POLINOM APPROXIMÁCIÓK AZ $F_a(x) = \int\limits_0^x e^{-y^a}\,dy$ FÜGGVÉNY SZÁMÍTÁSÁHOZ

NÉMETH GÉZA[1]

Polinom approximációkat készítettünk az $F_a(x) = \int\limits_0^x \exp(-y^a)dy$ függvény számításához. Ez a függvény gyakran szerepel a matematika elméletében és alkalmazásaiban, pl. [1]. Az $\alpha = 2$ speciális eset a valószínűségszámításban a normális eloszlással kapcsolatos.

Tekintsük először a $0 \leq x \leq 4^{\frac{1}{a}}$ intervallumot. A $t = x/4^{\frac{1}{a}}$ jelöléssel az $F_a(x)$ függvényt az alábbi alakban állíthatjuk elő:

$$F_a(x) = x \int\limits_0^1 e^{-4t^a\eta^a}\, d\eta\,.$$

Mármost az approximációt úgy nyerjük a ,,faktor módszer'' szerint [2], hogy az e^{-4s} függvénynek

$$\sum_{n=0}^{12} a_n s^n + h_{12}$$

polinomközelítését helyettesítjük az integrandusba az $s = t^a\eta^a$ helyen és η szerint integrálunk; így az alábbit kapjuk:

$$F_a(x) = x\left\{\sum_{n=0}^{12} a_n \varrho_n^{(a)} t^{na} + H_{12}\right\}; \quad \varrho_n^{(a)} = \frac{1}{n\,a+1}, \qquad 0 \leq t = \frac{x}{4^{\frac{1}{a}}} \leq 1\,. \tag{1}$$

Az a_n együtthatók az I. táblázatban találhatók, a hiba

$$\overline{H}_{12} = \max_{0\leq t\leq 1} |H_{12}(t)| \sim 5\cdot 10^{-11}\,.$$

Az $x > 4^{\frac{1}{a}}$ intervallumban $F_a(x)$ lassan változik és $x \to \infty$ esetén konvergál a

$$\lim_{x\to\infty} F_a(x) = \int\limits_0^\infty e^{-y^a}dy = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

[1] Központi Fizikai Kutató Intézet, Számítástechnikai Osztály.

határértékhez. Ezért (és más szempontok miatt is) $F_a(x)$ helyett célszerűbb a

$$G_a(x) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - F_a(x)$$

függvényre keresni megfelelő approximációt. A $G_a(x)$ függvényt a következő alakban állíthatjuk elő (néhány elemi átalakítás után):

$$G_a(x) = \frac{4}{a\,x^{a-1}} e^{-x^a} \int_0^\infty e^{-4\eta} \frac{1}{(1+\sigma\eta)^{1-\frac{1}{a}}} \, d\eta ,$$

ahol $\sigma = 4/x^a$, $0 \leq \sigma \leq 1$. További átalakítás céljából alkalmazni fogjuk az alábbi képletet ($\alpha > 1$):

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \int_0^1 \omega^{-\frac{1}{a}} (1-\omega)^{\frac{1}{a}-1} \frac{1}{1+\omega\sigma\eta} \, d\omega = \frac{1}{(1+\sigma\eta)^{1-\frac{1}{a}}} .$$

Ezzel $G_a(x)$ a következő alakra hozható:

$$G_a(x) = \frac{e^{-x^a}}{a x^{a-1}} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \int_0^1 \omega^{-\frac{1}{a}} (1-\omega)^{\frac{1}{a}-1} \left[4 \int_0^1 e^{-4\eta} \frac{1}{1+\sigma\omega\eta} \, d\eta \right] d\omega .$$

A belső integrált $\sigma\omega \leq 1$ esetére Csebisev-polinomsor segítségével $\sigma\omega$ hatványai szerint haladó polinommal approximáltuk. Alkalmazzuk most ezt az approximációt:

$$4 \int_0^\infty e^{-4\eta} \frac{1}{1+s\eta} \, d\eta = \sum_{n=0}^{13} b_n s^n + k_{13} ,$$

ahol a b_n együtthatók a II. táblázatban vannak feltüntetve. Elvégezve az $s = \sigma\omega$ helyettesítést, továbbá az ω szerinti integrálást, megkapjuk $G_a(x)$ („faktor módszer" szerinti) polinom-közelítését:

$$\text{(2)} \qquad G_a(x) = \frac{e^{-x^a}}{a\,x^{a-1}} \left\{ \sum_{n=0}^{13} b_n \varrho_n^{(a)} \sigma^n + K_{13} \right\} , \qquad |K_{13}| < 3 \cdot 10^{-11} ,$$

ahol

$$\varrho_n^{(a)} = \frac{a\,n - 1}{a\,n} \varrho_{n-1}^{(a)} , \quad \varrho_0^{(a)} = 1 , \quad 0 \leq \sigma = \frac{4}{x^a} \leq 1 , \quad a \geq 1 .$$

Az (1) és (2) képletek igen alkalmasak az $F_a(x)$ függvény elektronikus számológéppel történő generálására. Egy ilyen gépi programban az a_n és b_n számokat tárolni kell, a $\varrho_n^{(a)}$ faktorokat a gépel számíthatjuk ki.

TÁBLÁZATOK

I.

n	a_n
0	0,999999 999950
1	— 3,999999 982819
2	7,999999 023469
3	— 10,666644 813853
4	10,666411 749824
5	— 8,531555 418061
6	5,680877 384294
7	— 3,226371 799450
8	1,573695 284838
9	— 0,645461 626061
10	0,208407 520870
11	— 0,046159 573811
12	0,005117 889741

II.

n	b_n
0	0,999999 999976
1	—0,249999 986416
2	0,124999 049056
3	—0,093723 572928
4	0,093357 196288
5	—0,113566 686720
6	0,153036 574720
7	—0,202889 650176
8	0,236419 088384
9	—0,221368 156160
10	0,154645 037056
11	—0,074417 438720
12	0,021810 380800
13	—0,002919 235584

(Beérkezett: 1963. november 20.)

IRODALOM

[1] ABRAMOWITZ, M.: „Table of the Integral $\int_0^x e^{-u^3} du$". *Journ. Math. and Phys.* **3** (1951) 162.
[2] NÉMETH, G.: „Construction of Approximations to Functions by the Factor Method." *Mathematics of Computation* (sajtó alatt).

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $F_\alpha(x) = \int_0^x e^{-y^\alpha} dy$ МНОГОЧЛЕНАМИ

G. NÉMETH

Резюме

Статья содержит формулы приближения функции $F_\alpha(x) = \int_0^x e^{-y^\alpha} dy$, дающие возможность вычислить эту функцию с точностью до 10 децимальных знаков в промежутке $0 \leqq x \leqq 4^{\frac{1}{\alpha}}$, а также функцию $G_\alpha(x) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - F_\alpha(x)$ в интервале $4^{\frac{1}{\alpha}} \leqq x < \infty$.

POLYNOMAPPROXIMATION DER FUNKTION $F_\alpha(x) = \int_0^x e^{-y^\alpha} dy$

von

G. NÉMETH

Zusammenfassung

Die Arbeit enthält bis auf 10 Stellen genaue Approximationsformeln für die oben definierte Funktion $F_\alpha(x)$ für $0 \leqq x \leqq 4^{\frac{1}{\alpha}}$ und für $G_\alpha(x) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - F_\alpha(x)$ für $4^{\frac{1}{\alpha}} \leqq x < \infty$.