

# MÓDOSÍTOTT SCHUHMANN—GAUDIN-FÜGGVÉNY ALKALMAZÁSA A TROMP-GÖRBÉKRE

TARJÁN GUSZTÁV\*

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

[Beérkezett 1972. július 21-én]

A szemcseeloszlási függvények  $F = f(y)$  alakról  $F = f(b)$  alakra hozhatók, ahol  $b = y/y_{50}$ . Az  $F = b^m/2$  Schuhmann—Gaudin (SG-) függvényt  $b > 1$ -nél ( $F > 50\%$ -nál)  $F = 1 - b^{-m}/2$  alakúra változtatva, e könnyen kezelhető „módosított” függvény és a Kolmogorov (K) vagy Rosin—Rammler (RR) függvények között gyakorlatilag elhanyagolható lesz a relatív eltérés. A szemcsehalmazok granulometriáját kifejező szemcseeloszlási függvények analogonjai az ásványelőkészítés számos más területén is fellépnek; ezek közül a módosított SG-függvénynek a Tromp-görbékre való alkalmazhatósága kerül részletesebb ismertetésre.

Az „eredeti”

$$\begin{aligned} F_K &= \Phi[\ln(y/a)^m] \quad (\text{Kolmogorov}), \\ F_{RR} &= 1 - e^{-(y/a)^m} \quad (\text{Rosin—Rammler}), \\ F_{SG} &= (y/a)^m \quad (\text{Schuhmann—Gaudin}) \end{aligned}$$

szemcseeloszlási függvényekben  $F$  az  $y$  szemcsenagyságnál finomabb szemek súlyszázalékát jelenti,  $m$  kitevő a szórás paramétere és

$$a_K = y_{50}, \quad a_{RR} = y_{63,2}, \quad a_{SG} = y_{100}$$

az egyes függvények szemmagyság paramétere: az 50, 63,2, ill. 100%  $F$  értékhez tartozó szemcsenagyság.

E függvények  $F = f(y)$  alakról  $F = f(b)$  alakra hozhatók, ahol  $b = y/y_{50}$ , dimenzió nélküli szám:

$$F_K = \Phi(\ln b^m), \quad F_{RR} = 1 - e^{-b^m \ln 2}, \quad F_{SG} = b^m/2.$$

Az SG függvénynek  $F = 50 \div 100\%$  ordinátaszakaszon, ill.  $b > 1$  abszcissza-értéknél

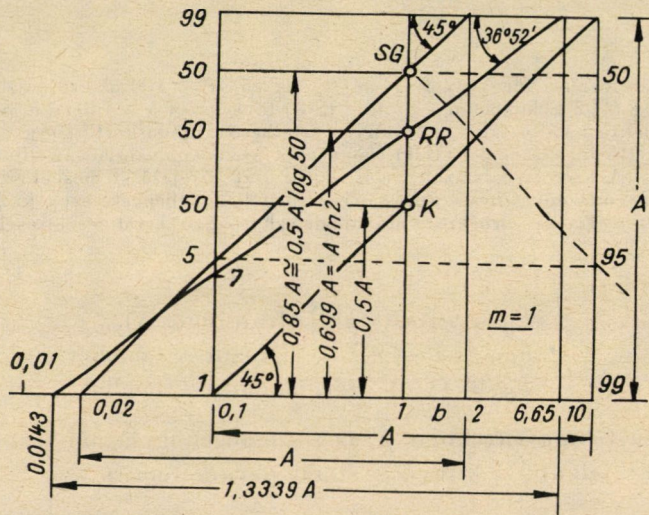
$$F = 1 - 0,5b^{-m}$$

alakra módosításával az  $\overline{SG}$  függvény — az RR és K függvényekkel egyezően —  $F = 100\%$ -hoz aszimptotikusan simuló s a tényleges szemcseeloszlásoknak jobban megfelelő lesz. A függvényeket  $\log b$  (vagy az „eredeti”  $\log y$ ) abszcisszán ábrázolva  $m$  hajlású egyeneseket kapunk, ha az ordinátatengely beosztása  $K$ -nál a Gauss-valószínűségi összegskála, RR-nél  $\log \log[1/(1 - F)]$  és SG-nél  $\log F$  szerinti. A K, RR és „módosított”  $\overline{SG}$   $F = f(b)$  függvények

\* Prof. Dr. Tarján Gusztáv, Nehézipari Műszaki Egyetem, 3515 Miskolc.

relatív eltérése nem nagy és gyakorlatilag bármelyik helyettesítheti a másikat. S mivel a három közül az  $\overline{SG}$  függvény kezelhető a legkönnyebben, ennek a használata indokolt elsősorban [1].

Az egyes  $F = f(y)$ , ill.  $F = f(b)$  „szemcseeloszlási” függvényekkel analóg függvényekkel találkozunk az ásványelőkészítés számos más területén is. Például a K-függvény jelentkezik a „szabályos” Tromp-görbék, ill. a frakcióhatásfokok területén, az RR függvény az őrlés kinetikájában (adott szemcsenagyságnál finomabb rész képződése az idő függvényében) és —  $m = 1$  kitevő-



1. ábra

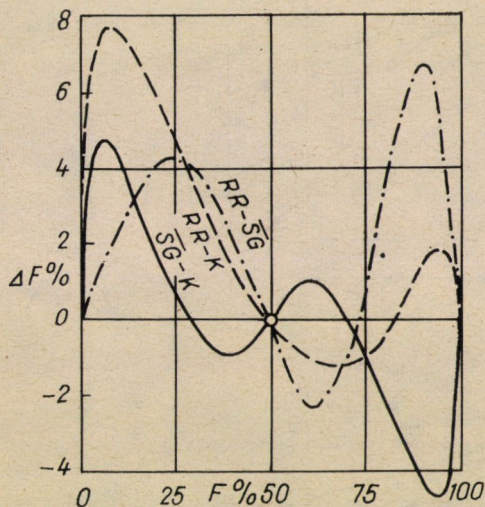
vel — a flotálás vagy a szitálás kinetikájában (ásványkihozatal, ill. finomrészkihozatal az idő függvényében), a szűrőtömlők és elektrofilterek frakcióhatásfokának képleteiben; az SG függvény pl. az őrlőtestek kopásakor előálló golyónagyság-megoszlás képletében stb. Csupán az  $F$ , ill.  $y$  és  $a$  „jelentése” lesz ilyenkor más és más (pl.  $F$  ásványkihozatal vagy porkihozatal,  $y$  és  $a$  idő), de a képletek alakja tökéletesen megfelel a szemcseeloszlási függvények valamelyikének. A technika- és természettudományok egyéb (az ásványelőkészítéstől távolos) területein is találkozunk a szemcseeloszlási függvények egyik-másikával analóg függvényekkel. (Pl. igen gyakran a lognormális valószínűségi K-függvénnyel.)

Mindezekben a területeken javasolható az egyszerűen kezelhető „módosított”  $F_{\overline{SG}} = f(b)$  függvény bevezetése, ill. alkalmazása a bonyolultabb  $F_K$  vagy  $F_{RR}$  függvények helyett.

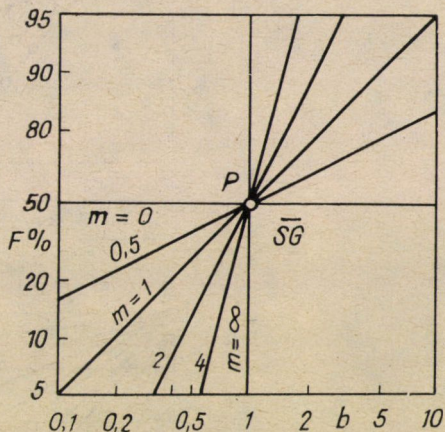
Az 1. ábra a három (K, RR és SG)  $F = f(b)$  egyenes  $F = 1-99\%$  közötti szakaszát együtt ábrázolja  $m = 1$  mellett a „megfelelő” ordináta-beosztások-



nál. (Az RR-függvény  $m = 1$  egyenesének hajlásszöge  $45^\circ$ -tól eltér, mert a beosztás jellege miatt itt  $A$  ordinátához  $1,3339A$  abszcissa-érték tartozik.) A 2. ábra két-két  $F = f(b)$  függvény  $\Delta F = f(F)$  eltérését mutatja. Kiténik ebből, hogy a maximális  $\Delta F$  eltérés (az  $F = 0-100\%$  közötti teljes spektrumban) RR—K között  $8\%$ -nál, RR—SG között  $7\%$ -nál, SG—K között  $5\%$ -nál kisebb, s az elsősorban „érdekes”  $F = 25-75\%$  közötti területen RR—K között  $\sim 5\%$ , RR—SG között  $\sim 4\%$ , SG—K között  $\sim 1\%$  mindössze.



2. ábra



3. ábra

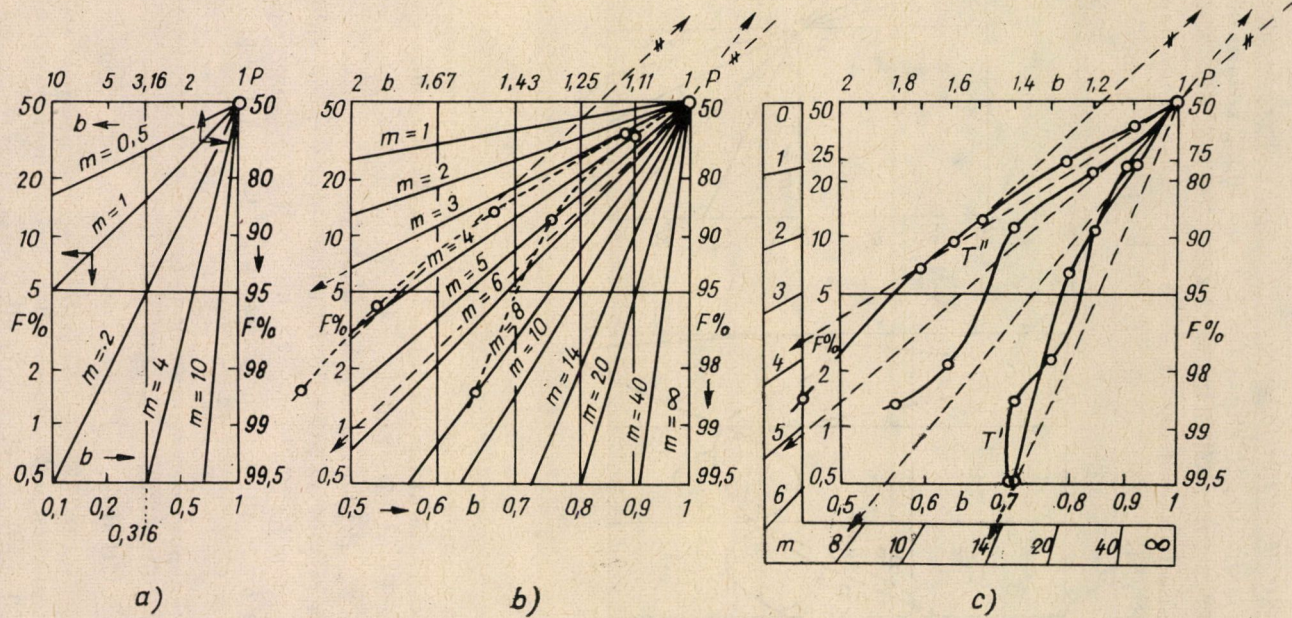
A 3. ábra a „módosított” SG függvény  $F = f(b)$  egyeseinek  $F = 5-95\%$  közti szakaszát mutatja különböző  $m$  értékeknél. A  $b = y/y_{50}$  abszcisszatengetely is és az  $F$  ordináta tengely is logaritmikus beosztású, az egyenesek a ( $b = 1, F = 50\%$ )  $P$  pólusponton haladnak át.

A 4. ábra rajzain az SG háló  $P$  póluspontja a rajzok jobb felső sarkán van s a különböző  $m$  hajlású egyenesek  $b < 1$ , ill.  $F < 50\%$  értékei a háló alsó és bal oldali, a  $b > 1$ , ill.  $F > 50\%$  értékek a felső és jobb oldali skálákon olvashatók le. Az a) rajz  $b = 0,1-10$ , a b) és c) rajz  $b = 0,5-2$  abszcissza-szakaszon mutat különböző  $m$ -egyeneseket  $F = 0,5-99,5\%$  közti ordinátaszakasz mellett. (A b) rajzon az  $m$ -egyenesek be vannak rajzolva, a c) rajzon „szegélyskálán” láthatók a  $P$  póluspontból kiinduló  $m$ -sugárnyaláb irányvonalai.)

A következőkben a Tromp-görbék „korrekciójával” s a módosított SG függvénynek a Tromp-görbékre való alkalmazási lehetőségeivel foglalkozunk.

A 4. ábra b) rajzán — példaképpen — az 5. ábra, c) rajzán a 6. ábra  $T'$  „korrigált” Tromp-görbéi vannak berajzolva, a hozzájuk tartozó  $m$  vonalak





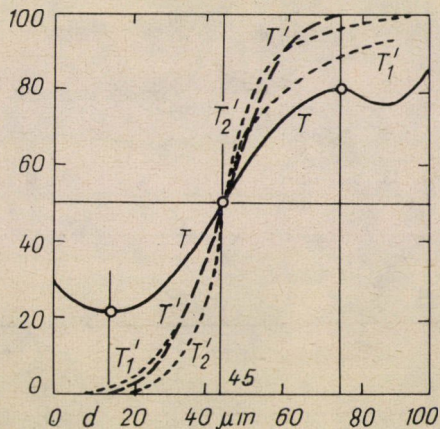
4. ábra



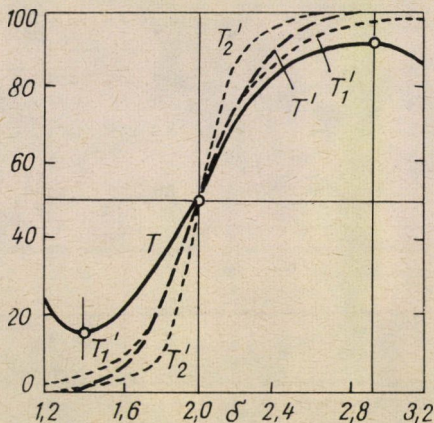
megjelölésével. Az 5. és 6. ábrák teljes vonallal kihúzott „szabálytalan”  $T$  Tromp-görbéi „önkéntesen” vannak rajzolva; az 5. ábrán  $d$  szemcsenagyság, a 6. ábrán  $\delta$  fajsúly abszcisszával. Az I. és II. táblázatok közlik az ábrákról leolvasott számszerű adatokat. Szaggatott vonallal van az ábrákon a megfelelő  $T'$  „korrigált” Tromp-görbe megrajzolva, amely már az osztályozó vagy dúsító készülék jóságának megítélésére közvetlenül alkalmas.

$T$  és  $T'$  között a

$$T' = (T - T_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min})$$



5. ábra



6. ábra

összefüggés érvényes. Az 5. ábrán (I. táblázatban)  $T_{\min} = 20$ ,  $T_{\max} = 80$ , vagyis itt

$$T' = (T - 20) / 60,$$

a 6. ábrán (és 2. táblázatban)  $T_{\min} = 15$ ,  $T_{\max} = 91$ , vagyis itt

$$T' = (T - 15) / 76$$

képlettel számítandó ki a korrigált  $T'$ . A táblázatok a  $b = y/y_{50}$  értékeket is tartalmazzák ( $y_{50}$  az ábrák  $T' = 50\%$  értékéhez tartozó abszcissa-érték) s a 4. ábra b) rajzán az 5. ábra (ill. I. táblázat), c) rajzán a 6. ábra (II. táblázat)  $T'$  görbéi is láthatók (a táblázatok összetartozó  $b$  és  $T'$  értékei által meghatározott pontokon áthúzva).

A 4. ábra c) rajzán

$$b = \delta / \delta_{50} \text{ és } b = (\delta - 1) / (\delta_{50} - 1)$$

abszcisszákhöz tartozó korrigált  $T'$  és  $T''$  görbék egyaránt szerepelnek; a fajsúly alapján dúsító gépek anamorf ábrázolású (= Kolmogorov-függvény szerinti) Tromp-görbéi ui.  $\log(\delta - \gamma)$  abszcissa mellett adnak — rendszerint —

I. táblázat

y	T	T'	b	m = 3	
				T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>
0	27				
10	21		0,222	0,5	
20	21	1,7	0,445	4	0,5
30	28	13,3	0,666	15	4,8
40	41	35,0	0,89	35	24
50	58	63,4	1,11	64	70
60	73	88,4	1,33	79	90
70	79	98,4	1,555	87	95,5
80	79	100	1,778	91	98,4
90	76		2,00	93,8	99
100	85				
15	20	0	0,333	min	
75	80	100	1,67	max	

II. táblázat

	T	T'	b'	m = 1,7		(δ-1) b'	m = 3,7		5,1
				T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>		T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	
1,2	24		0,6			0,2			
1,4	15	0	0,7	3,5	0,4	0,4	2		
1,6	20	6,6	0,8	9	2	0,6	7		< 3
1,8	34	25,0	0,9	24	10	0,8	22		14
2,0	53	50	1,0	50	50	1,0	50		50
2,2	72	76,4	1,1	76	85	1,2	72		80
2,4	82	88,1	1,2	85	95	1,4	84		91
2,6	89	97,5	1,3	93	98,6	1,6	91		95,5
3,0	90	100	1,5	97					
3,2	86	100	1,6	98,5					
1,3	15	min							
2,9	91	max							

egyeneseket. (Víz közegben  $\gamma = 1$ , levegőben  $\gamma = 0$ ). [Mások (VISSAC)  $\log(\delta - \delta_{\min})$  vagy  $\log \delta^{0,6}$  (Tromp) abszcissa-beosztásnál kaptak egyeneseket.] Szitáknál rendszerint  $\log d$  abszcissa-beosztásnál kapunk az anamorf Tromp-görbékre egyeneseket.

A „szabályos” Tromp-görbékre

$$E_p = (y_{75} - y_{25})/2$$

és

$$I = E_p/(y_{50} - \gamma)$$

összefüggések érvényesek. [ $E_p$  (écart probable) a 75 és 25%-os kvartilis középértéke;  $I$  (imperfekció)  $E_p$  és a médian viszonyaránya.] Vagyis nedves dústásnál, ahol  $b = (\delta - 1)/(\delta_{50} - 1)$ :

$$I = (b_{75} - b_{25})/2$$

és

$$E_p = (\delta_{50} - 1)I = (\delta_{50} - 1)(b_{75} - b_{25})/2,$$

míg száraz dústógépek vagy sziták esetében, ahol  $b = y/y_{50}$ :

$$E_p = y_{50}(b_{75} - b_{25})/2$$

és

$$I = (b_{75} - b_{25})/2.$$

Mint látható, a 4. ábra  $\overline{SG}$ -hálón a  $T'$  görbék egyike sem „egyenes”, úgyhogy a hozzájuk tartozó  $m$ -érték meghatározása is bizonytalan.

Az  $\overline{SG}$ -hálón mindegyik  $T'$  görbéhez két-két  $m$ -egyenes van behúzva; egyik ( $T'_1$ ) a 25 ÷ 75% közötti szakaszhoz, a másik ( $T'_2$ ) a  $T'$ -spektrum két szélső pontjához tartozik. (Az utóbbit az egyik „szélső” pontot a másik szélső pontnak a  $P$  ( $b = 1$ ,  $T' = 50\%$ ) pólusponton átmenő egyenesen levő tükrönpontjával összekötő egyenessel a pólusponton áthúzott párhuzamos szolgáltatja.) A  $T'_1$  és  $T'_2$  egyeneseknek adott  $b$  értékekhez tartozó (a 4. ábráról leolvasott) számértékeit is közli az 1. és 2. táblázat, s maguk e görbék az 5. és 6. ábrán pontozott vonallal bejelölve láthatók.

$I = (b_{75} - b_{25})/2$  kifejezés  $b_{75}$  és  $b_{25}$  értéke az  $\overline{SG}$  függvényénél az

$$F_{25} = 0,25 = 0,5 b_{25}^m$$

ill.

$$F_{75} = 0,75 = 1 - 0,5/b_{75}^m$$

képletekből adódó

$$b_{75} = \sqrt[m]{2} \quad \text{és} \quad b_{25} = \sqrt[m]{0,5}$$

lesz, vagyis

$$I_{\overline{SG}} = (\sqrt[m]{2} - \sqrt[m]{0,5})/2.$$

Egyes  $m$  értékeknél e képlettel adódó  $I_{\overline{SG}}$  értékeket közöl a III. táblázat. A kiszámított értékeket a logaritmikus koordinátájú 7. ábrán bejelölve, a pontokhoz  $45^\circ$  hajlású  $I'$  egyenes simul; ennek egyenlete tehát  $I' = C/m$ . (Az ábrán  $C = 0,70$ .) A III. táblázat az

$$I' = C/m, \quad 100 \Delta I = (I_{\overline{SG}} - I')\% \quad \text{és} \quad 100 \Delta I / I_{\overline{SG}}\%$$

III. táblázat

$m =$	1	2	3	4	5	7	10	
$I_{SG} =$	0,75	0,353	0,2325	0,174	0,139	0,0995	0,0696	
$C = 0,70$	} $I'$	0,70	0,350	0,233	0,175	0,140	0,100	0,0700
0,695		0,695	0,3475	0,23167	0,17375	0,139	0,0993	0,0695
0,69		0,69	0,345	0,230	0,1725	0,138	0,0986	0,0690
$C = 0,70$	} $\Delta I \%$	-5	-0,3	+0,05	+0,1	+0,1	+0,05	+0,04
0,695		-5,5	-0,55	-0,133	-0,025	0	-0,02	-0,01
0,69		-6	-0,8	-0,3	-0,15	-0,10	-0,09	-0,06
$C = 0,70$	} $\frac{\Delta I}{I} \%$	-6,67	-0,85	+0,21	+0,57	+0,72	+0,50	+0,57
0,695		-7,33	-1,56	-0,57	-0,14	0	-0,20	-0,14
0,69		-8,00	-2,26	-1,29	-0,86	-0,72	-0,90	-0,86

$m =$	15	20	30	40	50	
$I_{SG} =$	0,04615	0,03465	0,02256	0,01725	0,01405	
$C = 0,70$	} $I'$	0,0466	0,0350	0,0233	0,0175	0,0140
0,695		0,04633	0,03475	0,023167	0,017375	0,0139
0,69		0,0460	0,0345	0,0230	0,01725	0,0138
$C = 0,70$	} $\Delta I \%$	+0,045	+0,035	+0,074	+0,025	-0,005
0,695		+0,013	+0,010	+0,0607	+0,0125	-0,015
0,69		-0,015	-0,015	+0,044	0	-0,025
$C = 0,70$	} $\frac{\Delta I}{I} \%$	+0,97	+1,01	+3,28	+1,45	-0,36
0,695		+0,29	+0,29	+2,69	+0,73	-1,07
0,69		-0,33	-0,43	+1,95	0	-1,78

értékeket  $C = 0,70 - 0,695 - 0,69$  tényező mellett is közli. A  $\Delta I/I$  „relatív %-os eltérést”  $m$  függvényében — közönséges beosztású ordinátával — a 7. ábra is feltünteti.

$I'$  és  $m$  kölcsönös átszámításánál az

$$I'm \cong 0,7$$

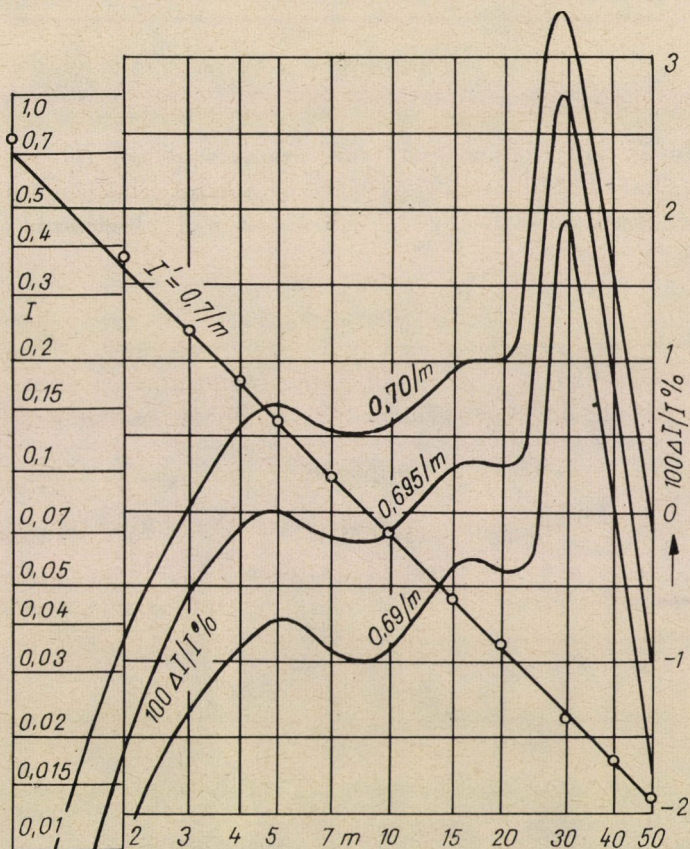
összefüggést használhatjuk. (Pl.  $C = 0,69$  értékkel számolva  $C = 0,70$  helyett  $\delta/0,7 = 1,43\%$ -kal kisebb relatív értékeket kapunk, vagyis az eltérés elhanyagolható.)

Különböző  $I$  értékekhez tartozó  $m$  értékek eszerint az alábbiak lesznek:

$I = 0,02$	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$m = 35,0$	17,5	11,7	8,75	7,00	4,66	3,50	2,80	2,33	2,00	1,75

Szenek mosására szolgáló néhány készülék  $I$  imperfekciójának kb. nagysága:





7. ábra

Statikus nehézsuszpenziós kád (+10 mm):  $0,02 \div 0,05$

Nhézsuszpenziós hidrociklon (−10 mm):  $0,03 \div 0,07$

Ülepítőgép, durva (+10 mm):  $0,10 \div 0,18$

Ülepítőgép, finom (−10 mm):  $0,14 \div 0,20$

Utóülepítőgép (−10 mm):  $0,20 \div 0,30$

Szér (−10 mm):  $0,10 \div 0,20$

Rheo-csatorna, durva (+10 mm):  $0,16 \div 0,25$

Rheo-csatorna, finom (−10 mm):  $0,30 \div 0,40$

Humphreys spirális (−3 mm):  $0,30 \div 0,40$

A 4. ábra b) rajzán (I. táblázat) a 25÷75% közötti szakaszra érvényes  $T'_1$  egyeneséhez  $m_1 = 3,0$  és  $I_1 = 0,7/3 = 0,233$ ; a szélső pontokra érvényes  $T'_2$  egyeneséhez  $m_2 = 5,7$  és  $I_2 = 0,123$  értékek tartoznak.  $y_{50} = d_{50} = 45 \mu\text{m}$ ; vagyis az 5. ábra „szitájára”

$$E_{p_1} = 45 \cdot 0,233 = 105 \mu\text{m},$$

ill.

$$E_p = 45 \cdot 0,123 = 55 \mu\text{m}$$

érvényes.

Ha nem szitáról, hanem osztályozó áramkészülékről (pl. hidrociklonról vagy mechanikai osztályozóról, vagy légszeparátorról stb.) lenne itt szó, ezek Tromp-görbéi „szigorúan véve”  $y = v_0$ , ill.  $b = v_0/v_{050}$  abszcisszán érvényesek, ahol

$$v_0 = C'd^p$$

a szemcsék süllyedési végsebessége. Vagyis az áramkészülékek Tromp-görbéjét  $y = d$  „szemcsenagyság”, ill.  $b = d/d_{50}$  abszcisszán ábrázolva, a valóban helyes értékek  $d^{1/p}$  ill.  $b^{1/p}$  korrekció mellett adódnak, amikor is

$$m_{v_0} = m_d^2$$

lesz.

$Re = v_0 d / \nu \lesssim 1$  Reynolds-számnál  $p = 2$ ,  $Re = 30-300$  között  $p \approx 1$ ;  $Re = 1-30$  között  $p$  értéke 2-ről fokozatosan 1-ig csökken. ( $Re \gtrsim 600$ -nál  $p = 0,5$ , de áramkészülékeknél  $Re > 200$  gyakorlatilag már nem fordul elő.)

Pl.  $d = 45 \mu\text{m}$  kvarc ( $\delta = 2,65$ ) esetében

$$v_0 = \frac{d^2(\delta - \gamma)}{18\eta} = \frac{0,0045^2 \cdot 1,65}{18 \cdot 10^{-5}} = 0,186 \text{ cm/s,}$$

$Re = 0,186 \cdot 0,0045 / 0,01 = 0,083$ , vagyis  $p = 2$ , ill.  $m_{v_0} = m_d^2$  lesz, azaz

$$m_{v_{01}} = 3^2 = 9 \quad (I_1 = 0,078)$$

és

$$m_{v_{02}} = 5,7^2 = 32,5 \quad (I_2 = 0,0215)$$

„helyes” áramkészülék-adatokhoz jutunk.

A 4. ábra c) rajzán (II. táblázat) —  $b = \delta/\delta_{50}$  esetében —  $T'_1$ -re

$$m_1 = 7,7 \quad (I'_1 = 0,091)$$

és  $T'_2$ -re

$$m_2 = 13,6 \quad (I'_2 = 0,0515),$$

míg  $b = (\delta - 1)/(\delta_{50} - 1)$  esetében  $T''_1$ -re

$$m_1 = 3,7 \quad (I''_1 = 0,189)$$

és  $T''_2$ -re

$$m_2 = 5,1 \quad (I''_2 = 0,137)$$



értékeket kaptunk. Itt  $\delta_{50} = 2,0$  volt, vagyis száraz dúsításnál (ahol  $b = \delta/\delta_{50}$  és  $E_p = \delta_{50}I$ ):

$$E'_{p1} = 0,182, \text{ ill. } E'_{p2} = 0,103;$$

nedves dúsításnál [ahol  $b = (\delta - 1)/(\delta_{50} - 1)$  és  $E_p = (\delta_{50} - 1)I$ ]:

$$E''_{p1} = 0,189, \text{ ill. } E''_{p2} = 0,137$$

értékekhez jutunk.

## IRODALOM

I. TARJÁN G.: A szemcseceloszlási függvények összehasonlítása — alkalmazásuk a Tromp-görbékre. *BKL Bányászat* 106 (1973), 2—6.

**Modified SG-(SCHUHMANN-GAUDIN)-Functions Applied to TROMP-Curves.** Grain distribution functions  $F = f(y)$  can be transformed into the form  $F = f(b)$  where  $b = y/y_{50}$ . For the assumed range  $b > 1$ , respectively,  $F > 50\%$ , the SCHUHMANN-GAUDIN-SG-function takes the form:  $F = 1 - b^{-m/2}$ . Doing so, the relative deviation between this new formula and the Kolmogorov-K-formula, respectively, the Rosin-Rammler-RR-formula is practically negligible. Functions which are analogous to grain distribution functions as expressions by the granulometry of grain-sets frequently occur in many other fields of ore preparation technology. In this paper, the application of the modified SG-function to TROMP-curves is discussed in detail.

**Anwendung der modifizierten SCHUHMANN-GAUDIN-Funktion für die TROMP-Kurven.** Man kann die Kornverteilungsfunktionen der Form  $F = f(y)$  auf eine andere Form  $F = f(b)$  abändern, wobei  $b = y/y_{50}$ . Die SCHUHMANN-GAUDIN (SG) Funktion  $F = 1 - b^{-m/2}$  kann bei  $b > 1$  d. h.  $F > 50\%$  auf eine modifizierte Form:  $F = 1 - b^{-m/2}$  bringen; nun ist die relative Abweichung zwischen dieser abgeänderten, leicht anwendbaren Funktion und der Kolmogorow-K-Funktion (bzw. der Rosin-Rammler-RR-Funktion) praktisch vernachlässigbar. Es treten Funktionen, die den Kornverteilungsfunktionen betreffs Granulometrie von Korngruppen analog sind auch in manchen anderen Gebieten der Aufbereitungstechnologie auf. Diesbezüglich wird hier die Anwendbarkeit der abgeänderten SG-Funktionen für die Tromp-Kurven ausführlich besprochen.