

# KÖTÉLPÁLYA ÍVEK MEGHATÁROZÁSA AZ ÍV GEOMETRIAI ADATAIBÓL

BÉKÉSSY ANDRÁS, BIHARI IMRE és MEGYERI JENŐ<sup>1</sup>

## 1. Bevezetés

A kötélpályán való szállítás az utóbbi években más szállítási ágazatokhoz viszonyított előnyei révén jelentősen fellendült. A felszabadulás óta eltelt időszakot tekintve, Magyarországon a teherszállító kötélpályák összhossza megkétszereződött, teljesítőképességük pedig még nagyobb arányban növekedett. Úgy a hazai, mint hasonló külföldi eredmények — az utóbbiak főleg a személyszállítás területén — fokozottan megkívánják a kötélpályákkal kapcsolatos egyes elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos problémák tisztázását.

A kötélérő és más geometriai, ill. mechanikai adatok meghatározására szolgáló eddig ismert eljárásoknál a pontosságot a feszítősúllyal feszített tartókötélű pályáknál a feszítősúly ismeretén kívül főleg a súrlódás hatásának figyelembevétele (súrlódási tényező felvétele) befolyásolja, míg a mindkét végén rögzített tartókötélű sodronykötélpálya esetében a kötélérő meghatározása még nehezebben kezelhető és körülményesebb feladat.

Az általunk kidolgozott eljárás segítségével a kötélív három pontjának bemérése útján lehetőség nyílik mind a feszítősúlyos, mind a rögzített tartókötélű sodronykötélpályák hossz-szelvényeinek tetszés szerinti helyén a geometriai, valamint erőtani (kötélérő, stb.) mennyiségek egyszerű, gyors és pontos meghatározására. A jelen tanulmányban az erőtani adatok meghatározására azonban nem térünk ki, mivel ezek a kötélgörbe paramétereinek ismeretében a szokásos módon számíthatók.

Jelöljük az  $A$  és  $B$  kötélpálya-állványok közötti kötélív három, egymástól  $h$  vetületi távolságra fekvő pontját  $P_1, P_2, P_3$ -mal (1. ábra).

A  $h$  távolság felvétele után geodéziai szögmérő műszer (teodolit), illetve hossz mérés segítségével a  $h_1$ , ill.  $h_2$  magasság-különbségek meghatározhatók. A feladat tehát adott  $h, h_1, h_2$  értékekhez a kötélgörbe jellemzőinek, elsősorban is a kötélgörbe paramétereinek meghatározása.

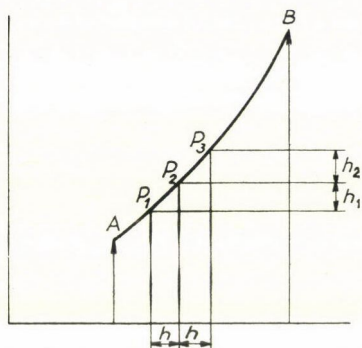
## 2. A kötélgörbe-paraméter meghatározására szolgáló képlet levezetése

A pálya két szomszédos állvány közé eső ívének az egyenlete alkalmas koordinátarendszerben

$$(1) \quad y = c \left( \operatorname{ch} \frac{x}{c} - 1 \right).$$

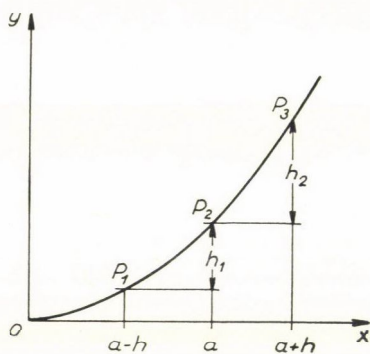
<sup>1</sup> Közlekedés- és Postaügyi Minisztérium.

A feladat a  $c$  paraméter meghatározása. A felvett három, — vízszintesen ekvidisztáns pont legyen  $P_1, P_2, P_3$  és legyen  $P_2$  abszcisszája  $a$ . A  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) pont vetületét  $P'_i$ -vel jelölve legyen  $P'_1 P'_2 = P'_2 P'_3 = h$  és a  $P_2$ -höz viszonyított relatív magasságok  $h_1$ , ill.  $h_2$ . A  $P_i$  pontok egymáshoz viszonyított helyzete

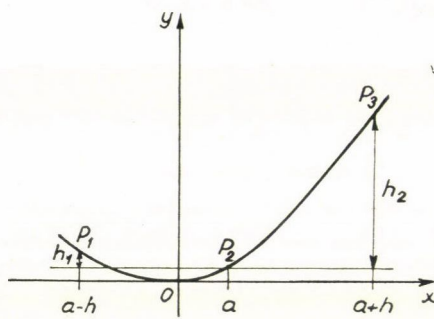


1. ábra.

akár a 2a ábra, akár a 2b ábra szerinti lehet. Megállapodunk azonban abban, hogy  $P_2$  mindig a középső pontot jelentse,  $P_3$  legyen az a pont (vagy a kettő közül az egyik olyan pont), amely  $P_2$ -nél magasabban fekszik, és amennyiben  $P_1$  is magasabban lenne mint  $P_2$ , akkor a  $h_1$  értékét negatív előjellel vesszük.



2a. ábra.



2b. ábra.

Meghatározandó  $h, h_1, h_2$  ismeretében a  $c$  paraméter és az ugyancsak ismeretlen  $a$  abszcissza.

A 2. ábra szerint e mennyiségek között (1) figyelembevételével a

$$(2) \quad c \operatorname{ch} \frac{a+h}{c} = c \operatorname{ch} \frac{a}{c} + h_2$$

$$c \operatorname{ch} \frac{a-h}{c} = c \operatorname{ch} \frac{a}{c} - h_1$$



egyenletek állnak fenn, amelyekből  $c$ -t és  $a$ -t kell meghatározunk. A (2) egyenletekből összeadással ill. kivonással a

$$(3) \quad \frac{h_2 - h_1}{2c \left( \operatorname{ch} \frac{h}{c} - 1 \right)} = \operatorname{ch} \frac{a}{c}, \quad \frac{h_2 + h_1}{2c \operatorname{sh} \frac{h}{c}} = \operatorname{sh} \frac{a}{c}$$

összefüggésekre jutunk, amelyekből a  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$  összefüggés felhasználásával az  $a$  paramétert kiküszöbölve az egyetlen ismeretlent tartalmazó

$$(4) \quad \frac{(h_2 - h_1)^2}{4c^2 \left( \operatorname{ch} \frac{h}{c} - 1 \right)^2} - \frac{(h_2 + h_1)^2}{4c^2 \operatorname{sh}^2 \frac{h}{c}} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ebből azonban  $c$  nem fejezhető ki elemi függvények segítségével.

A  $c$  paraméter meghatározására ezek után két lehetőség kínálkozik: a) numerikus egyenletmegoldó módszer; b) nomogram. Mindkét lehetőséget tárgyaljuk, mivel önmagában egyik módszer sem teljesen kielégítő; a numerikus számítás némileg fáradságos, a nomogram viszont, amely gyors és kényelmes, nem mindig ad elég pontos eredményt.

Mielőtt rátérnénk a felvázolt módszerek kidolgozására, a (4) képletet új változók bevezetésével kissé egyszerűbb alakra hozzuk: legyen

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma = \frac{h}{c}, \\ u = \frac{h_1 + h_2}{h}, \quad v = \frac{h_2 - h_1}{h}. \end{cases}$$

Igy a (4) alapegyenlet a

$$(6) \quad \frac{v^2 \gamma^2}{4(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} - \frac{u^2 \gamma^2}{4 \operatorname{sh}^2 \gamma} = 1$$

alakot ölti, ebben  $u$  és  $v$  ismert mennyiségek,  $\gamma$  ismeretlen.

Ha a  $\gamma$  mennyiség már számszerűen meg van határozva, akkor például a (3) egyenletpár második képletéből, amely

$$\frac{u \gamma}{2 \operatorname{sh} \gamma} = \operatorname{sh} \frac{a}{c}$$

alakba írható át, kiszámíthatjuk az  $a$  ismeretlent is:

$$(7) \quad a = \frac{h}{\gamma} \operatorname{arsh} \frac{u \gamma}{2 \operatorname{sh} \gamma}.$$

### 3. Nomogramok tervezése $\gamma$ kiszámításához

Mint látható, a (6) háromváltozós kapcsolat nomográfiai rendszáma négy, típusa pedig Cauchy-típus. Ennélfogva egyszerűen ábrázolható két egyenes és egy görbe tartójú pontsoros nomogrammal [1]. Soreau-determinánása, tehát az a determináns, amely egyenértékű a (6) egyenlettel, lehet például

$$\begin{vmatrix} 0 & v^2 & 1 \\ 1 & u^2 & 1 \\ -\gamma^2 & 4 \operatorname{sh}^2 \gamma & \frac{2\gamma^2}{\operatorname{ch} \gamma - 1} \end{vmatrix} = 0,$$

vagy némi átalakítással

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 0 & v^2 & 1 \\ 1 & -u^2 & 1 \\ \gamma^2 & 4 \operatorname{sh}^2 \gamma & \frac{2\gamma^2 \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{ch} \gamma - 1} \end{vmatrix} = 0.$$

Az utóbbi determinánsból vezethető le olyan nomogramalak, amelynél a  $\gamma$  eredményváltozó skálája a két adatváltozó skálája között helyezkedik el. Általában ezt az utóbbi alakot szokás használni, mi is ezt terveztük meg, azonban csak bizonyos fenntartással, mert úgy tűnik, hogy az adatok bizonyos kombinációinál ez az alak volna előnyösebb, amelynél az eredményskála az  $u$  ill.  $v$  skáláin kívül van.

A (8) alapterminánsból adódó nomogram még nem volna megfelelő, ezt az alakot a szokásos módon projektív transzformációnak alávetve végül is a következő skálaegyenletek adódnak:

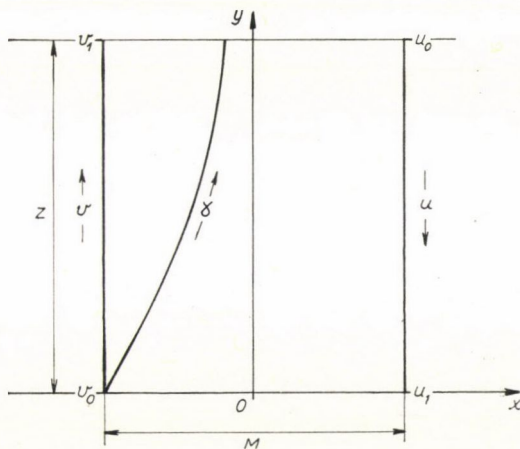
$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \text{ skála:} \\ x_u = \frac{M}{2}, \quad y_u = N \frac{u_1^2 - u^2}{u_1^2 - u_0^2}; \\ v \text{ skála:} \\ x_v = -\frac{M}{2}, \quad y_v = N \frac{v^2 - v_0^2}{v_1^2 - v_0^2}; \\ \gamma \text{ skála:} \\ x_\gamma = \frac{M}{2} \frac{(u_1^2 - u_0^2) \operatorname{th}^2 \gamma/2 - (v_1^2 - v_0^2)}{(u_1^2 - u_0^2) \operatorname{th}^2 \gamma/2 + (v_1^2 - v_0^2)}, \\ y_\gamma = N \frac{\left(u_1^2 + 4 \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma}{\gamma^2}\right) \operatorname{th}^2 \gamma/2 - v_0^2}{(u_1^2 - u_0^2) \operatorname{th}^2 \gamma/2 + (v_1^2 - v_0^2)}, \end{array} \right.$$

ahol  $M$  a nomogram szélessége,  $N$  a magassága,  $u_0, u_1$  az  $u$  skálának,  $v_0, v_1$  pedig a  $v$  skálának adott szélső értékei (3. ábra). Behelyettesítéssel könnyen

meggyőződhetünk arról, hogy a (7) kifejezésekkel vett

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & 1 \\ x_v & y_v & 1 \\ x_\gamma & y_\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet valóban egyenértékű a (6) egyenlettel.



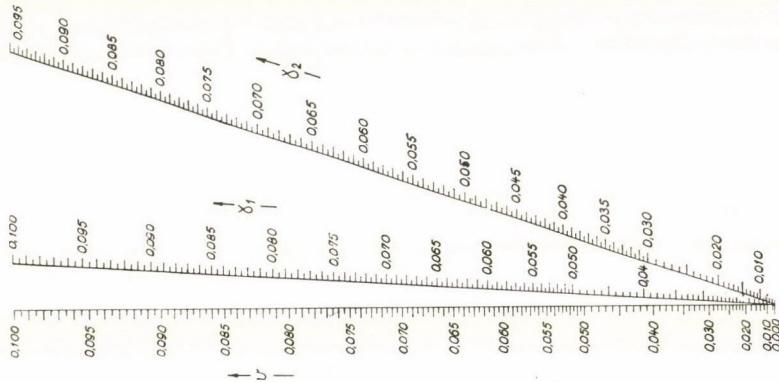
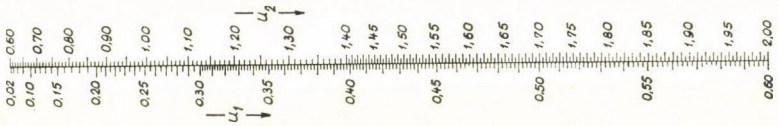
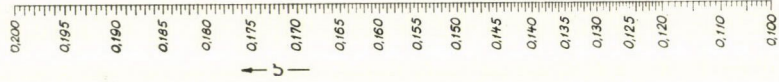
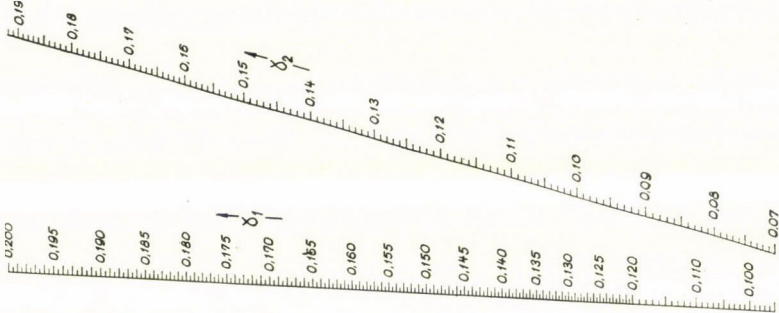
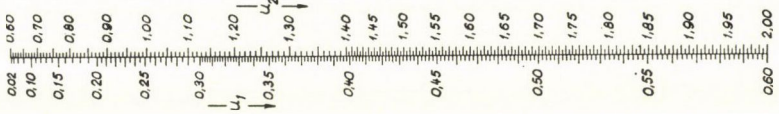
3. ábra.

A méréseknél előforduló adatok elemzéséből kitűnik, hogy az  $u$  ill.  $v$  értékhatárai gyanánt a következőket érdemes venni:

$$0 \leq v \leq 0,7, \quad 0 \leq u \leq 2.$$

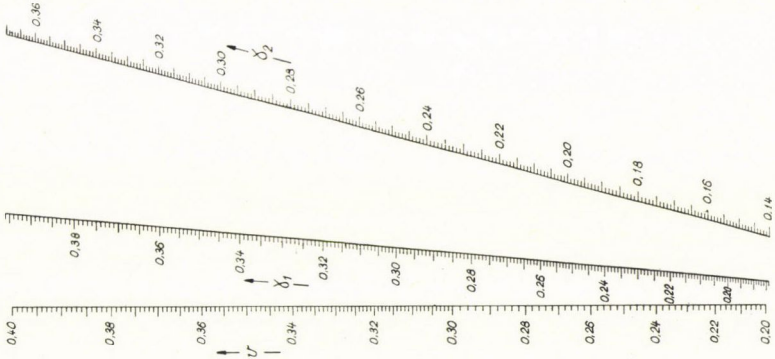
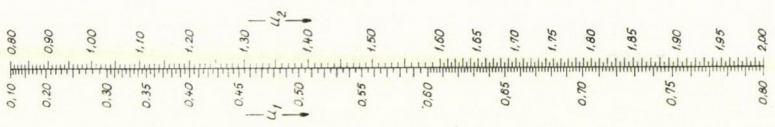
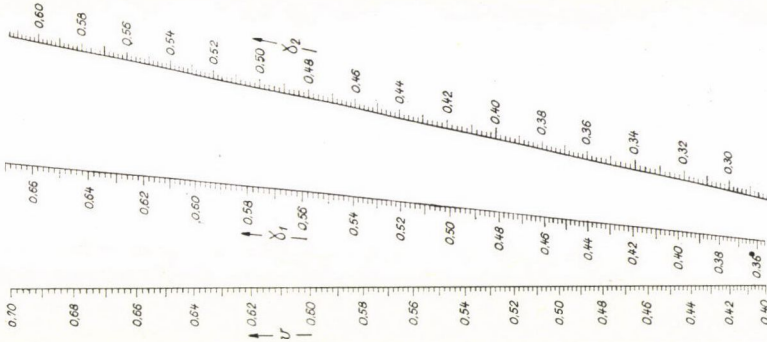
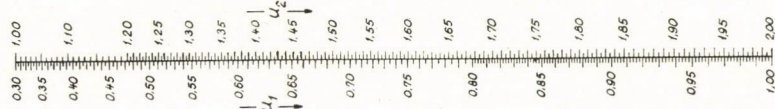
Ilyen értékhatárok mellett azonban egyetlen nomogrammal nem tudtuk a meghatározandó  $\gamma$  számára megfelelő leolvasási pontosságot biztosítani és a nomogram további transzformálása sem hozott megfelelő eredményt. Ezért a jelzett értéktartományt *nyolc* részre bontottuk, más szóval tulajdonképpen nyolc nomogramot terveztünk, de olyan módon, hogy kettő-kettő  $v$  skálája azonos,  $u$  skálája pedig közös tartójú. Így például az első nomogram-páron  $0 \leq v \leq 0,1$  (ez közös skála), az egyikén  $0 \leq u \leq 0,6$ , a másikon  $0,6 \leq u \leq 2$  (a tartójuk közös), a  $\gamma$  skálatartók különbözőek, a befelé vonalkázott  $u$  értékekhez a baloldali, a kifelé vonalkázott  $u$  értékekhez pedig a jobboldali  $\gamma$  skálatartó tartozik. Hasonlóképpen van megtervezve a másik három nomogram-pár. E nomogram-párok típusa azonos, pontos kivitelben láthatók a 4–7. ábrán. Megnéztük, hogy az egyes résznomogramok külön-külön való transzformálása nem javítaná-e a skálák osztásviszonyait, arra az eredményre jutottunk azonban, hogy az elérhető javulás nem számottevő.





5. ábra.

4. ábra.



7. ábra.

6. ábra.

#### 4. A $\gamma$ számítása numerikus közelítő eljárással

Az első nomogrampár semmilyen kiviteli formájában sem teljesen kielégítő, mert kicsiny  $v$  és  $u$  értékek mellett beállított vonalzó a skálát igen lapos szög alatt metszi, ez pedig a leolvasási pontosság erős romlásával jár, és ezen még az sem segít teljes mértékben, hogy a  $\gamma$  skála a résznomogramokra való bontás következtében kicsiny  $v$  értékeknél erősen nyújtott. A kicsiny  $\gamma$  értékek nagy pontossággal való meghatározása viszont azért fontos, mert  $\gamma$  általában éppen akkor kicsiny, ha  $c$  nagy.

Ha a nomogramok nyújtotta pontosság nem elegendő, akkor  $\gamma$  megfelelő pontosságú kiszámítása némi numerikus számolás árán az alábbi módszerrel lehetséges.

Először is megmutatjuk, hogy a

$$(10) \quad \gamma_0 = \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} u^2}}$$

képlet kicsiny  $v$  értékeknél igen jó közelítést jelent — ilyen közelítő értéket természetesen a nomogramokról is leolvashatunk —, azután pedig megmutatjuk, hogy amennyiben akár a (10) képlettel kapott eredmény, akár a nomogramokról leolvasható eredmény nem volna elegendően pontos, akkor hogyan lehet igen gyorsan konvergáló iteratív eljárással a kapott közelítés pontosságát fokozni.

**A. A (10) képlet elemzése.** A pontos (6) összefüggésből

$$v = \frac{2(\operatorname{ch} \gamma - 1)}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{u^2}{4} \left( \frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \right)^2},$$

és felhasználva a  $(\operatorname{ch} \gamma - 1)/2 = \operatorname{sh}^2 \gamma/2$  azonos összefüggést,

$$v = \gamma \left( \frac{\operatorname{sh} \gamma/2}{\gamma/2} \right)^2 \sqrt{1 + \frac{u^2}{4} \left( \frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \right)^2};$$

ebből pedig

$$(11) \quad \gamma = \frac{v \left( \frac{\gamma/2}{\operatorname{sh} \gamma/2} \right)^2}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4} \left( \frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \right)^2}}.$$

Ha azonban  $(0 \leq) \gamma \ll 1$ , akkor

$$\frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \approx 1,$$

és így  $\gamma$ -ra jó közelítéssel a (10) érték adódik.

Kérdés, hogy mekkora  $\gamma_0$  hibája. A (11) egyenletből  $\gamma \leq \operatorname{sh} \gamma$ ,  $\gamma/2 \leq \operatorname{sh} \gamma/2$  figyelembevételével adódik, hogy

$$\gamma \leq v$$



(elhagytuk ugyanis (11) nevezőjét), és hasonlóképpen (11)-ből

$$\gamma \geq \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} \left( \frac{\gamma/2}{\operatorname{sh} \gamma/2} \right)^2 = \gamma_0 \left( \frac{\gamma/2}{\operatorname{sh} \gamma/2} \right)^2,$$

de  $\gamma/\operatorname{sh} \gamma$  a  $\gamma$  változónak csökkenő függvénye, tehát  $\gamma < v$  lévén

$$(12) \quad \gamma \geq \gamma_0 \left( \frac{v/2}{\operatorname{sh} v/2} \right)^2, \quad \text{illetőleg} \quad \frac{\gamma_0}{\gamma} \leq \left( \frac{\operatorname{sh} v/2}{v/2} \right)^2.$$

Továbbá (10) és (11) szerint

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_0}{\gamma} &= \left( \frac{\operatorname{sh} \gamma/2}{\gamma/2} \right)^2 \sqrt{\frac{1 + u^2/4 \cdot (\gamma/\operatorname{sh} \gamma)^2}{1 + u^2/4}} \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{1 + u^2/4 \cdot (\gamma/\operatorname{sh} \gamma)^2}{1 + u^2/4}} \geq \sqrt{\frac{1 + u^2/4(v/\operatorname{sh} v)^2}{1 + u^2/4}} \end{aligned}$$

(mert — ismételve —  $\gamma/\operatorname{sh} \gamma$  csökkenő függvény és  $\gamma < v$ ), de ez így is írható:

$$(13) \quad \frac{\gamma_0}{\gamma} > \frac{v}{\operatorname{sh} v} \cdot \frac{\sqrt{\left( \frac{\operatorname{sh} v}{v} \right)^2 + \frac{u^2}{4}}}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} > \frac{v}{\operatorname{sh} v},$$

tehát összefoglalva a (12) és (13) becslést:

$$(14) \quad \frac{v}{\operatorname{sh} v} \leq \frac{\gamma_0}{\gamma} \leq \left( \frac{\operatorname{sh} v/2}{v/2} \right)^2.$$

Ha például  $v < 0,24$ , akkor (az  $u$  értékétől függetlenül)  $\gamma$  relatív hibája kisebb mint 1%. ( $0,99 < \gamma_0/\gamma < 1,01$ ), ha pedig  $v < 0,1$ , akkor kisebb mint 0,2% ( $0,998 < \gamma_0/\gamma < 1,001$ ).

**B) Iteratív javítás.** A (10) közelítő képletből (vagy a nomogramokról) nyert  $\gamma_0$  közelítés pontossága a következő, (iteratív használható) képlet alapján javítható:

$$(15) \quad \gamma_{n+1} = \frac{v}{\left( \frac{\operatorname{sh} \gamma_n/2}{\gamma_n/2} \right)^2 \sqrt{1 + \left( \frac{u}{2} \cdot \frac{\gamma_n}{\operatorname{sh} \gamma_n} \right)^2}}.$$

Ez a képlet a (11) összefüggésből származik. A (15) jobboldalán álló kifejezés  $\gamma_n$  szerinti deriváltja kis  $v$  értékekre kicsiny, tehát az iterációnak igen gyorsan kell konvergálnia, minél kisebb  $v$ , annál gyorsabban. Emellett rögzített  $v$  értékekre az iteráció annál gyorsabban konvergál, minél nagyobb az  $u$ . Illusztrációul szolgáljanak a következő példák (1. táblázat). (Az első közelítő értéket, — a  $\gamma_0$ -at — a (10) képlet szolgáltatta). A  $\gamma_n$  közelítések egységesen 6

tizedesjegyre voltak kiszámítva. Avégett, hogy jól áttekinthető legyen, miként helyezkednek el az egymásutáni  $\gamma_n$  közelítések a pontos  $\gamma$  érték körül, a táblázaton a pontos értéktől való eltéréseket, a

$$\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma$$

értékeket tüntettük fel. „Pontos” értéknek itt a hat tizedes jegyre pontos értékeket tekintettük.

1. TÁBLÁZAT

	$u =$ 0,2	1,0	2,0
$v =$	$\gamma = 0,099\ 423$	$\gamma = 0,089\ 407$	$\gamma = 0,070\ 711$
0,2	$\Delta\gamma_0 = 0,000\ 080$ $\Delta\gamma_1 = 0,000\ 000$	$\Delta\gamma_0 = 0,000\ 036$ $\Delta\gamma_1 = 0,000\ 000$	$\Delta\gamma_0 = 0,000\ 000$
0,4	$\gamma = 0,393\ 028$ $\Delta\gamma_0 = 0,004\ 987$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 126$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 003$	$\gamma = 0,355\ 491$ $\Delta\gamma_0 = 0,002\ 280$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 053$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 001$	$\gamma = 0,282\ 826$ $\Delta\gamma_0 = 0,000\ 016$ $\Delta\gamma_1 = 0,000\ 000$
0,8	$\gamma = 0,759\ 491$ $\Delta\gamma_0 = 0,036\ 539$ $\Delta\gamma_1 = -0,003\ 494$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 327$ $\Delta\gamma_3 = -0,000\ 031$ $\Delta\gamma_4 = 0,000\ 003$	$\gamma = 0,697\ 588$ $\Delta\gamma_0 = 0,017\ 953$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 962$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 051$ $\Delta\gamma_3 = -0,000\ 003$	$\gamma = 0,565\ 176$ $\Delta\gamma_0 = 0,000\ 509$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 002$

A táblázatból látható például, hogy ha  $v \leq 0,2$ , akkor ( $u$  értékétől függetlenül) a  $\gamma$  értékét hat tizedesnyi pontossággal megadja a  $\gamma_1$ , tehát e pontosság eléréséhez elegendő a (15) képlet egyszeri használata.  $v$  növelésével a konvergencia gyorsasága rohamosan romlik, de még  $v = 0,8$ -nál is minden iteráció egy-egy újabb értékes jegyet ad meg.

### 6. A mérési hibák kihatása a paraméterek értékére

A  $\gamma$  paraméter  $\Delta\gamma$  hibája az  $u$ ,  $v$  mennyiségek hibájától függ, ezek viszont a  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h$  mennyiségek mérésének pontosságától függnnek. A (6) képletből megállapítható az összefüggés  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  és  $\Delta\gamma$  között; feltéve, hogy  $v > 0$ , és alkalmazva a hibaszámításban szokásos eljárást,

$$\Delta\gamma = \frac{\frac{\gamma^2 v \Delta v}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} + \frac{\gamma^2 u \Delta u}{\operatorname{sh}^2 \gamma}}{\frac{\gamma^2 v^2 \operatorname{sh} \gamma}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^3} + \frac{u^2 \gamma}{\operatorname{sh}^2 \gamma} - \frac{v^2 \gamma}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} - \frac{\gamma^2 u^2 \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{sh}^3 \gamma}}$$



adódik, majd a (6) összefüggés felhasználásával egyszerűsítve

$$\Delta\gamma = \frac{\frac{\gamma^2 v \Delta v}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} + \frac{\gamma^2 u \Delta u}{\operatorname{sh}^2 \gamma}}{\frac{4}{\gamma} \left( \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{sh} \gamma} - 1 \right) + \frac{v^2 \gamma^2}{\operatorname{sh} \gamma (\operatorname{ch} \gamma - 1)^2}}.$$

Itt a nevező két nem-negatív tag összegéből áll, tehát a becslésnél elhagyhatjuk az első tagot. A becslést ezáltal nem rontjuk nagyon, mert ha  $v$  kicsiny, akkor

$$\frac{4}{\gamma} \left( \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{sh} \gamma} - 1 \right) \sim \frac{4}{3} \gamma < \frac{4}{3} v,$$

$$\frac{v^2 \gamma^2}{\operatorname{sh} \gamma (\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} \sim \frac{4 v^2}{\gamma} > \frac{4}{v},$$

tehát az első tag sokkal kisebb a másodiknál. Az első tag elhagyásával és ismét a (6) képletnek egyszerűsítésre való alkalmazásával a következő becslést kapjuk:

$$\Delta\gamma < \operatorname{sh} \gamma \frac{\Delta v}{v} + \operatorname{sh} \gamma \frac{u}{4 + u^2} \Delta u,$$

és  $u/(4 + u^2) \leq 1/4$  miatt még egyszerűbben

$$(16) \quad \Delta\gamma < \operatorname{sh} \gamma \left( \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta u}{4} \right).$$

Ha  $\gamma$  kicsiny, akkor nem tévedünk veszélyesen sokat, ha a (16) egyenlőtlenségben  $\operatorname{sh} \gamma$  helyébe  $\gamma$  kerül és  $\gamma$  hibakorlátjának a  $\gamma(\Delta v/v + \Delta u/4)$  értékét tekintjük. Ha  $v < 0$  volna, akkor  $v$  helyébe  $|v|$ -et írunk. Feltehető továbbá, hogy  $\Delta u = \Delta v$ , úgyhogy végül is

$$(17) \quad \Delta\gamma \sim \gamma \Delta u \left( \frac{1}{|v|} + \frac{1}{4} \right), \quad (\gamma \ll 1).$$

Ehhez járul még leolvasási hiba, ha  $\gamma$  értékét valamelyik nomogramról vettük.

A  $\Delta u$  hibakorlátot ( $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h$  feltételezés mellett) a

$$(18) \quad \Delta u = \frac{\Delta h}{h} (2 + u)$$

kifejezés adja, amely az  $u = (h_1 + h_2)/h$  egyenlőségből adódik, és végül a  $c = h/\gamma$  összefüggésből

$$(19) \quad \Delta c = c \left( \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right).$$

Valamivel jobb becslést kapnánk  $c$  hibakorlátjára, ha ennek megállapítására független mérési adatokat tartalmazó képletekből indulnánk ki. A  $\Delta c$  meghatározására szolgáló képletek azonban bonyolultabbak lennének, az elérhető javulás pedig nem nagyon jelentős. Megjegyzendő még, hogy itt is, mint



általában, a tényleges hiba rendszerint jóval kisebb a (17), (18), (19) képletekkel becsült hibakorlátnál, mert ezek a képletek a mérési hibáknak lehető leg-szerencsétlenebb kombinációját feltételezve adódnak, és ezenfelül, az egy-szerűségük kedvéért durvábbak a kelleténél.

**Példa.** Legyen  $h = 250,00$  m,

$$h_1 = 56,88 \text{ m,}$$

$$h_2 = 123,59 \text{ m,}$$

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h = 1 \text{ cm.}$$

A  $c$  kiszámítására szolgáló képletek alapján

$$u = \frac{h_1 + h_2}{h} = 0,7219,$$

$$v = \frac{h_2 - h_1}{h} = 0,2668,$$

$$\gamma_0 = \frac{v}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2}} = 0,25$$

majd a (15) iterációs képletet alkalmazva

$$\gamma_1 = 0,2499,$$

$$c = \frac{h}{\gamma_1} = 1000,2 \text{ m,}$$

Alkalmazzunk hibaszámítást:

$$\Delta u = \Delta v = 2,72 \cdot \frac{0,01}{250} = \frac{0,027}{250}$$

$$\Delta \gamma = 0,25 \cdot \frac{0,027}{250} \left( \frac{1}{0,27} + \frac{1}{4} \right) = \frac{0,026}{250}$$

$$\Delta c = 1000 \cdot \left( \frac{0,01}{250} + \frac{0,026}{0,25} \cdot \frac{1}{250} \right) = 0,47 \text{ m.}$$

## 7. Összefoglalás

Szemben az irodalomban ismert meghatározási eljárásokkal [2], [3], [4], [5], amelyek kötélpálya-tervezés szempontjainak felelnek meg, a jelen dolgozatban azzal a problémával foglalkoztunk, hogy egy már megépített pálya geometriai ill. mechanikai jellemzőit kell meghatározni. Ilyen esetben, mint látható, a kötélív tényleges alakját jellemző geometriai mennyiségeknek megmérése és a fentebb ismertetett módszer segítségével mód van a kötélív

geometriai és mechanikai jellemzőinek az irodalomból ismert módszerek adta lehetőségeknél pontosabb meghatározására. A tényleges alak figyelembevételével kiküszöbölhetjük azokat a bizonytalanságokat, amelyek valamennyi, az irodalomból ismert eljárást terhelnek (mint amilyen például a támaszponti kötélerő nagyságát felhasználó módszernél a súrlódás hatása).

**Köszönetnyilvánítás.** A nomogrampontok kiszámításánál PULITU KULA működött közre, a kivitelezési munkákat pedig MESZLÉNYI MÁRIA és SÓLYOM IMRE végezték el. Ezúton fejezzük ki nekik köszönetünket.

(Beérkezett: 1963. november 5.)

#### IRODALOM

- [1] PENTKOVSKIJ, M. V.: *Nomográfia*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.  
 [2] FINDEIS, R.: *Rechnerische Grundlagen des Baues von Drahtseilbahnen*. Deuticke, Wien, 1923.  
 [3] STEPHAN, P.: *Die Drahtseilbahnen*. Berlin, Springer 1926.  
 [4] D'ARMINI: „La configurazione delle funi metalliche nel caso particolare delle funivie.” *Trasporti Pubblici* **3** (1955) 90—102.  
 [5] AMMENDOLA, L.: „La configurazione delle funi delle funivie per trasporto di persone”. *Ingegneria Ferroviaria* **10** (1948) 1—7.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВЫХ ПОДВЕСНОЙ ДОРОГИ ИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДУГ

A. BÉKÉSSY, I. BINARI и J. MEGYERI

#### Резюме

В работе рассматривается вопрос о том, как путём измерений трёх с одинаковыми абсциссами ординат цепной линии можно определить параметры кривой. Эта проблема приводит к одному трансцендентному уравнению, решать которое можно разными способами: а) с помощью приближённой формулы и оценки ошибок; б) приближённым итерационным методом; в) задавая номограмму и исследуя границы ошибок измерения, т. е. давая оценку для верхней границы неустраимых погрешностей.

В связи с этим возникает вопрос о том, каким путём можно определить динамические характеристики уже построенной подвесной дороги.

В произвольно выбранной системе координат уравнение цепной линии имеет вид:

$$y = c \left( \operatorname{ch} \frac{x}{c} - 1 \right).$$

Измерим в трёх точках  $a - h$ ,  $a$ ,  $a + h$  ординаты  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  и образуем их разности. Они определяют параметры кривой  $C$  (4). Пусть  $h_1 = y_2 - y_1$ ,  $h_2 = y_3 - y_2$

$$u = \frac{h_1 + h_2}{h}, \quad v = \frac{h_2 - h_1}{h}, \quad \gamma = \frac{h}{c},$$



тогда по известной паре значений  $u$  и  $v$  из номограммы можем определить величину  $\gamma$ , из которой легко вычисляется  $C$  (рис. 4—7). Кроме того для вычисления  $\gamma$  даётся приближенная формула (10) и формула для оценки погрешности (14). Для более точных вычислений предлагаем быстро сходящийся итерационный метод (15), для оценки нестранимой погрешности, получающейся в результате неточности измерений, приводятся формулы (16), (18) и (19).

## SOME METHODS FOR FINDING THE PARAMETERS OF A GIVEN CATENARY BY MEASURING ORDINATES

by

A. BÉKÉSSY, I. BIHARI and J. MEGYERI

### Abstract

The problem considered is: how to compute the parameters of a catenary by measuring its ordinates in three equidistant abscissas. For solving the equation deduced, we give (i) an approximation with error estimate, (ii) a numerical method (iteration), and (iii) nomograms. The equation of inherent errors is also treated.

The problem arose in connection with cable-railways.

In a certain Cartesian system of coordinates let the equation of a catenary be

$$y = c \left( \operatorname{ch} \frac{x}{c} - 1 \right)$$

and let  $y_1, y_2, y_3$  be the ordinates measured at the abscissas  $x_1 = a - h_1$ ,  $x_2 = a$ ,  $x_3 = a + h$  respectively. The quantities  $a$  and  $h$  are supposed to be known. Putting

$$h_1 = y_2 - y_1, \quad h_2 = y_3 - y_2$$

$$u = \frac{h_1 + h_2}{h}, \quad v = \frac{h_2 - h_1}{h}, \quad \gamma = \frac{h}{c},$$

the unknown quantity will be  $\gamma$ . As to the computation of  $\gamma$ , formula (10) may eventually be used as an approximation, whereas the quantities figuring in (14) are given as error bounds. For more accurate computations equation (15) is recommended.  $\gamma$  can be also read off from the nomograms (figs. 4—7), if the accuracy happens to be sufficient. Formulae (16), (18) and (19) give upper bounds for inherent errors caused by errors in measuring  $h_1$ ,  $h_2$  and  $h$ .