HULLÁMOS LEMEZ DEFORMÁCIÓJA ADOTT TERHELÉS MELLETT II

BIHARI IMRE

Bevezetés

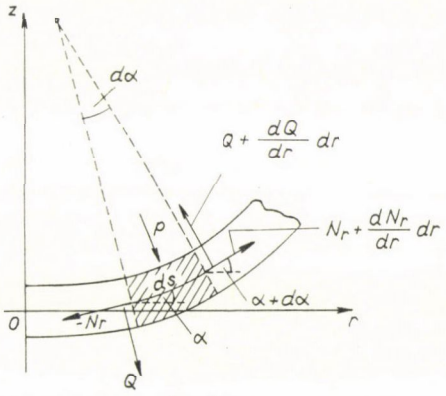
A hasonló című első részben (l. [1]) lapos hullámokkal rendelkező lemez kis kitéréseit tárgyaltuk. A dolog természetének és a lineáris egyenletnek megfelelően a kitérést az (egyenletes) terheléssel arányosnak találtuk. Köralakú lemez esetére a nagy kitérés problémájával is foglalkozni kezdtünk. Az első rész jelöléseit használva megjegyezzük, hogy a nyíróerőnek a 3. pontban adott képlete korrekcióra szorul és a (74) egyenlet pedig nincs levezetve. E hiányokat most fogjuk pótolni. Ezek után az erősen hullámos lemez kis, majd nagy kihajlásával fogunk foglalkozni. — A numerikus eredmények a III. részben következnek.

1.1. A nyíróerő meghatározása

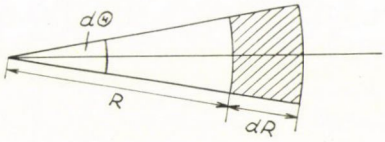
Vegyünk egy elemet a lemezből, mint az I. rész 548. oldalán és írjuk fel a ráható erőknek a lemez felületére merőleges komponenseit, majd ezek összegét tegyük egyenlővé zérussal. Persze mindez a deformált lemezre vonatkozik.

A p nyomásból származó erő $pRd\theta ds$ (ti. a lemez hossza ds és nem dr), a Q nyíróerőből származó rész

$$QRd\theta - \left(Q + \frac{dQ}{dr}dr\right)(R + dR)\,d\theta\,,$$



1a. ábra.

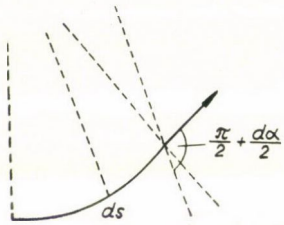


1b. ábra.

az N_r húzóerőből származó rész $\left(N_r \text{ a középnormálissal } \frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2} \text{ szöget zár be}\right)$

$$N_r R\, d\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2}\right) - \left(N_r + \frac{dN_r}{dr}\, dr\right)(R + dR)\, d\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{d\alpha}{2} = -\frac{d\alpha}{2}.$$



2. ábra.

Ezek összege a harmad és magasabbrendű kicsiktől eltekintve

$$\left(pR\, ds - R\frac{dQ}{dr}\, dr - Q dR\right) d\theta = \left(pR\, ds - \frac{d(RQ)}{dr}\, dr\right) d\theta = 0$$

(érdekes, hogy az N_r-ből nem származik számbajövő, felületre merőleges erő, ellentétben a [2] 331. oldalán közölt eredménnyel, mely csak hibás lehet; l. még [3] 250. o.), melyből

$$(1) \qquad pR\, ds - \frac{d(RQ)}{dr}\, dr = 0 \quad \text{ill.} \quad pR = \frac{d(RQ)}{ds},$$

vagyis

$$(2) \qquad Q = \frac{1}{R}\int_0^s pR\, ds = \frac{1}{R}\int_0^R pR \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\right)^2}\, dR.$$

Ha pl. $p = p(r) = \text{const}$ és a hullámok laposak $\left(1 + \left(\frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\right)^2 \approx 1\right)$, akkor $Q = \frac{pR}{2}$, egyébként nem. — Meg kell jegyeznünk azt is, hogy N_r mást jelent a mi esetünkben, mint az idézett helyen. Ott a *nem hullámos* lemez nagy deformációnál fellépő nyúlásából származó átlagerőt jelenti (a középben támadt feszültség szorozva a lemez vastagságával), míg itt a hullámosítás folytán nincs a középrétegben nyúlás és N_r a feszültség felületi integrálját jelenti (l. I. rész 569. o.). Azonban ez sem szolgálhat magyarázatul a [2]—[3]-ban számított nyíróerő értékére.

A fentiek alapján a

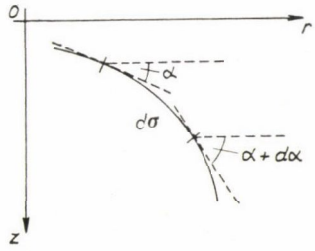
$$(3) \qquad \frac{d(RM_r)}{ds} - M_t + QR = 0$$

egyenlet (l. I. rész 3. 29″) így alakul

$$(4)\qquad \frac{d^2(RM_r)}{ds^2} - \frac{dM_t}{ds} + pR = 0 \qquad ds = \sqrt{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2}\,dr = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\right)^2}\,dR\,.$$

1.2. Az I. rész 3. (74) képletének levezetése

Az erők és nyomatékok a feszültségek következményeként csak deformált lemezen lépnek fel. Az I. rész 9. ábrája csak kis kitérésekre érvényes. Nagy kihajlás esetén az ott szereplő r, dr helyébe R és $dR = \dot{R}dr$ írandó. Viszont N_r, N_t, Q (éppúgy mint M_r, M_t) az r függvényei továbbra is. Tehát



3. ábra.

az erők egyensúlyának a feltétele — minden fellépő erő radiális összetevője összegének eltűnése — most a következőképpen alakul[1] (l. a 3. ábrát is).

$$(5)\left\{\begin{aligned} &-N_r R d\theta \cos\alpha + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr}dr\right)(R + \dot{R}\,dr)\,d\theta\cos(\alpha + d\alpha) - \\ &-N_t d\theta\, d\sigma \cos(\alpha + \lambda\, d\alpha) + \left(Q + \frac{dQ}{dr}dr\right)(R + \dot{R}\,dr)\,d\theta\cos\left(\alpha + d\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \\ &-QR\,d\theta\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right.$$

$$(0 < \lambda < 1)\,.$$

A deformált alak $w = w(R) = Z(r)$ és $w' = \dfrac{dw}{dR} = \dfrac{\dot{Z}}{\dot{R}}$. Ekkor

$$c = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}}, \quad c + dc = \cos(\alpha + d\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}} + \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}}\right)dR = \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}} - \frac{w'w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}\dot{R}\,dr$$

[1] Ebben a pontban, de csakis itt, az ívhosszat σ-val jelöljük.

$$s = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha = -\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}}$$

$$s + ds = \cos\left(\alpha + d\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha + d\alpha) =$$

$$= -\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} - \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}\dot{R}\,dr.$$

Tehát az (5) $d\theta$-val való osztás, a szorzások elvégzése és a magasabbrendű kicsinyek elhagyása után így alakul

$$-N_r Rc + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr}dr\right)(R + \dot{R}\,dr)(c + dc) - N_t d\sigma(c + \lambda' dc) +$$

$$+\left(Q + \frac{dQ}{dr}dr\right)(R + \dot{R}\,dr)(s + ds) - QRs = Rc\frac{dN_r}{dr}dr + \dot{R}N_r c\,dr +$$

$$N_r R\,dc - N_t c\,d\sigma + Rs\frac{dQ}{dr}dr + s\dot{R}Q\,dr + QR\,ds = 0$$

$$(0 < \lambda' < 1).$$

Felhasználva c, s, dc, ds fenti képletét, az első két tagot összevonva dr-rel osztva $(1 + w'^2)^{1/2}$-nel szorozva

$$\frac{d(RN_r)}{dr} - \frac{w'w''}{1+w'^2}R\dot{R}N_r - (1+w'^2)^{\frac{1}{2}}N_t\dot{R} - w'\frac{d(RQ)}{dr} - \frac{w''}{1+w'^2}R\dot{R}Q = 0 \tag{6}$$

illetve

$$\frac{d(RN_r)}{dr} - \frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2}RN_r - (\dot{R}^2 + \dot{Z}^2)^{\frac{1}{2}}N_t - \frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\frac{d(RQ)}{dr} - \frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2}RQ = 0 \tag{6'}$$

ami az I. rész jelöléseivel még a

$$\frac{d(RN_r)}{d\sigma} + \frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\frac{1}{r_n'}RN_r - N_t - \frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\frac{d(RQ)}{d\sigma} + \frac{1}{r_n'}RQ = 0 \tag{6''}$$

alakba is írható (r_n' a deformált meridiángörbe görbületi sugara).

2. Kis kitérés esete tetszőleges hullámosítás esetén

2.1. A kihajlás differenciálegyenlete

Kis kitérés esetén, de talán tetszőleges kitérés esetén is — erősen hullámos lemeznél is — a radiális kitérés $\varrho(r)$ elhanyagolható az r mellett. Nem kis r-re ez világos, kis r-re viszont a $\dot{\varrho}(0) = 0$ peremfeltételből következik

$$\lim_{r=0}\frac{\varrho(r)}{r} = \lim_{r=0}\dot{\varrho}(r) = \dot{\varrho}(0) = 0.$$

Ezért most az I. rész (24′) így alakul

$$M_r = D\left[\left(-\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}} + \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}}\right) + \frac{\nu}{r}\left(-\frac{\dot{Z}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} + \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}}\right)\right]$$

$$M_t = D\left[\nu\left(-\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}} + \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}}\right) + \frac{1}{r}\left(-\frac{\dot{Z}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} + \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}}\right)\right].$$

De

$$\dot{R}\,\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\dot{Z}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}}\right) \qquad \text{és} \qquad \dot{R} = 1 + \dot{\varrho} \approx 1\,,$$

tehát az

$$U = U(r) = \frac{\dot{Z}}{(\dot{R}^2 + \dot{Z}^2)^{1/2}} - \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \approx \frac{\dot{\zeta}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \qquad (Z = u + \zeta)$$

jelöléssel

$$(7) \qquad \begin{cases} M_r = -D\left(\dot{U} + \dfrac{\nu}{r}U\right) \\ M_t = -D\left(\nu\dot{U} + \dfrac{1}{r}U\right) \end{cases}$$

az I. (25)-höz hasonlóan. Az I. (73)-ból pedig most

$$(8) \qquad \begin{cases} N_r = -D\left[\dot{U}\,\dfrac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} + \dfrac{\nu}{r^2}U\,\dfrac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}}\right] \\ N_t = -D\left[\nu\,\dot{U}\,\dfrac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{r^2}U\,\dfrac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}}\right]. \end{cases}$$

Ekkor a (4) így alakul

$$(9) \qquad \frac{d^2(r\,M_r)}{ds^2} - \frac{d\,M_t}{ds} + pr = 0\,, \qquad ds = \sqrt{1 + \dot{Z}^2}\,dr \approx \sqrt{1 + \dot{u}^2}\,dr\,.$$

Ha ezt 2π-vel szorozva s szerint integráljuk

$$(10) \qquad \frac{d(r\,M_r)}{ds} - M_t + \frac{1}{2\pi}P_r = 0$$

egyenletre jutunk, melyben

$$P_r = P(r) = 2\pi\int_0^s prds\,.$$

Ha $p = p(r) = \text{const}$, akkor $P_r = pF_r$, ahol $F_r = F(r)$ jelenti a középső r sugarú forgásfelületrész ismert felszínét. A (10) a (7) felhasználásával az

$$(11) \qquad r(r\dot{U})^{\cdot} + \nu\,r\dot{U}(1 - \sqrt{1 + \dot{u}^2}) - U\sqrt{1 + \dot{u}^2} - r\,F_r\,\varepsilon\sqrt{1 + \dot{u}^2} = 0\,, \quad \varepsilon = \frac{p}{2\pi D}\,,$$

alakot veszi fel, mely az $r = e^{\varrho}$ helyettesítéssel a

$$(12) \qquad \frac{d^2U}{d\varrho^2} + \nu(1 - \sqrt{1 + \dot{u}^2})\frac{dU}{d\varrho} - \sqrt{1 + \dot{u}^2}\, U - \varepsilon\sqrt{1 + \dot{u}^2}\, r F_r = 0$$

lineáris másodrendű egyenletbe megy át, mely

$$(13) \qquad \frac{d^2U}{d\varrho^2} + A\frac{dU}{d\varrho} + BU + C\varepsilon = 0$$

alakú. Ebben ε egy kis paraméter. Ha pl. $\nu = \frac{1}{3}$, $p \leqq 5$ kg/cm², $h \geqq 0{,}08$ cm, $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm² (acél), akkor $\varepsilon = \frac{6(1-\nu^2)p}{Eh^3} \leqq \frac{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot 5}{2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}08^3 \cdot 3{,}14} < 0{,}01.$

A (13)-ban az $U(\varrho) = \varepsilon U_1(\varrho)$ helyettesítést elvégezve $U_1(\varrho)$-ra az

$$(14) \qquad U_1'' + AU_1' + BU_1 + C = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{d\varrho}\right)$$

egyenletet kapjuk, mely az $U_1(0) = U_1(a) = 0$ peremfeltételek mellett (a a lemez sugara) oldandó meg és így az $U(\varrho) = \varepsilon U_1(\varrho)$ megoldáshoz mindössze egy egyenlet — a (14) egyenletnek — megoldásával jutunk el. Ez a III. részben fog megtörténni. — Látnivaló, hogy ebben a közelítésben pontosabb eredményt nem kaphatunk.

Megjegyzés. Talán feltűnő, hogy (14) és sok előbbi egyenlet harmadrendű, holott a lemez egyenletéről megszoktuk, hogy negyedrendű, ami négy peremfeltétel kielégítését teszi lehetővé és ez pl. a közepén lukas lemez tárgyalásánál szükséges lehet. Azonban egyenleteink mind a negyedrendű (9) egyenlet első integráljainak tekinthetők.

3. Erősen hullámos lemez nagy kitérései

3.1. A meridiángörbe „belső egyenlete"

A (6)—(6″) és a belőlük kis kitérésekre kapott egyenleteket igen komplikálttá teszik az $\frac{1}{r_n}, \frac{1}{r_t}, \frac{1}{r_n'}, \frac{1}{r_t'}$-ben levő gyökök. Ha azonban a meridiángörbe ún. „belső egyenletére" térünk rá, egyenleteink rendkívül egyszerűvé válnak, sőt egyenletrendszer helyett csak egy egyenletet, két ismeretlen függvény helyett csak egyet kapunk.

Egy görbe belső egyenletén görbülete és ívhossza közt fennálló egyenletet értünk, melynek alakja $g = f(s)$. — Mint ismeretes, ez — alkalmas kezdeti feltétellel együtt — meghatározza magát a görbét. (A belső egyenlet elnevezés arra utal, hogy az egyenlet a koordinátarendszertől független.)

Ha ti. $g = f(s)$ adva van, akkor $\frac{d\alpha}{ds} = g = f(s)$, ahonnan

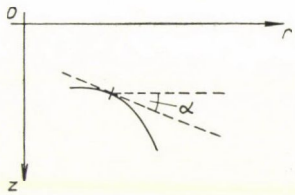
$$\alpha = \int f(s)\,ds = F(s)$$

és

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} F(s) = h(s)$$

melyből

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{dr}{ds}h(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dz}{dr}\right)^2}}h(s) = \dfrac{h(s)}{\sqrt{1+h^2(s)}} = \\[2ex] = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sin\alpha = \sin F(s) \\[2ex] \dfrac{dr}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1+h^2(s)}} = \cos\alpha = \cos F(s) \end{cases}$$



4. ábra.

ahonnan

$$(16)\qquad r = \int_0^s \cos\alpha\,ds\,,\quad z = \int_0^s \sin\alpha\,ds\,,\quad \alpha = F(s) = \int f(s)\,ds\,.$$

Ez a görbe paraméteres egyenlete. Paraméter az ívhossz. — Legyen

$$\frac{1}{r_n'} = g_n\,,\quad \frac{1}{r_n} = g_{n_0}\,,\quad \frac{1}{r_t'} = g_t\,,\quad \frac{1}{r_t} = g_{t_0}\,.$$

Ezek mind ugyanazon s ívhossz függvényeinek foghatók fel, mely az $u = u(r)$ görbe mentén P-ig, $w = w(R)$ mentén P'-ig terjed. (P' az a pont, melybe P a deformáció során kerül.) Ti. *a hullámosítás folytán a középrétegben nincs nyúlás és így a mondott ívhosszak egyenlők.* A P és P' pontok abszcisszái, r és R, nem egyenlők.

Tekintsük ismeretlen függvénynek az

$$(17)\qquad \alpha = \alpha(s) = \int_0^s g_n(s)\,ds$$

függvényt. Ekkor

$$
(18)\quad \begin{cases}
g_n(s) = \dfrac{d\alpha}{ds} = \alpha', & \left(' = \dfrac{d}{ds}\right) \\[2ex]
\dfrac{dZ}{dR} = \dfrac{\dot{Z}}{\dot{R}} = \operatorname{tg}\alpha, & \\[2ex]
R' = \dfrac{dR}{ds} = \cos\alpha, \quad R = R(s) = \int\limits_0^s \cos\alpha\, ds, & \\[2ex]
Z' = \dfrac{dZ}{ds} = \sin\alpha, \quad Z = Z(s) = Z_0 + \int\limits_0^s \sin\alpha\, ds, & \\[2ex]
g_t = -\dfrac{\dot{Z}}{R(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} = -\dfrac{\dot{Z}/\dot{R}}{R(1 + (\dot{Z}/\dot{R})^2)^{1/2}} = -\dfrac{\sin\alpha}{R}. &
\end{cases}
$$

Ezek mind s függvényei és figyelemreméltó, hogy milyen egyszerű a formájuk. Pl. a g_n görbület az α' alakot ölti a bonyolult $\dfrac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}}$ alak helyett. A g_t új alakja is nagyon egyszerű. Ezenkívül a két ismeretlen függvény, $R(r)$, $Z(r)$ helyett most csak egy — az $\alpha = \alpha(s)$ — van, mellyel az $R(s)$ és $Z(s)$ kifejezhetők (l. (18)). Persze az $R(r)$ és $Z(r)$ is megkaphatók, mert az eredeti $z = u(r)$ alakból

$$
(19)\qquad s = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \dot{u}^2}\, dr = s(r).
$$

Ebből *esetleg* explicite kifejezhető r az s függvényeként, mivel g_n, g_{t_0}, $u(r)$ az s függvényei formájába írhatók. — Egy másik lehetőség az, hogy az eredeti alakot is belső egyenletével adjuk meg vagy inkább az $\alpha_0 = \alpha_0(s)$ alakban (pl. $\alpha_0 = \sin s$) és akkor $\dfrac{dr}{ds} = \cos\alpha_0$, $\dfrac{dz}{ds} = \sin\alpha_0$ $\left(\text{példánkban } \dfrac{dr}{ds} = \cos\sin s, \dfrac{dz}{ds} = \sin\sin s\right)$, melyből $r = r(s)$, $z = z(s)$ $(= u(r))$ adódik a meridiángörbe eredeti alakjául. (Az $\alpha_0 = \sin s$ választásnál a görbe hullámos, középen és a széleken érintője vízszintes.) Persze akkor

$$
(20)\quad \begin{cases}
g_{n_0} = \alpha_0', \quad g_{t_0} = -\dfrac{\sin\alpha_0}{r} \\[2ex]
r' = \cos\alpha_0, \quad r = \int\limits_0^s \cos\alpha_0\, ds \\[2ex]
\dot{u} = \operatorname{tg}\alpha_0 \\[2ex]
z' = \sin\alpha_0, \quad z = \int\limits_0^s \sin\alpha_0\, ds
\end{cases}
$$

és

$$
(21)\quad \begin{cases}
M_r = D\left[(\alpha' - \alpha_0') + \nu\left(-\dfrac{\sin\alpha}{R} + \dfrac{\sin\alpha_0}{r}\right)\right] \\
M_t = D\left[\nu(\alpha' - \alpha_0') + \left(-\dfrac{\sin\alpha}{R} + \dfrac{\sin\alpha_0}{r}\right)\right] \\
N_r = -D\left[(\alpha' - \alpha_0')\,\alpha_0' - \nu\left(-\dfrac{\sin\alpha}{R} + \dfrac{\sin\alpha_0}{r}\right)\dfrac{\sin\alpha_0}{r}\right] \\
N_t = -D\left[\nu(\alpha' - \alpha_0')\,\alpha_0' - \left(-\dfrac{\sin\alpha}{R} + \dfrac{\sin\alpha_0}{r}\right)\dfrac{\sin\alpha_0}{r}\right] \\
\dfrac{d(RM_r)}{ds} = D\left[\dfrac{d}{ds}[R(\alpha' - \alpha_0')] + \nu\dfrac{d}{ds}\left(-\sin\alpha + \dfrac{R}{r}\sin\alpha_0\right)\right] = \\
= D\left[(\alpha' - \alpha_0')\cos\alpha + R(\alpha'' - \alpha_0'') + \nu\left(-\alpha'\cos\alpha + \dfrac{R}{r}\alpha_0'\cos\alpha_0 + \right.\right. \\
\qquad\qquad \left.\left. + \dfrac{r\cos\alpha - R\cos\alpha_0}{r^2}\sin\alpha_0\right)\right].
\end{cases}
$$

Ekkor a (4) egyenlet 2π-vel szorozva és s szerint integrálva így alakul

$$\frac{d(RM_r)}{ds} - M_t + \frac{1}{2\pi}P_r = 0\,,$$

ahol $P_r = P(r) = 2\pi\int_0^s p(r)R\,ds$ most is a lemez középső R sugarú részére ható nyomóerőt jelenti, mely $p(r) = \text{const}$ esetén $P_r = pF_s$. Itt $F_s = F(s)$ a középső r ill. R sugarú rész felszíne, ti. nem lévén nyúlás a deformált lemez felszíne ua. mint a deformálatlané. $F(s) = F_1(r) = F_2(R)$. Vagyis egyenletünk

$$\frac{d(RM_r)}{ds} - M_t + \frac{p}{2\pi}F_s = 0\,.$$

Ez (21) felhasználásával a következő alakot ölti

$$
(22)\quad \begin{cases}
R(\alpha'' - \alpha_0'') + (\cos\alpha - \nu)(\alpha' - \alpha_0') + \nu\left[-\alpha'\cos\alpha + \dfrac{R}{r}\alpha_0'\cos\alpha_0 + \right. \\
\left. + \dfrac{r\cos\alpha - R\cos\alpha_0}{r^2}\sin\alpha_0\right] + \left(\dfrac{\sin\alpha}{R} - \dfrac{\sin\alpha_0}{r}\right) + \varepsilon F_s = 0\,, \quad \varepsilon = \dfrac{p}{2\pi D}\,.
\end{cases}
$$

Itt nincs szükség az I. 3. (74) képlet hasonló átírására, mert csak egy ismeretlen függvény van, az $\alpha(s)$. A (22) tulajdonképpen egy integro-differenciálegyenlet, mert benne R az $R = \int_0^s \cos\alpha\,ds$ jelentéssel bír.

3.2. A probléma megoldása

(22) alapján a következőképpen történik:

Legyen a lemez sugara a, akkor $s_a = s(a)$ az ívhossz legnagyobb értéke, mely a lemez szélének felel meg. (A fenti példában $a = \int_0^{s_a} \cos \sin s \, ds$.) Vegyük fel az $\alpha(s)$ ismeretlen függvényt az

$$\alpha = \alpha(s) = s(s - s_a)(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots) \tag{33}$$

hatványsor alakjában. Akkor az $\alpha(0) = \alpha(s_a) = 0$ peremfeltételek ki vannak elégítve. Az r és α_0 az s ismert függvényei, melyeket képzeljünk analitikusaknak. A (23) és (18) alapján $\alpha(s)$ és $R(s)$ is hatványsor (analitikus) alakba írhatók. Mindezt beírva a (22)-be és s minden hatványának az együtthatóit 0-sal egyenlítve egy egyenletrendszert kapunk $a_0, a_1, a_2 \ldots$ meghatározására, amivel a probléma a fentiek szerint megoldást nyert.

A megoldás effektív végrehajtását nehézzé teszi az, hogy (22)-ben $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $R = \int_0^s \cos \alpha \, ds$ úgy állnak elő, hogy α helyébe a (23)-beli sort tesszük. A sorok átrendezése komplikált együtthatókra vezet. Ezért a (22) egyenletet leegyszerűsítjük.

Ti. az $R = r + \varrho(r)$-ben vegyük $\varrho(r)$-et r-hez képest elhanyagolhatónak (l. 2.1. elején). Ez még nagy kitérés esetén is igaznak vehető, ha azért a kitérések kicsik a lemez sugarához képest. Különösen akkor igaz ez, ha a lemez középső köralakú részét (ahol r kicsi) kirekesztjük pl. oly módon, hogy vastag (nem hajló) lemezzel helyettesítjük. Ekkor (22)-ben $R = r$ tehető és az egyenlet egyes tagjai elhagyhatók. A

$$\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{r} \sin \alpha_0 = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \, \frac{\alpha - \alpha_0}{r} \sin \alpha_0$$

tag nyilván kicsi, ha r nem kicsi, ha pedig r kicsi, akkor a

$$- \sin \alpha_0 \frac{\alpha' - \alpha_0'}{\dfrac{dr}{ds}} \sin \alpha_0 \Bigg|_{s=0}$$

határértékéhez már közel van, mely $= 0$, mert $\alpha_0(0) = 0$ és $\dfrac{dr}{ds} = \cos \alpha_0 \neq 0$, ha $s = 0$ (mert $\alpha_0(0) = 0$). Viszont a $\dfrac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{r}$ tag nem hagyható el, mert kis r-re

$$\frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{r} = - g_t + g_{t_0} \approx - g_n + g_{n_0} \neq 0 \quad \text{(általában)}.$$

Egyenletünk leegyszerűsített formában

$$r(\alpha'' - \alpha_0'') + (\cos \alpha - \nu)(\alpha' - \alpha_0') + \nu(\alpha_0' \cos \alpha_0 - \alpha' \cos \alpha) + \\ + \frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{r} + \varepsilon F_s = 0 . \tag{24}$$

Remélhető, hogy az $R = r$ feltevés nem vezet a jelenség torz leírására nagy kitérés esetén sem, ti. itt a 2.1. elején szereplő durvább $\dot{R}^2 + \dot{Z}^2 \approx 1 + \dot{u}^2$ közelítést nem használjuk. Viszont az is igaz, hogy ez a közelítés sem alkalmas a radiális $\varrho(r)$ kitérés meghatározására. Ez csak (22) alapján lehetséges.

A (22) és a (24) megoldására a GALERKIN-módszer is alkalmasnak látszik, különösen a perturbációs eljárással kombinálva.

3.3. A (24) egyenlet megoldása

Ezt az

$$a(s) = \alpha_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \alpha_n(s) = \alpha_0(s) + \delta(s) \tag{25}$$

alakban irányozzuk elő. Ekkor

$$\begin{cases} \cos a = \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \delta + \dfrac{1}{2!} \cos \alpha_0 \delta^2 + \dfrac{1}{3!} \sin \alpha_0 \delta^3 + \dots \\ \sin a = \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \delta - \dfrac{1}{2!} \sin \alpha_0 \delta^2 - \dfrac{1}{3!} \cos \alpha_0 \delta^3 + \dots \end{cases} \tag{26}$$

De

$$\begin{cases} \delta = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots \\ \delta^2 = \alpha_1^2 \varepsilon^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon^3 + (2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2) \varepsilon^4 + \dots \\ \delta^3 = \alpha_1^3 \varepsilon^3 + 3\alpha_1^2 \alpha_2 \varepsilon^4 + (3\alpha_1 \alpha_2^2 + 3\alpha_1^2 \alpha_3) \varepsilon^5 + \dots \\ \vdots \end{cases} \tag{27}$$

és így

$$\begin{cases} \cos a = \cos \alpha_0 - \alpha_1 \sin \alpha_0 \varepsilon - \left(\alpha_2 \sin \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1^2}{2} \cos \alpha_0\right) \varepsilon^2 + \\ \qquad + \left(-\alpha_3 \sin \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_2 \cos \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1^3}{6} \sin \alpha_0\right) \varepsilon^3 + \dots \\ \sin a = \sin \alpha_0 + \alpha_1 \cos \alpha_0 \varepsilon + \left(\alpha_2 \cos \alpha_0 - \dfrac{\alpha_1^2}{2} \sin \alpha_0\right) \varepsilon^2 + \\ \qquad + \left(\alpha_3 \cos \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_2 \sin \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1^3}{6} \cos \alpha_0\right) \varepsilon^3 + \dots \end{cases} \tag{28}$$

Tehát

$$\begin{cases} r\delta'' = \alpha_1'' r \varepsilon + \alpha_2'' r \varepsilon^2 + \alpha_3'' r \varepsilon^3 + \dots \\ \delta' = \alpha_1' \varepsilon + \alpha_2' \varepsilon^2 + \alpha_3' \varepsilon^3 + \dots \\ a' = \alpha_0' + \alpha_1' \varepsilon + \alpha_2' \varepsilon^2 + \dots \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha - \nu = (\cos\alpha_0 - \nu) - \alpha_1 \sin\alpha_0\, \varepsilon - \left(\alpha_2 \sin\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1^2}{2}\cos\alpha_0\right)\varepsilon^2 + \\ \quad + \left(-\alpha_3 \sin\alpha_0 - \alpha_1\alpha_2\cos\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1^3}{6}\sin\alpha_0\right)\varepsilon^3 + \dots \\ (\cos\alpha - \nu)\,\delta' = \alpha_1'(\cos\alpha_0 - \nu)\,\varepsilon + \\ + [-\alpha_1\alpha_1'\sin\alpha_0 + \alpha_2'(\cos\alpha_0 - \nu)]\,\varepsilon^2 + \dots \\ \nu(\alpha_0'\cos\alpha_0 - \alpha'\cos\alpha)) = \nu(\alpha_0'\alpha_1\sin\alpha_0 - \alpha_1'\cos\alpha_0)\,\varepsilon + \\ + \nu\left(\alpha_0'\alpha_2\sin\alpha_0 + \dfrac{1}{2}\alpha_0'\alpha_1^2\cos^2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_1'\sin\alpha_0 - \alpha_2'\cos\alpha_0\right)\varepsilon^2 + \dots \\ \dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha_0}{r} = \dfrac{\alpha_1\cos\alpha_0}{r}\,\varepsilon + \dfrac{\alpha_2\cos\alpha_0 - \dfrac{1}{2}\alpha_1^2\sin\alpha_0}{r}\,\varepsilon^2 + \dots \end{cases}$$

Mindezt betéve a (24)-be σ_1 és σ_2-re a következő két *lineáris* egyenletet kapjuk (ε és ε^2 együtthatóját 0-sal egyenlítve)

$$(30) \qquad r\alpha_1'' + [(1-\nu)\cos\alpha_0 - \nu]\,\alpha_1' + \left(\nu\alpha_0'\sin\alpha_0 + \frac{\cos\alpha_0}{r}\right)\alpha_1 + F_s = 0$$

$$(31) \qquad r\alpha_2'' + [(1-\nu)\cos\alpha_0 - \nu]\,\alpha_2' + \left(\nu\alpha_0'\sin\alpha_0 + \frac{\cos\alpha_0}{r}\right)\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{2r}(r\alpha_0'\cos^2\alpha_2 - \sin\alpha_0) = 0\,.$$

Ezek a peremfeltételekkel együtt meghatározzák σ_1, σ_2-t. Ezek után (28)-ból

$$Z = Z_0 + \int_0^s \sin\alpha\, ds\,,$$

de

$$Z(s_a) = Z_0 + \int_0^{s_a} \sin\alpha\, ds = 0,$$

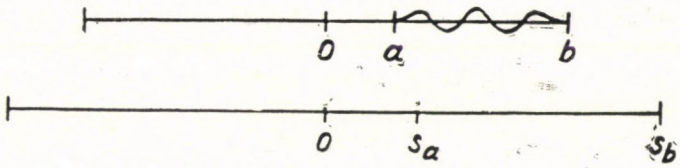
vagyis

$$Z = -\int_s^{s_a} \sin\alpha\, ds \qquad \text{és} \qquad \zeta(s) = Z(s) - u(s)\,.$$

A (30)—(31) megoldására a Ritz—Galerkin módszert alkalmazzuk. Legyen a lemez sugara (a helyett) b. A hullámosított rész $a \leqq r \leqq b$. A középső rész vastag lemez legyen, mely nem hajlik, de a súlyát elhanyagolhatónak vesszük. Az a és b úgy vannak meghatározva, hogy $s_a = 2\pi$, $s_b = 12\,\pi$ (mm) legyen. A hullámalak legyen $\sigma_0 = \sin s$. (Jobb volna $\sigma_0 = \dfrac{\pi}{4}\sin s$-et venni, mert akkor a maximális meredekség $\pm\dfrac{\pi}{4}$ lenne, de így egyszerűbb a számítás.)

Az s_a, s_b ilyen megválasztása folytán 5 teljes hullám (10 félhullám) esik a lemezre. Ekkor

$$(32)\quad \begin{cases} \cos\alpha_0 = \dfrac{dr}{ds} = \cos\sin s = 1 - \dfrac{\sin^2 s}{2!} + \dfrac{\sin^4 s}{4!} - + \dots \\[2ex] \sin\alpha_0 = \dfrac{du}{ds} = \sin\sin s = \sin s - \dfrac{\sin^3 s}{3!} + \dfrac{\sin^5 s}{3!} - + \dots \end{cases}$$



5. ábra.

Bár ezek valóban átrendezhetők s hatványai szerint, ezt végrehajtani mégsem célszerű, mert s az 1-nél jóval nagyobb értékeket vesz fel és így a sorokból igen sok tagot kellene venni, hogy megfelelő közelítést kapjunk. A (32)-t részben a jelen formájában, részben trigonometrikus (Fourier) sorba átrendezett alakjában használjuk. Ez az átrendezés a

$$\sin^2 s = \frac{1-\cos 2s}{2},\quad \sin^4 s = \left(\frac{1-\cos 2s}{2}\right)^2 = \frac{3-4\cos 2s+\cos 4s}{4},\ \dots$$

képletek alapján hajtható végre. Az a és b értékét enélkül is, közvetlenül (32)-ből is, megkaphatjuk

$$a = \int_0^{2\pi} \cos\alpha_0\, ds = 2\pi\left(1 - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1}{6!}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + - \dots\right)$$

$$b = \int_0^{12\pi} \cos\alpha_0\, ds = 6\,a\,.$$

Innen (3 tagot véve)

$$\left.\begin{cases} a = 2\pi\dfrac{49}{64} \\[2ex] b = 12\pi\dfrac{49}{64} \end{cases}\right\}\ \text{kb. } 0{,}05\ \%\ \text{hibával}$$

Most tekintsük az említett átrendezést

$$\cos\alpha_0 = 1 - \frac{1}{2!\,2}(1-\cos 2s) + \frac{1}{4!\,2^3}(3 - 4\cos 2s + \cos 4s) -$$

$$- \frac{1}{6!\,2^5}(10 - 11\cos 2s + 2\cos 4s - \cos 6s) + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!\,2} + \frac{3}{4!\,2^3} - \frac{10}{6!\,2^5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2!\,2} - \frac{4}{4!\,2^3} + \frac{11}{6!\,2^5} + \dots\right)\cos 2s +$$

$$+ \left(\frac{1}{4!\,2^3} - \frac{2}{6!\,2^5} + \dots\right)\cos 4s + \left(\frac{1}{6!\,2^5} + \dots\right)\cos 6s + \dots$$

$$\sin \alpha_0 = \sin s - \frac{1}{3!\,2}(1 - \cos 2s) \sin s + \frac{1}{5!\,2^3}(3 - 4\cos 2s +$$

$$+ \cos 4s) \sin s - \ldots = \left(1 - \frac{3}{3!\,2^2} + \frac{10}{5!\,2^4} + \ldots\right) \sin s +$$

$$+ \left(\frac{1}{3!\,2^2} - \frac{5}{5!\,2^4} + \ldots\right) \sin 3s + \left(\frac{1}{5!\,2^4} + \ldots\right) \sin 5s + \ldots$$

Kielégítő a következő közelítést venni

$$\cos \alpha_0 \approx \frac{49}{64} + \frac{11}{48} \cos 2s + \frac{1}{192} \cos 4s$$

$$\sin \alpha_0 \approx \frac{169}{192} \sin s + \frac{5}{128} \sin 3s + \frac{1}{1920} \sin 5s .$$

Az együtthatók hibája 10^{-3}-on alul van. Ekkor

$$r = \int_0^s \cos \alpha_0 \, ds = \frac{49}{64} s + \frac{11}{96} \sin 2s + \frac{1}{768} \sin 4s .$$

Hasonlóan

$$F_s = 2\pi \int_0^s r ds = 2\pi \left(\frac{49}{128} s^2 + \frac{11}{192} \cos 2s - \frac{1}{3072} \cos 4s\right) +$$

$$+ 2\pi \left(\frac{1}{192} + \frac{1}{3072}\right).$$

Irjuk a (30) egyenletet a következő formába

$$L[\alpha_1] \equiv r^2 \alpha_1'' + r[(1 - \nu) \cos \alpha_0 - \nu] \alpha_1' + (\nu r \alpha_0' \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0) \alpha_1 + r F_s = 0 .$$
(30′)

Ennek együtthatóit most már az előbbiek alapján felírhatjuk:

$$r^2 = \left(\frac{49}{64}\right)^2 s^2 + \left(\frac{11}{96}\right)^2 \sin^2 2s + 2 \frac{49}{65} \frac{11}{96} s \sin 2s + 2 \cdot \frac{49}{64} \frac{1}{768} s \cdot \sin 4s ,$$

si.t. Az együtthatók, kellő átalakítás után, a következő alakú tagokból állnak

$$s^k \cos ls , \quad s^k \sin ls \qquad (k = 0, 1, 2; \; l = 1, 2, \ldots, 9) .$$

(30′)-re alkalmazható Galerkin módszere. — Az α_1-et

$$\alpha_1(s) = a_1 \sin s + a_2 \sin 2s + a_3 \sin 3s$$

alakban irányozzuk elő és az a_1, a_2, a_3-at az

$$\int_{2\pi}^{12\pi} L[\alpha_1] \sin ks \, ds = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

lineáris egyenletrendszerből határozzuk meg. A (31) egyenletre hasonló eljárást alkalmazva nyerjük az $\alpha_2(s)$-et.

(Beérkezett: 1963. május 23., átdolgozva: 1964. január 9.)

IRODALOM

[1] Bihari, I.: „Hullámos lemez deformációja adott terhelés mellett I." *A MTA Matem. Kut. Int. Közleményei* **7** (1962) B. 537—575.
[2] Timoshenko, S.: *Theory of Plates and Shells.* New York, 1940.
[3] Nádai, Á.: *Die elastischen Platten.* Berlin, 1925.

ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛНИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКЕ II

I. BIHARI

Резюме

В работе рассматриваются малые и большие отклонения произвольно гофрированной пластинки. Для определения «вертикальных и горизонтальных» амплитуд составлены соответствующие дифференциальные уравнения. В случае малых амплитуд применяется метод пертурбаций относительно малого параметра, входящего в уравнение. В случае больших амплитуд дифференциальные уравнения упрощаются тем, что берется внутреннее уравнение меридианной кривой. Длина дуги меридианной кривой не изменяется от деформации. И в этом случае для решения уравнений применяется метод пертурбаций, а для решения некоторых уравнений используется метод Галеркина.

Численные результаты будут следовать в III части работы.

DEFORMATION OF CORRUGATED PLATES II

by

I. BIHARI

Summary

The paper is dealing with the small and large deformation of an arbitrarily corrugated plate. It will be determined the differential equations for the „vertical and horizontal" components of the deflection. Corresponding to a small parameter in the equation for small deflection the perturbation method will be applied. The equations for large bending will be simplified by taking the so called intern equation of the meridian curve. Viz. the measure of the arc does not vary with the deformation. In solving the equation it will be applied perturbation method here too and the successive approximate equations will be solved by the Galerkin-method. The numerical results will be published in the part III.