilag előnyösebb következményt. Minden lehetséges döntés gazdasági következményét tehát egy R^k-ban fekvő vektor tükrözi. Így a lehetséges megoldások halmazához hozzárendelhetjük a következmények halmazát, amely

$$K = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = C\,\mathbf{x}\ ;\ \ \mathbf{x} \in L\}\,.$$

[1] A cikkben vektorok közötti egyenlőtlenségek jelölésére háromféle szimbólumot használunk. $\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$ azt jelöli, hogy $\mathbf{x}$ egyetlen komponense sem nagyobb $\mathbf{y}$ megfelelő komponensénél. $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ esetén ezen felül van $\mathbf{x}$-nak legalább egy $\mathbf{y}$ megfelelő komponensénél határozottan kisebb komponense. $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ minden komponense határozottan kisebb $\mathbf{y}$ megfelelő komponensénél.

Ezek után azt kérdezzük, hogyan lehet ilyen körülmények között a gazdasági optimum fogalmát definiálni és a definíciónak megfelelő optimális programokat meghatározni.

Úgy gondoljuk, hogy három gazdaságilag reális lehetőséggel érdemes foglalkozni. Ezek a gazdasági pereferencia szerkezetére vonatkozó feltételezésekben térnek el egymástól.

1. Feltehető, hogy létezik a célfüggvényeknek egy olyan fontossági sorrendje, amelynél bármilyen kis előny egy fontosabb célfüggvény szerint jelentősebb, mint akármilyen nagy hátrány valamely kevésbé fontos célfüggvény szerint. Ebben az esetben tulajdonképpen arról van szó, hogy a K halmazon közgazdasági szempontból elfogadhatóan meg lehet adni egy sajátos lexikografikus rendezést.

Amennyiben a pereferencia ilyen szerkezetű: az alábbi módon járunk el. Legyen L_1 azon döntések halmaza, amelyekben a $y_1 = \mathbf{c}_1^* \mathbf{x}$ függvény felveszi maximumát L-ben. Ha L_1 egyetlen elemből áll, akkor egyetlen optimális programunk van. Legyen azonban $|L_1| > 1$. Akkor meghatározzuk azon pontok halmazát L_1-ben, amelyekben $y_2 = \mathbf{c}_2^* \mathbf{x}$ felveszi maximumát (L_2 halmaz). Az eljárást folytatva halmazok egy sorozatát kapjuk

$$L_k \subset L_{k-1} \subset \ldots \subset L_2 \subset L_1 \subset L\,.$$

Természetesen lehetséges, hogy valamely $j < k$ indexre már $|L_j| = 1$. Ebben az esetben

$$L_j = L_{j+1} = \ldots = L_{k-1} = L_k\,.$$

Az optimális programok halmaza azonban mindenképpen:

$$L_0 = L_k\,.$$

2. Elképzelhető olyan helyzet, amelyben a K halmazon meg lehet adni egy skalárértékű vektor függvényt és ez a függvény helyesen kifejezi a lehetséges döntések összesített (valamilyen módon összegezett) gazdasági hatékonyságát. Ebben az esetben arról van szó, hogy kialakítható a lehetséges döntések megítélésében egy egységes preferencia. Legyen az említett függvény

$$z = \Phi(\mathbf{y}) = \Phi[C\,\mathbf{x}]\,.$$

Akkor az optimális programok halmaza:

$$L_0 = \{\mathbf{x} \mid z = \Phi[C\,\mathbf{x}] \text{ maximális, } \mathbf{x} \in L\}\,.$$

A halmaz elemeinek felkutatása nyilván lineáris feltételekkel korlátozott — de nem szükségképpen lineáris — függvény maximumának meghatározása révén lehetséges.

3. Az eddigi tapasztalatok alapján úgy tűnik, hogy az esetek többségében nem adható meg eleve sem az 1. pontban feltételezett sajátos jellegű fontossági sorrend a célfüggvények között, sem a 2. pontban jelzett és a különböző minőségű jellegű preferenciákat ,,közös nevezőre'' hozó függvény. Vagyis a K halmazon nem található más rendezés, mint az a részleges rendezés, amelyet természetes módon a megadott célfüggvények határoznak meg. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ két lehetséges elhatározás és

$$\mathbf{y}_1 = C\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{y}_2 = C\mathbf{x}_2 \text{ akkor } \mathbf{x}_1 \text{ előnyösebb mint } \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{y}_1 = C\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_2 = C\mathbf{x}_2 \text{ akkor } \mathbf{x}_1 \text{ egyformán előnyös mint } \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{y}_1 = C\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{y}_2 = C\mathbf{x}_2 \text{ akkor } \mathbf{x}_1 \text{ kevésbé előnyös mint } \mathbf{x}_2.$$

Ezzel szemben, ha $\mathbf{y}_1$ egyes komponensei nagyobbak, mások viszont kisebbek, mint $\mathbf{y}_2$ megfelelő komponensei, akkor $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{y}_2$ hatékonysága közvetlenül nem hasonlítható össze. Az optimalizálási probléma pedig, amire jutottunk, az ún. vektormaximum probléma.

Ilyen körülmények között az optimalizálás csak az ún. efficiens programokra irányulhat. Ezt a fogalmat, mint ismeretes először PARETO vezette be a közgazdaságtudományba. A matematikai programozás elméletében mindenekelőtt KOOPMANS, CHARNES és COOPER alkalmazták jelentős eredménnyel (lásd: [3] és [4]).

A K halmazon $\mathbf{y}_0$ pontot efficiens pontnak nevezzük, ha minden $\mathbf{y} \in K$-ra

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{y}_0 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \,.$$

Vagyis nincs olyan $\mathbf{y} \in K$ pont, amelynek lenne $\mathbf{y}_0$-nál nagyobb komponense úgy, hogy egyetlen komponense sem kisebb $\mathbf{y}_0$ megfelelő komponensénél. Jelöljük az efficiens pontok halmazát K-ban K_e-vel.

Nyilvánvaló, hogy ha K felülről korlátos, akkor és csak akkor: $K_e \neq \emptyset$. Másrészt minden $\mathbf{y} \in \{K - K_e\}$-hez található olyan $\mathbf{y}' \in K_e$, hogy $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}$. Ellenkező esetben $\mathbf{y}$ is efficiens pont kellene, hogy legyen.

Ha $K_e \neq \emptyset$, akkor értelmezhető az efficiens következményű döntések — röviden efficiens döntések — halmaza:

$$L_e = \{\mathbf{x} \mid C\,\mathbf{x} = \mathbf{y}\,,\ \mathbf{y} \in K_e\,;\ \mathbf{x} \in L\}\,.$$

Az optimalizálás célja az L_e halmaz előállítása.

II.

Az L halmaz a gyakorlatban előforduló esetekben nem üres konvex poliéder. Ha feltesszük, hogy valamennyi célfüggvény korlátos az L halmazon, akkor K is korlátos és szintén nem üres poliéder R^k-ben. Azt is tudjuk, hogy extremális pontjai az L halmaz extremális pontjainak képpontjai között találhatók. Vagyis, ha L extremális pontjai: $\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2; \ldots \mathbf{p}_N$, akkor a $C\mathbf{p}_1; C\mathbf{p}_2; \ldots C\mathbf{p}_N$ pontok közül kihagyva mindazokat, amelyek előállíthatók, mint a többi konvex lineáris kombinációja; megkapjuk a K poliéder extremális pontjait.

A K halmaz extremális pontjai közül azok lesznek efficiensek, amelyek e poliéder pozitív normálisú határoló hipersíkjain fekszenek. Azonos határoló hipersíkon fekvő efficiens extremális pontok konvex lineáris kombinációi is efficiens pontokat eredményeznek. Vagyis K_e összefüggő — nem szükségképpen konvex, de konvex részek egyesítéséből álló halmaz. Ennek a halmaznak részletes előállításához a K halmaz extremális pontjainak koordinátáira és határoló hipersíkjainak egyenleteire van szükség.

Fenti megfontolások alapján, amelyek a konvex poliéderek elméletének ismert tételeire (lásd: [5] 63—64. o.) támaszkodnak, elvben a következő út jelölhető ki az efficiens programok megtalálására:

1. Valamilyen erre alkalmas módszerrel megállapítjuk az L halmaz összes extremális pontját. Ennek a feladatnak a megoldására számos eljárás ismeretes. Így többek között az ún. ,,teljes leírás'' módszere, az UZAWA-féle algoritmus, BALINSKI eljárása stb. LIPTÁK TAMÁS bizonyos fokig egyszerűsítette UZAWA eljárását, amennyiben sikerült olyan algoritmust adnia, amelynél nem kerül sor felesleges (tehát ténylegesen nem extremális) pontok generálására. Az idén júniusban tartott ,,Matematika közgazdasági alkalmazásai'' kollokviumon pedig KREKÓ BÉLA és GEORG WINTGEN mutattak be a fenti feladat megoldására eljárásokat. (Lásd: [1]; [7]; [8]; [9]; [10].)

2. Képezzük az L halmaz extremális pontjainak képpontjait a C transzformációs mátrix segítségével és hagyjuk el az így nyert pontok közül azokat, amelyek előállíthatók a többi lineáris konvex kombinációjaként. Ezzel megkaptuk K extremális pontjait.

3. A K halmaz extremális pontjaiból megállapítjuk a poliéder határoló hipersíkjainak egyenleteit. Ennek a feladatnak a megoldására ugyancsak LIPTÁK TAMÁS dolgozott ki az elmúlt évben egy még nem publikált algoritmust.

4. Ezek után a K halmaz efficiens pontjainak meghatározásához már minden szükséges információval rendelkezünk. Maguknak az efficiens programoknak a megállapítása nem jelent külön nehézséget, hiszen a K halmaz efficiens csúcspontjainak ősei már a számítások 1. lépcsőjében meghatározásra kerültek.

A fentiekben vázolt eljárás teljes mértékben megvalósítható, de rendkívül számításigényes; mint minden olyan algoritmus, amely egy konvex poliéder összes csúcspontjaival explicite dolgozik. A mi feladatunk esetében az L halmaz összes extremális pontja meghatározásának önmagában is rendkívül fáradságos munkájához járul még a K halmaz határoló hipersíkjainak felépítése extremális pontjaiból.

Az ezzel a részfeladattal kapcsolatos számítási munkák terjedelmét mindenesetre valamelyest csökkenteni lehet azáltal, hogy kimutatható — miszerint a K_e halmaz elemeinek előállításához nincs szükség a teljes K halmazra; elég annak egy részhalmazával foglalkozni. Legyen ugyanis a K halmaz extremális pontjainak halmaza:

$$Q = \{\mathbf{q}_1 ; \mathbf{q}_2 ; \ldots \mathbf{q}_M\} .$$

Válasszuk ki ebből a halmazból azokat a pontokat, amelyeknél nincs ,,nagyobb'' magában a halmazban, vagyis válasszuk ki a Q halmaz efficiens pontjait. Legyen ezen pontok halmaza:

$$\hat{Q} = \{\mathbf{q}_{i_1} ; \mathbf{q}_{i_2} ; \ldots \mathbf{q}_{i_r}\} .$$

Ez annyit jelent, hogy a $\bar{Q} = \{Q - \hat{Q}\}$ halmaz minden eleménél van ,,nagyobb'' a $\hat{Q}$ halmazban.

Bebizonyítjuk a következő lemmát:

A K halmaz egyetlen olyan pontja sem lehet efficiens, amelynek előállításában a $\bar{Q}$ halmazhoz tartozó extremális pont pozitív súllyal szerepel.

Legyen ugyanis

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i \mathbf{q}_i; \quad \sum_{i=1}^{M} \mu_i = 1 \qquad 0 \leqq \mu_i \leqq 1 \; (i = 1, 2 \ldots M)$$

a K halmaz egy tetszőleges pontja és tegyük fel, hogy

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{q}_{j_\nu} \in \bar{Q} \\ \mu_{j_\nu} \neq 0 \end{array}\right\} (\nu = 1, 2, \ldots l)$$

Válasszunk ki a $\hat{Q}$ halmazból olyan elemeket, amelyek rendre „nagyobbak" $\mathbf{q}_{j_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots l)$-nél és képezzünk a fenti kombinációs súlyokkal új pontot: $\mathbf{y}'$, amelynél a $\mathbf{q}_{j_\nu}$ vektorokat rendre a náluk „nagyobb" $\mathbf{q}_{i_\nu}$ vektorokkal cseréljük fel. Az így nyert pontra nyilvánvalóan

$$\mathbf{y}' \in K \quad \text{és} \quad \mathbf{y}' \geq \mathbf{y}\,.$$

Vagyis $\mathbf{y}$ nem efficiens.

Fenti lemma alapján elég a $\hat{Q}$ halmaz pontjai által generált ún. redukált következményhalmaz határoló hipersíkjait előállítani. Ezeken megtaláljuk a K halmaz összes efficiens pontját. Azonban még ilyen számítási munkacsökkentés mellett sem lehetséges a ma rendelkezésünkre álló számítástechnikai lehetőségek keretei között a vázolt módon akár csak közepes méretű feladatot is gyakorlatilag használható időn belül megoldanunk. Ezért olyan módszer alkalmazására kell törekednünk, amely nem teszi szükségessé az összes extremális pont meghatározását. Ilyen módszer a szimplex eljárás.

A szimplex módszert fel lehet használni efficiens programok meghatározására. Ennek a lehetőségét az alábbi két tétel biztosítja. A tételek eredetileg CHARNEStől és COOPERtől származnak, akik 1957-ben a lineáris termelési modellek efficiens termelési lehetőségeinek problémáját vizsgálták. Eredményeiket könnyen átfogalmazhatjuk az általunk vizsgált problémára. (Lásd: [3] 82. o. és részletesebben [4] I. 299—313.)

Efficiens következményű program megtalálását biztosítja az alábbi

I. tétel. *Ha* $\mathbf{x}_0$ *optimális megoldása a*

$$\mathbf{p}_0^* C\,\mathbf{x} \rightarrow \max!$$

$$A\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

lineáris programozási feladatnak, amelyben $\mathbf{p}_0^*$ *tetszőleges pozitív vektor, akkor* $\mathbf{y}_0 = C\mathbf{x}_0$ *efficiens pont* K-ban.

Tegyük fel fentiekkel ellentétesen, hogy

$$\mathbf{y}' = C\,\mathbf{x}' \geq \mathbf{y}_0 \quad \text{és} \quad \mathbf{x}' \in L$$

Akkor

$$C\,\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{p}_0^* C\,\mathbf{x}' > \mathbf{p}_0^* C\,\mathbf{x}_0$$

vagyis $\mathbf{x}_0$ nem lenne optimális megoldása a fenti feladatnak, szemben a feltételezésünkkel. Tehát $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}_0$ nem állhat fenn, vagyis $\mathbf{y}_0 \in K_e$.

Tetszőleges lehetséges program efficiens vagy nem efficiens voltának eldöntésére alkalmas a következő

II. tétel. $\mathbf{x}_0$ *efficiens következményű program akkor és csak akkor, ha a* $\mathbf{e}^*\mathbf{y} \to \max'$, *ahol* $\mathbf{e}^* = [1,1,\ldots 1]$

$$A\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$C\,\mathbf{x} - \mathbf{y} = C\,\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0};\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$$

lineáris programozási feladatban

$$\max(\mathbf{e}^*\,\mathbf{y}) = 0\,.$$

A feltétel szükséges: legyen $\mathbf{x}_0$ efficiens következményű, akkor

$$C\,\mathbf{x}' \geqq C\,\mathbf{x}_0 \Rightarrow C\,\mathbf{x}' = C\,\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e}^*\,\mathbf{y} = 0.$$

A feltétel elégséges: legyen $\max(\mathbf{e}^*\,\mathbf{y}) = 0$ és $C\mathbf{x}' \geq C\mathbf{x}_0$. Vagyis léteznek olyan komponensek, amelyekre

$$(C\,\mathbf{x}')_i > (C\,\mathbf{x}_0)_i\,.$$

Tehát $\mathbf{y}$-nak kell, hogy legyenek pozitív komponensei is és így

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}\,;\ \mathbf{e}^* > \mathbf{0}^* \Rightarrow \mathbf{e}^*\,\mathbf{y} > 0\,,$$

szemben a feltevésünkkel.

Tekintsük a fenti (II. tételbeli) feladat duálisát

$$\mathbf{u}^*\,\mathbf{b} + \mathbf{v}^*\,C\,\mathbf{x}_0 \to \min!$$

$$\mathbf{u}^*\,A + \mathbf{v}^*\,C \geqq \mathbf{0}^*$$

$$-\,\mathbf{v}^* \geqq \mathbf{e}^*$$

$$\mathbf{u}^* \geqq \mathbf{0}^*\,.$$

II. tétel alapján, ha $\mathbf{x}_0$ efficiens következményű program, akkor $(\mathbf{x}_0;\ \mathbf{y}_0 = C\mathbf{x}_0)$ optimális megoldása a primál feladatnak és

$$\max(\mathbf{e}^*\,\mathbf{y}) = 0\,.$$

Ekkor viszont a duál feladatnak is van optimális megoldása:

$$(\mathbf{u}_0^*\,;\ \mathbf{v}_0^*)$$

$\mathbf{v}^*$-ról tudjuk, hogy

$$-\,\mathbf{v}^* \geqq \mathbf{e}^* > \mathbf{0}^*\,.$$

Jelölje

$$\mathbf{p}^* = -\,\mathbf{v}^*\,.$$

Másrészt

$$\mathbf{u}^*\,A \geqq -\,\mathbf{v}^*\,C = \mathbf{p}^*\,C$$

és a dualitás tétel miatt

$$\min(\mathbf{u}^*\,\mathbf{b} + \mathbf{v}^*\,C\,\mathbf{x}_0) = \min(\mathbf{u}^*\,\mathbf{b} - \mathbf{p}^*\,C\,\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0^*\,\mathbf{b} - \mathbf{p}_0^*\,C\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}\,.$$

Innen

$$\mathbf{u}_0^*\mathbf{b} = \mathbf{p}_0^*\,C\,\mathbf{x}_0\,.$$

Rögzített $\mathbf{p}_0^*$ mellett ezt úgy értelmezhetjük, hogy $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{u}_0^*$ primál, illetve duál optimuma a

$$\begin{array}{ll} A\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{b} & \mathbf{u}^* A \geqq \mathbf{p}_0^* C \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & \mathbf{u}^* \geqq \mathbf{0}^* \\ \mathbf{p}_0^* C\,\mathbf{x} \rightarrow \max! & \mathbf{u}^* \mathbf{b} \rightarrow \min! \end{array}$$

feladatpárnak. Ez megmutatja, hogy adott $\mathbf{p}_0^* > \mathbf{0}^*$ mellett a

$$\begin{gathered} \mathbf{p}_0^* C\,\mathbf{x} \rightarrow \max! \\ A\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{gathered}$$

feladat optimális megoldása efficiens következményű és megfordítva, minden efficiens következményű programhoz van olyan $\mathbf{p}_0^* > \mathbf{0}^*$ vektor, hogy $\mathbf{x}_0$ optimális megoldás a $\mathbf{p}_0^* C\mathbf{x}$ célfüggvény tekintetében.

III.

Fenti tételeket a szimplex módszer nálunk szokványos (lásd: [7] 228—234 o.) számítási eljárásában az alábbiak szerint alkalmazhatjuk:

Induljunk ki a következő táblából

	$\mathbf{x}^*$	
$\mathbf{u}$	A	$\mathbf{b}$
	C	$\mathbf{0}$

és particionáljuk úgy, hogy a bal felső blokkban egy reguláris kvadratikus blokkot nyerjünk.

	$\mathbf{x}_1^*$	$\mathbf{x}_2^*$	
$\mathbf{u}_1$	A_{11}	A_{21}	$\mathbf{b}_1$
$\mathbf{u}_2$	A_{21}	A_{22}	$\mathbf{b}_2$
	C_1	C_2	

Ha A_{11}^{-1} létezik, át lehet térni egy olyan bázisra, amelyben $\mathbf{u}_1$ helyében $\mathbf{x}_1$ áll.

	$\mathbf{u}_1^*$	$\mathbf{x}_2^*$	
$\mathbf{x}_1$	$-A_{11}^{-1}$	$A_{11}^{-1} A_{12}$	$A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$
$\mathbf{u}_2$	$-A_{21} A_{11}^{-1}$	$A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$	$\mathbf{b}_2 - A_{21} A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$
	$-C_1 A_{11}^{-1}$	$C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}$	$-C_1 A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$

Tegyük fel, hogy a transzformáció eredményeként lehetséges megoldást kaptunk, vagyis

$$A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{0},$$

és így

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in L.$$

E program következményvektora:

$$\mathbf{y}_0 = C_1 A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1 \in K.$$

Tételezzük végül még fel, hogy $-C_1A^{-1} \leqq \mathbf{0}$, vagyis

$$C_1 A_{11}^{-1} \geqq \mathbf{0}.$$

Ezek után bebizonyítjuk a következő megállapításokat:

1. Ha $C_2 - C_1A_{11}^{-1}A_{12} \leqq \mathbf{0}$, akkor K_e egyetlen pontból áll:

$$K_e = \{\mathbf{y}_0\}.$$

Legyen ugyanis $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \end{bmatrix} \in L$ és $\mathbf{y}' = C\mathbf{x}' = C_1\mathbf{x}_1' + C_2\mathbf{x}_2'$. Mivel $\mathbf{x}_2' \geqq \mathbf{0}$ és $C_2 \leqq$ $\leqq C_1A_{11}^{-1}A_{12}$, ezért

$$\mathbf{y}' = C_1\mathbf{x}_1' + C_2\mathbf{x}_2' \leqq C_1\mathbf{x}_1' + C_1A_{11}^{-1}A_{12}\mathbf{x}_2' = \underbrace{C_1A_{11}^{-1}}_{\geqq \mathbf{0}}\underbrace{(A_{11}\mathbf{x}_1' + A_{12}\mathbf{x}_2')}_{\leqq \mathbf{b}_1}$$

és így

$$\mathbf{y}' \leqq C_1A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1 = \mathbf{y}_0.$$

2. Ha a $\mathbf{p}^*[C_2 - C_1A_{11}^{-1}A_{12}] \leqq \mathbf{0}^*$ egyenlőtlenségrendszernek van pozitív megoldásvektora, akkor

$$\mathbf{y}_0 \in K_e.$$

Legyen

$$\mathbf{p}_0^*[C_2 - C_1A_{11}^{-1}A_{12}] \leqq \mathbf{0}^* \quad \text{és} \quad \mathbf{p}_0^* > \mathbf{0}^*.$$

Ebben az esetben $\mathbf{x}_0$ optimális megoldása a

$$\mathbf{p}_0^*C\mathbf{x} \to \max!$$

$$A\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

lineáris programozási feladatnak. A megfelelő optimális megoldást mutató tábla ugyanis

	$\mathbf{u}_1^*$	$\mathbf{x}_2^*$	
$\mathbf{x}_1$	A_{11}^{-1}	$A_{11}^{-1}A_{12}$	$A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$
$\mathbf{u}_2$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$	$\mathbf{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$
	$\underbrace{-\mathbf{p}_0^*C_1A_{11}^{-1}}_{\leqq \mathbf{0}^*}$	$\underbrace{\mathbf{p}_0^*[C_2 - C_1A_{11}^{-1}A_{12}]}_{\leqq \mathbf{0}^*}$	$-\mathbf{p}_0^*C_1A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$

A $\mathbf{p}^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}] \leqq \mathbf{0}^*$ egyenlőtlenségrendszernek nyilvánvalóan nem lehet pozitív megoldása, ha a mátrixnak van félpozitív oszlopvektora és biztosan van pozitív megoldása, ha van legalább egy félnegatív sorvektora.

3. Ha az $[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]$ mátrixban van félpozitív oszlopvektor (olyan nem negatív vektor, amelynek legalább egy pozitív komponense van) és felette található pozitív generáló elem, akkor egy elemi transzformációval olyan

$$\mathbf{x}^1 \in L$$

programhoz jutunk, melyre

$$\mathbf{y}^1 = C\,\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{y}_0 .$$

Legyen $\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_k^j \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ a $[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]$ mátrix

j-ik oszlopvektora. Kerüljön be x_j a bázisba $\delta > 0$ mértékű tevékenységként; akkor

$$C\,\mathbf{x}^1 = C\,\mathbf{x}_0 + \delta\,\mathbf{c}_j \geq C\,\mathbf{x}_0 .$$

4. Ha a $\mathbf{p}_0^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]$ nem pozitív vektornak van olyan zérus komponense, amely felett létezik pozitív generáló elem, akkor egy elemi transzformációval olyan $\mathbf{x}' \in L$ programhoz jutunk, amely alternatív optimuma a 2. pontban jelzett lineáris programozási feladatnak, tehát

$$\mathbf{y}' = C\,\mathbf{x}' \in K_e .$$

5. Az alternatív optimumokra való áttérés lehetőségét kimerítve: $\mathbf{p}_0^*$ valamelyik elemét megváltoztatva áttérünk olyan $\mathbf{p}_1^*$ vektorra, hogy a

$$\mathbf{p}_1^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]$$

vektornak legyen legalább egy pozitív eleme. Ez lehetővé teszi olyan újabb bázismegoldás, vagy bázismegoldások felkutatását, amelyek optimális megoldásai a

$$\mathbf{p}_1^* C\,\mathbf{x} \to \max!$$

$$A\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

feladatnak, tehát újabb efficiens következményű programokat szolgáltatnak.

A fentiekben kritériumot nyertünk efficiens bázisprogramok előállítására és adott efficiens bázisprogramból további ugyancsak efficiens bázisprogramra való áttérésre. Gyakorlatilag adott feladatok esetében ezek olyan döntéseket jelentenek, amelyekkel kapcsolatban a gazdasági hatékonyság valamelyik elemének fokozása feltétlenül a hatékonyság más elemeinek rovására valósítható csak meg. Ezek a programok ebben az értelemben optimálisak. Természetes, hogy általában nem várható az hogy K_e egyetlen elemből álljon. Ahhoz, hogy az összes efficiens bázisprogramot lépésről lépésre előállíthassuk, szükség van olyan nyilvántartó eljárásra, amely számon tartja, hogy a lehetséges megoldások halmazának mely szóbajöhető extremális pontjait jártuk már be. Ilyen nyilvántartó eljárást kell alkalmazni olyankor is, amikor egy közönséges lineáris programozási feladatnál igen sok alternatív optimális csúcspont adódik. Gyakorlatilag bevált erre a célra az ugyancsak CHARNES és COOPER által kidolgozott ún. „labirintus eljárás" (lásd [2] 69—70 o.). Ha már most nemcsak az efficiens extremális pontokra, hanem az összes efficiens programra kiváncsiak vagyunk, figyelembe kell venni, hogy itt eltérés van az efficiens csúcspontok elhelyezkedése és az alternatív optimális csúcspontok elhelyezkedése között a közönséges lineáris programozásnál. Míg ugyanis ez utóbbi problémánál az alternatív optimális extremális pontok minden konvex lineáris kombinációja maga is optimális programot ad, addig az efficiens csúcspontok konvex lineáris kombinációi vezethenek belső pontokhoz is. Ezek konvex lineáris kombinációja akkor és csak akkor efficiens, ha a kombinációban pozitív súllyal szereplő efficiens csúcspontok azonos határoló hipersíkon fekszenek.

Illusztrációként megoldjuk a cikk elején vázolt példát. Mivel a feltételekben szereplő inverz mátrix:

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} {}^5/_2 & {}^5/_4 \\ {}^5/_6 & {}^{25}/_{12} \end{bmatrix},$$

ezért a feltételek:

$$
\begin{aligned}
{}^5/_2\, x_1 + {}^5/_4\, x_2 &\leqq 200 \\
{}^5/_6\, x_1 + {}^{25}/_{12}\, x_2 &\leqq 200 \\
x_1 &\geqq 50 \\
x_2 &\geqq 20
\end{aligned}
$$

Kisebb átalakítások után az alábbi kiinduló táblázatot írhatjuk fel:

	x_1	x_2	v_1	v_2	
u_1	10	5	0	0	800
u_2	10	25	0	0	1200
$^*u_3$	1	0	-1	0	50
$^*u_4$	0	2	0	-1	20
	1	1	0	0	0
	2	5	0	0	0
	1	3	0	0	0

Mivel az együtthatómátrix bekeretezett része reguláris, áttérhetünk olyan új bázisra, amelyben a csillaggal jelölt duális változók szerepét x_1 és x_2 foglalják el. A transzformáció révén — elhagyva a felesleges oszlopokat — a következő táblát nyerjük, amelyben a feladatnak már egy lehetséges megoldása áll:

	v_1	v_2	
u_1	10	5	200
u_2	10	$\boxed{25}$	200
x_1	-1	0	50
x_2	0	-1	20
	1	1	-70
	2	5	-200
	1	3	-110

Itt $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix} \in L$ és a program következményeit a $\mathbf{y}^1 = \begin{bmatrix} 70 \\ 200 \\ 110 \end{bmatrix}$ vektor tükrözi. Mivel a tábla alsó felében levő mátrix minden oszlopa pozitív vektorokból áll, bármelyik tevékenységet bevonhatjuk a bázisba és ezáltal $\mathbf{x}^1$-nél minden tekintetben előnyösebb programhoz jutunk.

	v_1	u_2	
u_1	$\boxed{8}$	$-{}^1/_5$	160
v_2	${}^2/_5$	${}^1/_{25}$	8
x_1	-1	0	50
x_2	${}^2/_5$	${}^1/_{25}$	28
	${}^3/_5$	$-{}^1/_{25}$	-78
	0	$-{}^5/_{25}$	-240
	${}^1/_5$	${}^3/_{25}$	-134

Az új program $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 50 \\ 28 \end{bmatrix} \in L$ és következménye

$$\mathbf{y}^2 = \begin{bmatrix} 78 \\ 240 \\ 134 \end{bmatrix} > \mathbf{y}^1.$$

Lássuk be, hogy $\mathbf{x}^2$ efficiens program, hiszen a

$$\mathbf{p}^* \begin{bmatrix} {}^2/_5 & -{}^1/_{25} \\ 0 & -{}^5/_{25} \\ -{}^1/_5 & -{}^3/_{25} \end{bmatrix} \leqq \mathbf{0}^*$$

egyenlőtlenségrendszernek van pozitív megoldása, pl.

$$\mathbf{p}_0^* = [1, 1, 3].$$

Mivel a $[1,\ 1,\ 3,] \begin{bmatrix} ^3/_5 & -^1/_{25} \\ 0 & -^5/_{25} \\ -^1/_5 & -^3/_{25} \end{bmatrix} = [0, -3/5]$ vektornak az első komponense zérus, v_1 bevonható a bázisba és ezáltal új efficiens bázisprogramot kapunk.

	u_1	u_2	
v_1	$^1/_8$	$-^1/_{40}$	20
v_2	$-^1/_{20}$	$^1/_{20}$	0
x_1	$^1/_8$	$-^1/_{40}$	70
x_2	$-^1/_{20}$	$^3/_{100}$	20
	$-^3/_{40}$	$-^1/_{40}$	-90
	0	$-^5/_{25}$	-240
	$^1/_{40}$	$-^1/_8$	-130

Az új program: $\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix}$; következményvektora:

$$\mathbf{y}^3 = \begin{bmatrix} 90 \\ 240 \\ 130 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $\mathbf{y}^2$ és $\mathbf{y}^3$ nem hasonlíthatók össze. Viszont $\mathbf{x}^3$ efficiens, hiszen a

$$\mathbf{p}^* \begin{bmatrix} -^3/_{40} & -^1/_{40} \\ 0 & -^5/_{25} \\ -^1/_{40} & -^1/_8 \end{bmatrix} \leqq \mathbf{0}^*$$

egyenlőtlenségrendszernek van pozitív megoldásvektora.

Több efficiens bázismegoldás nem található, de minden

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}^3 \ (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

program efficiens.

(Beérkezett: 1963. szeptember 6.)

IRODALOM

[1] BALINSKI, M. L.: „An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets." *Journ. of the Soc. for Ind. and Appl. Math.* **9** (1961) 72—88.

[2] CHARNES, A.—COOPER, W.—HENDERSON, R.: *An Introduction to Linear Programming.* John Wiley. New York. 1953.

[3] CHARNES, A.—COOPER, W.: „Management Models and Industrial Applications of Linear Programming." *Management Science* **4** (1957) 38—92.

[4] CHARNES, A.—COOPER, W.: *Management Models and Industrial Application of Linear Programming.* John Wiley, New York, 1961. I—II.

[5] Koopmanns, T. C.: *Activity Analysis of Production and Allocation.* John Wiley, New York. 1961.

[6] Krekó Béla: *Lineáris programozás.* Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest. 1962.

[7] Krekó Béla: ,,Über einige neue Untersuchungen in der Theorie der mathematischen Optimierung.'' *A ,,Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Kollokvium'' (Budapest, 1963) kiadványkötete,* s. a.

[8] Lipták Tamás: ,,Szukcesszív módszer lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására. — Alkalmazások lineáris és nem-lineáris programozásban''. (Kéziratban) Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központ, 1961.

[9] Uzawa, S.: ,,An Elementary Method for Linear Programming.'' Megjelent az Arrow—Hurwicz—Uzawa: *Studies in Linear and Non-Linear Programming* című kötetben. Stanford University Press. 1958.

[10] Wintgen, G.: ,,Über den Zusammenhang der Uzawamethode der linearen Optimierung mit der Methode der vollständigen Beschreibung von Motzkin, Raiffa, Thompson und Thrall.'' *A ,,Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Kollokvium'' (Budapest, 1963) kiadványkötete,* s.a.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ОДНОВРЕМЕННО ЗАДАННЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

P. BOD

Резюме

Исследуются такие экономические проблемы, возможные следствия решений которых необходимо оценивать с различных точек зрения. Так эффективность всех допустимых в рамках ограничивающих условий решений измеряется векторами (конечной размерности в силу нашего предположения).

В случае программ с линейным решением к множеству возможных решений

$$L = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\,; \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

относится множество следствий

$$K = \left\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \begin{pmatrix} C_1^* \mathbf{x} \\ C_2^* \mathbf{x} \\ \vdots \\ C_k^* \mathbf{x} \end{pmatrix} = C\mathbf{x}\,; \quad \mathbf{x} \in L \right\}.$$

Для того, чтобы выяснить сущность оптимальных решений, появляется необходимость в упорядочивании множества K. Для этого имеются следующие возможности:

1. Можно задать такой порядок важности целевых функций, что любое маленькое преимущество более важной, чем остальные, целевой функции считается сильнее, чем какой бы то ни было недостаток всех менее важных целевых функций.

Множество оптимальных программ можно определять методами линейного программирования.

2. На множестве K можно задать такую вектор-скалярную функцию, которая выражает общую эффективность возможных программ.

Определение всех оптимальных программ приводит к вычислению максимума функции (не обязательно линейной) при определенных линейных условиях.

3. На множестве K возможны только частичные упорядочивания посредством отдельных целевых функций.

В этом случае программирование сводится к отысканию так называемых эффициентных программ.

Для определения эффициентных программ можно дать простой метод, основанный на нескольких свойствах эффициентных точек множества следствий. Однако этот метод требует больших вычислений в виду того, что при расчетах употребляются все максимальные точки множества решений и большинство максимальных точек множества следствий.

Проблему эффициентных уровней производства линейных производственных моделей изучали в 1957 г. CHARNES и COOPER. Их результаты можно применить к рассматриваемой здесь проблеме. В следствие этого в нашем распоряжении имеются две теоремы, с помощью которых можно определять программы с эффициентными следствиями или о любой возможной программе можно сказать, эффициентна она или нет.

Обычный критерий оптимальности симплексного метода можно обобщить в критерий, определяющий эффициентные программы.

ÜBER LINEARE OPTIMIERUNG GEMÄSS SIMULTAN GEGEBENEN ZIELFUNKTIONEN

von

P. BOD

Zusammenfassung

Wir untersuchen solche lineare wirtschaftliche Entscheidungsprobleme, in denen man den Erfolg der zulässlichen Lösungen aus mehreren Gesichtspunkten bewerten muss. So wird der ökonomische Wirkungseffekt der einzelnen zulässlichen Programme durch Vektoren endlicher Dimension gemessen.

Im Falle linearer Entscheidungsprobleme gehört zu der Menge der zulässlichen Lösungen

$$L = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\ ;\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

eine Menge der Konsequenzen:

$$K = \left\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1^* \mathbf{x} \\ C_2^* \mathbf{x} \\ \vdots \\ C_k^* \mathbf{x} \end{bmatrix} = C\mathbf{x}\ ;\quad \mathbf{x} \in L \right\}.$$

Um optimale Entscheidungen deuten zu können, muss ein aus ökonomischem Standpunkt gerechtfertigtes Ordnen auf der Menge K definiert werden können: Es bieten sich die folgenden Möglichkeiten:

1. Es kann eine Wichtigkeitsreihenfolge der Zielfunktionen so angegeben werden, dass ein noch so geringer Vorteil nach einer wichtigeren Zielfunktion starker sei, als jeder Nachteil nach dem weniger wichtigen Zielfunktionen.

Die Menge der optimalen Lösungen kann mittels einer zweckmässig geführten linearen Optimierung erhalten werden.

2. Es gibt eine Skalar-Vektor-Funktion auf der Menge K, die den Gesamtnutzeffekt der zulässlichen Lösungen ausdrückt.

Um das Optimum zu finden, muss man den Maximum einer durch linearen Ungleichungen beschränkten, jedoch nicht notwendig linearen Funktion bestimmen.

3. Auf der Menge K besteht nur das durch die verschiedenen Zielfunktionen bestimmte Partialordnen.

Die Optimierung kann sich in diesem Falle nur auf die Herstellung der sogenannten effizienten Programme richten.

Auf Grund einiger einfachen Eigenschaften der effizienten Punkte der Konsequenzmenge kann ein naheliegendes Verfahren zur Herstellung effizienter Programme angedeutet werden. Das Verfahren ist stark rechnungsanspruchvoll, da es sämtliche Extremalpunkte der Menge L und fast sämtliche Extremalpunkte der Menge K tatsächlich benutzt.

Charnes und Cooper untersuchten im Jahre 1957 das Problem der effizienten Nettoproduktionsmöglichkeit in den linearen Produktionsmodellen. Ihre Ergebnisse kann man auf das hier untersuchte Problem umformulieren. Man erhalt so zwei Sätze, mit denen man Programme effizienten Erfolges herstellen kann, und über alle zulässliche Lösungen entscheiden kann, ob sie effizient sind oder nicht.

Das übliche Optimalitätskriterium des Simplex-Verfahrens lässt sich leicht zum Kriterium der Effizienz verallgemeinern.