# KÜLÖNBÖZŐ MEREVSÉGGEL BÍRÓ ALSÓ-FELSŐ ÖVSÍKÚ, KÉTRÉTEGŰ TÉRRÁCSOK SZÁMÍTÁSA A KONTINUUM-MÓDSZERREL

KOLLÁR LAJOS*

a műszaki tudományok doktora

[Beérkezett 1971. július 23-án]

A dolgozat általános módszert közöl olyan kétrétegű térbeli rácsszerkezetek egyenértékű kontinuumának meghatározására, amelyeknek két övsíkja egymástól eltérő, tetszőleges hálózatból áll. Levezeti az egyenértékű kontinuum differenciálegyenlet-rendszerét és peremfeltételeit. Megállapítja, hogy a lemezek alakváltozását jellemző lehajlásfüggvényen kívül még egy feszültségfüggvényre is szükség van a helyettesítő kontinuum erőjátékának jellemzésére, hasonlóan a bordázott lemezek esetéhez.

## 1. Bevezetés

A kétrétegű térbeli rácsos szerkezetek kontinuum-módszerrel történő számítása megoldott probléma abban az esetben, ha a két övsík merevségi jellemzői azonosak, vagy csak egyetlen közös szorzótényezőben különböznek egymástól [7], [3]. Ha azonban a két övsík merevségi jellemzői különböző mértékben vagy minőségileg térnek el egymástól (pl. az egyiknek van nyírási merevsége, a másiknak nincs stb.), akkor a feladat lényegesen bonyolultabbá válik, és hasonló lesz az egyik oldalán kétirányban bordázott lemez erőjátékához [1].

Egy korábbi dolgozatban [4] egy speciális szerkezet-fajtára mutattunk be megoldást: az alsó övsíknak nem volt nyírási merevsége, a felsőnek viszont volt, de $x$ és $y$ irányban csak egyenlő nagyságú derékerőt tudott felvenni. Most egy általános érvényű módszert mutatunk be, amellyel fel tudjuk írni bármilyen merevségi tulajdonságokkal bíró alsó és felső övsíkú térrács kontinuum-egyenletét.

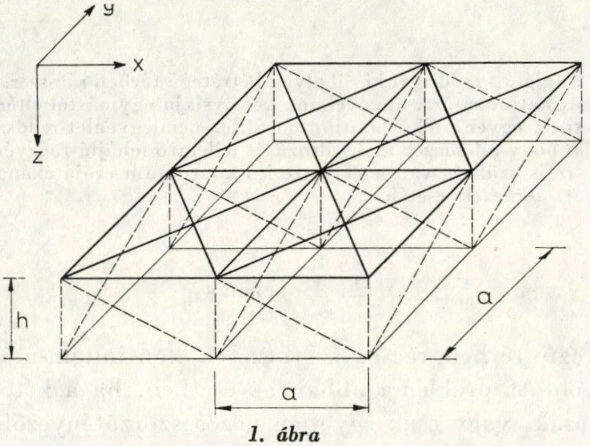
## 2. A feladat kitűzése. Feltevések

Legyen adva egy kétrétegű, egymástól $h$ távolságban levő párhuzamos övsíkokból álló térrács. Az övsíkokról csak azt kötjük ki, hogy *homogének* legyenek, azaz merevségi jellemzőik mindenütt legyenek azonosak, és ezenkívül kölcsönösen egyértelmű, lineáris összefüggés álljon fenn az alakválto-

* Dr. Kollár Lajos, 1122 Budapest, Karap u. 9.

zás- és metszeterő-komponensek között. Az övsíkok merevsége egyébként teljesen általánosan anizotróp *(aeolotróp)* lehet. Az őket összekötő rácsozástól pedig azt kívánjuk meg, hogy akadálytalanul tegye lehetővé az övsíkok deformációját. Az 1. ábrán tüntettünk fel egy példát a fenti feltételeknek megfelelő térrácsra.

Megemlítjük még, hogy a módszer *inhomogén* (változó merevségű) övsíkok esetén is használható, csak a felírandó differenciálegyenlet együtthatói fognak helyről-helyre változni.




*1. ábra*

Az övsíkokat statikai szempontból a saját síkjukban bekövetkező alakváltozásokkal szemben tanúsított nyúlási és nyírási merevségeik jellemzik. Ezeket az alapul választott x,y koordinátarendszerben az

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{1a}$$

azaz röviden az

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} \tag{1b}$$

mátrix-összefüggés definiálja. Itt $\mathbf{n}$ a vizsgált övsík (membrán-) metszeterőinek vektora, $\boldsymbol{\epsilon}$ az alakváltozási vektor, $\mathbf{A}$ pedig a merevségi mátrix. Ez utóbbi a külső idegen munkák tétele miatt mindig szimmetrikus.

Jelöljük a következőkben az alsó övsíkra vonatkozó mennyiségeket „*a*" indexszel, a felsőre vonatkozókat pedig „*f*" indexszel.

## 3. A módszer ismertetése

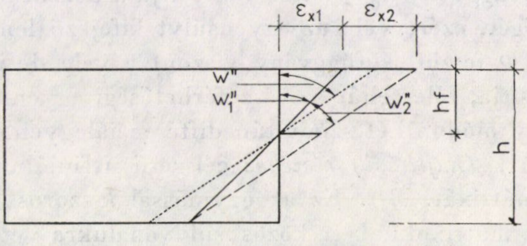
Bontsuk fel az egyik, pl. a felső övsík merevségi mátrixát két részre:

$$\mathbf{A}^f = \mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f + \mathbf{A}_{\mathrm{II}}^f. \tag{2}$$

Az $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f$ részt válasszuk meg úgy, hogy elemei az alsó övsík merevségeinek „$k$”-szorosai legyenek:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f = k \cdot \mathbf{A}^a. \tag{3}$$

Ily módon az $\mathbf{A}_{\mathrm{II}}^f$ „különbség”-merevségi mátrix tulajdonképpen a felső övsík merevségének az alsóétól való minőségi eltérését fejezi ki.




*2. ábra*

A szerkezet teljes alakváltozását és erőjátékát is két részre fogjuk bon tani. 1. résznek tekintjük az $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f$ merevségű felső és a vele arányos $\mathbf{A}^a$ merev ségű alsó övsík *tiszta hajlítási deformációját* ($w_1$) és belső erőit. Ezek közül az alsó övsík belső erői a végleges értéküket veszik fel. A felső övsíkban azonban az ebből a $w_1$ hajlítási deformációból keletkező $\epsilon_{\mathrm{I}}^f$ alakváltozások a valóságban nemcsak az $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f$ merevségnek megfelelő belső erőket hozzák létre, hanem az $\mathbf{A}_{\mathrm{II}}^f$ merevségeknek megfelelőket is. Ezek viszont általában nem alkotnak önmagukban egyensúlyi erőrendszert. Így a felső övsík még egy kiegészítő (2. jelű) *síkbeli alakváltozásra* kényszerül, hogy az ennek során ébredő belső erőkkel egyensúlyozza ki az 1. (hajlítási) alakváltozás-rész kiegyensúlyozatlan erőit. Ennek a kiegészítő alakváltozásnak természetesen összeférhetőnek is kell lennie.

E két erőjáték-részt természetesen nem lehet külön-külön meghatározni, mivel egyik sem alkot önmagában egyensúlyi erőrendszert, hanem csak egyszerre egy lépésben.

A 2. jelű síkbeli alakváltozásból az alsó övsík nem szenved a saját síkjában semmiféle deformációt (mivel az összekötő rácsozás — korábbi feltevésünknek megfelelően — akadálytalanul lehetővé teszi az egyik öv alakváltozását), de az egész szerkezet további hajlítási alakváltozást végez ($w_2$, lásd a 2. ábrát). Az ennek megfelelő nyomatékokat (az 1. alakváltozás-rész kiegyensúlyozatlan erőinek nyomatékaival együtt) a felső övsík megfelelő membrán-erőinek a semleges tengelyre vett nyomatéka szolgáltatja. Ezek a nyomatékok azonban nem vesznek részt a függőleges teher viselésében, mivel egyensúlyban levő erőrendszerből származnak, és így zérus lesz a belőlük kapható nyomatékokkal képezett lemezegyenletnek a jobb oldala is.

## 4. Az alapegyenletek levezetése

Az alakváltozás és az erőjáték ismertetett két részre bontásának megfelelően az 1. részt a $w_1$ hajlítási lehajlásfüggvénnyel fogjuk jellemezni, a 2. részt pedig a kiegészítő síkbeli erőrendszert definiáló $\Phi$ feszültségfüggvénnyel. Mivel a $w_1$ lehajlásfüggvény bevezetése biztosítja a hozzátartozó alakváltozások összeférhetőségét, ezért vele az egyensúlyt kifejező lemezegyenletet kell kielégítenünk. Az $\Phi$ feszültségfüggvény viszont a vele definiált síkbeli erők egyensúlyát biztosítja, tőle tehát az összeférhetőségi egyenlet teljesítését kell megkívánnunk. Ily módon két szimultán differenciálegyenlethez jutunk.

Az erőjáték 1. *(hajlítási) részéhez* célszerű definiálnunk a térrács hajlítási merevségi mátrixát, $\mathbf{B}$-t. Ez az egymással $k$-szoros arányban álló $\mathbf{A}^a$ és $\mathbf{A}_I^f$ övmerevségi mátrixoknak a közös súlyvonalukra vett inercianyomatékával egyenlő. E közös súlyvonal távolsága a felső övsíktól:

$$h^f = h\frac{1}{1+k}, \tag{4}$$

a hajlítási merevségi mátrix tehát:

$$\mathbf{B} = h^2\frac{k}{1+k}\mathbf{A}^a. \tag{5}$$

E hajlítási merevségi mátrix biztosítja az összefüggést a $w_1$ hajlítási alakváltozás második deriváltjai, azaz a görbületek és a (kétszeres) csavarodás, valamint a teljes térrácsra ható fajlagos nyomatékok között:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1'' \\ w_1^{\cdot\cdot} \\ 2w_1'^{\cdot} \end{bmatrix} \tag{6a}$$

(vesszővel az $x$ szerinti, ponttal az $y$ szerinti differenciálást jelöljük), azaz

$$\mathbf{m} = -\mathbf{B}\cdot L_1 w_1, \tag{6b}$$

ha $L_1$-gyel jelöljük a következő differenciáloperátort:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ezek után *a lemez egyensúlyát* kifejező ismert [6]

$$m_x'' + m_y^{\cdot\cdot} + 2m_{xy}'^{\cdot} = -p \tag{8a}$$

differenciálegyenletet is a rövidebb

$$L_1^* \mathbf{m} = -p \tag{8b}$$

alakban írhatjuk fel. Behelyettesítve ide (6b)-t, megkapjuk a hajlítási $w_1$ alakváltozás differenciálegyenletét az általánosan anizotróp lemez merevségével kifejezve:

$$L_1^* \mathbf{B} L_1 w_1 = p\,. \tag{9}$$

A *kiegészítő síkbeli alakváltozás*nak, vagyis az erőjáték 2. *részének* vizsgálatához először is azt kell meggondolnunk, hogy a felső övsík kiegészítő

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_{y2} \\ \gamma_{xy2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

síkbeli alakváltozásából keletkező

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{xy2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^f \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 \tag{11}$$

erőrendszer nem önmagában lesz egyensúlyban, hanem az 1. (hajlítási) alakváltozásból származó erők $\mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}$ kiegyensúlyozatlan részével együtt. Eme $\mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}$ kiegyensúlyozatlan erőket az elmondottak értelmében úgy állíthatjuk elő, hogy a felső övsíknak a $w_1$ hajlítási alakváltozásból származó

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{y1} \\ \gamma_{xy1} \end{bmatrix} = h^f \cdot L_1 w_1 \tag{12}$$

nyúlási alakváltozásait ([3], 2. ábra) megszorozzuk az $\mathbf{A}_{II}^f$ „különbség"-merevségi mátrix megfelelő elemeivel:

$$\mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} n_{x1\,\mathrm{II}} \\ n_{y1\,\mathrm{II}} \\ n_{xy1\,\mathrm{II}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathrm{II}}^f \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1\,. \tag{13}$$

A $\Phi$ feszültségfüggvényt tehát úgy kell megválasztanunk, hogy az $\mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}$ és $\mathbf{n}_2$ erők *összegének* egyensúlyát biztosítsa, azaz:

$$\begin{aligned} \Phi^{\cdot\cdot} &= n_{x1\,\mathrm{II}} + n_{x2}\,, \\ \Phi'' &= n_{y1\,\mathrm{II}} + n_{y2}\,, \\ -\Phi'^{\cdot} &= n_{xy1\,\mathrm{II}} + n_{xy2}\,, \end{aligned} \tag{14a—c}$$

vagyis, bevezetve az

$$L_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{15}$$

differenciáloperátort:

$$L_2 \Phi = \mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}} + \mathbf{n}_2 . \tag{16}$$

Eme előkészítés után rátérhetünk *a síkbeli alakváltozás összeférhetőségi* egyenletére, amely, mint ismeretes [5], a következő alakú:

$$L_2^* \boldsymbol{\epsilon} = \varepsilon_x^{\cdot\cdot} + \varepsilon_y'' - \gamma_{xy}'^{\cdot} = 0 . \tag{17}$$

Elvben csak az $\boldsymbol{\epsilon}_2$ kiegészítő alakváltozástól kellene megkövetelnünk e (17) összeférhetőségi egyenlet teljesítését, mivel a $w_1$-ből származó $\boldsymbol{\epsilon}_1$ alakváltozás (12) amúgyis összeférhető. A (14) ill. (16) egyenletekből azonban látszik, hogy $\boldsymbol{\epsilon}_2$-t nem tudjuk önmagában kifejezni $\Phi$-vel, mivel $\Phi$ tartalmazza az $\boldsymbol{\epsilon}_1$ alakváltozásból származó erők egy részét is. Kiegészítjük tehát a (16) egyenletet az 1. erőjáték-rész hiányzó $\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}}$ erőivel, és a belőle származó teljes (1.+2.) alakváltozásra írjuk fel az összeférhetőség teljesülését.

E hiányzó $\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}}$ erők tulajdonképpen a hajlítási erőjátékból származó öv-erőkkel egyenlők:

$$\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}} = -\frac{\mathbf{m}}{h}\,, \tag{18a}$$

azaz (6b) alapján:

$$\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}} = \frac{1}{h}\,\mathbf{B} \cdot L_1 w_1\,. \tag{18b}$$

A felső övsíkban keletkező teljes erőrendszer tehát, (16)-ot is figyelembe véve:

$$\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}} + \mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}} + \mathbf{n}_2 = \frac{1}{h}\,\mathbf{B} L_1 w_1 + L_2 \Phi\,. \tag{19}$$

Az ennek megfelelő teljes $\epsilon_1 + \epsilon_2$ alakváltozást az (1) egyenletrendszer invertálása szolgáltatja:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = (\mathbf{A}^f)^{-1} \cdot (\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}} + \mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}} + \mathbf{n}_2) = (\mathbf{A}^f)^{-1} \left( \frac{1}{h} \mathbf{B} L_1 w_1 + L_2 \Phi \right). \quad (20)$$

Behelyettesítve ezt (17)-be, megkapjuk a térrács erőjátékát leíró másik differenciálegyenletet:

$$L_2^*(\mathbf{A}^f)^{-1} \left( \frac{1}{h} \mathbf{B} L_1 w_1 + L_2 \Phi \right) = 0\,. \quad (21)$$

A (9) és (21) egyenletekből álló rendszer — a peremfeltételekkel együtt — meghatározza a $w_1$ és $\Phi$ függvényeket és ezzel együtt a teljes erőjátékot. A peremfeltételeket azonban nem $w_1$-re, hanem csak a *teljes* $w$ lehajlásra tudjuk megadni. Át kell tehát írni az egyenleteket úgy, hogy $w_1$ helyett $w$-t tartalmazzák. Ez a teljes $w$ lehajlás az 1. (hajlítási) erőjátékrészből származó $w_1$ lehajlásnak, valamint a 2. (kiegészítő síkbeli) alakváltozásból származó $w_2$ lehajlásrésznek az összege:

$$w = w_1 + w_2. \quad (22)$$

A $w_1$ lehajlás — mivel az alsó övsík a 2. alakváltozás során nem deformálódik — a 2. ábrának megfelelően kifejezhető az $\epsilon_2$ alakváltozással:

$$\begin{aligned} w_2'' &= \frac{\varepsilon_{x2}}{h}, \\ w_2^{\cdot\cdot} &= \frac{\varepsilon_{y2}}{h}, \\ 2w_2'^{\cdot} &= \frac{\gamma_{xy2}}{h}, \end{aligned} \quad (23a)$$

azaz

$$L_1 w_2 = \frac{1}{h} \epsilon_2\,. \quad (23b)$$

(22) segítségével kifejezzük a (9) és (21) egyenletekben szereplő $L_1 w_1$-et $w$-vel és $\epsilon_2$-vel:

$$L_1 w_1 = L_1 w - \frac{1}{h} \epsilon_2\,. \quad (24)$$

Most még $\epsilon_2$-t kell kifejeznünk $\Phi$-vel és $w$-vel. A (20) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $\mathbf{A}^f$-fel, majd (12) segítségével felírjuk $\epsilon_1$-et $w_1$-gyel, ezt pedig (24) alapján $w$-vel és $\epsilon_2$-vel. Ily módon az egyenletben $\epsilon_2$-n kívül csupán a $w$ és

$\Phi$ függvények fognak szerepelni, $\epsilon_2$-t tehát meg tudjuk velük határozni:

$$\mathbf{A}^f\left[h^f\left(L_1 w - \frac{1}{h}\epsilon_2\right) + \epsilon_2\right] = \frac{1}{h}\mathbf{B}\left(L_1 w - \frac{1}{h}\epsilon_2\right) + L_2\Phi\,, \tag{25}$$

amiből átrendezéssel és figyelembe véve (5) alapján a

$$\frac{h - h^f}{h}\mathbf{A}^f + \frac{1}{h^2}\mathbf{B} = \frac{k}{1+k}(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)$$

azonosságot, a következő kifejezést kapjuk $\epsilon_2$-re:

$$\epsilon_2 = hL_1 w + \frac{1+k}{k}(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(L_2\Phi - h\mathbf{A}^f L_1 w)\,. \tag{26}$$

Behelyettesítve ezt (24)-be, megkapjuk $L_1 w_1$-nek $w$-vel és $\Phi$-vel felírt alakját:

$$L_1 w_1 = \frac{1}{h}\frac{1+k}{k}(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi)\,. \tag{27}$$

Ha (27)-et beírjuk (9)-be és (21)-be (és még az egyöntetűség kedvéért $\mathbf{B}$-t is kifejezzük (5) alapján $\mathbf{A}^a$-val), előállítottuk a teljes $w$ lehajlást és a $\Phi$ feszültségfüggvényt tartalmazó differenciálegyenlet-rendszert:

$$hL_1^*\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi) = p\,. \tag{28a}$$

$$L_2^*(\mathbf{A}^f)^{-1}[\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi) + L_2\Phi] = 0\,. \tag{28b}$$

(28a—b)-t nevezhetjük tehát *az általános kétrétegű térrács viselkedését leíró kontinuum-differenciálegyenlet-rendszernek.*

E differenciálegyenlet-rendszerből kiesett a (3)-ban definiált $k$ arányossági tényező, ami azt jelenti, hogy $k$-t tetszőlegesen vehetjük föl.

A (28a—b) differenciálegyenlet-rendszer természetesen feltételezi az $\mathbf{A}^f$ és az $(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)$ mátrixok invertálhatóságát. Egy másik alkalommal kívánunk foglalkozni azokkal az esetekkel, amikor ez a feltétel nem teljesül.

Abban a speciális esetben, ha a két övsík merevségei *arányosak* egymással ($\mathbf{A}^f = k\mathbf{A}^a$), akkor

$$\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1} = \frac{1}{1+k}\mathbf{E}$$

és

$$(\mathbf{A}^f)^{-1}\mathbf{A}^f = \mathbf{E}$$

miatt (28a)-ban $\Phi$, (28b)-ben pedig $w$ szerepel az $L_1 L_2$ operátorokkal szorozva, amely viszont zérust ad. Így a (28a—b) egyenletrendszer két önálló egyenletre esik szét: az első a

$$\mathbf{B} = h^2 \frac{k}{1+k} \mathbf{A}^a$$

hajlítási merevség-mátrixú lemez $w$ lehajlását határozza meg, a második pedig a kiegészítő $\Phi$ feszültségfüggvény alakváltozási összeférhetőségét biztosítja, de a felső övsík síkjában terheletlen peremek esetében $\Phi = 0$ adódik.

A helyettesítő kontinuumnak a (28a—b) egyenletek — peremfeltételeket is figyelembe vevő — megoldásával kapott metszeterőit az Irodalom rovatban [7], [2], illetve [3] alattiak szerint számíthatjuk át rúderőkké.

## 5. Peremfeltételek

A következőkben a szabadon támaszkodó (csuklós) perem feltételi egyenleteit írjuk fel, az egyszerűség kedvéért csak az $x$ tengellyel párhuzamos peremre:

zérus a lehajlás: $$w = 0, \tag{29a}$$
zérus a peremre merőleges hajlítónyomaték: $$m_y = 0, \tag{29b}$$
a felső övsíkban zérus a peremre merőleges vízszintes (membrán)-erő: $$n_y = n_{y1} + n_{y2} = 0, \tag{29c}$$
a felső övsíkban zérus a (membrán-)nyíróerő: $$n_{xy} = n_{xy1} + n_{xy2} = 0. \tag{29d}$$

(29b)-ből (18a) segítségével $n_{y1\,\mathrm{I}} = 0$ adódik, így (29c) a (14b) képlet figyelembevételével így írható:

$$\Phi'' = 0. \tag{29c*}$$

A (29b)-hez szükséges nyomatékot úgy fejezhetjük ki $w$-vel és $\Phi$-vel, hogy (27)-et behelyettesítjük (6b)-be. Figyelembe véve még az (5) összefüggést is, a következőt kapjuk:

$$\mathbf{m} = -h\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2 \Phi). \tag{29b*}$$

E nyomatékvektornak kell zérussal egyenlővé tenni a peremre merőleges (a jelen esetben $m_y$) komponensét.

Végül a (29d)-hez szükséges $\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}}$ metszeterő-vektort a (18b) és (5) összefüggéseket felhasználva az

$$\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}} = \frac{hk}{1+k} \mathbf{A}^a L_1 w_1$$

alakban írhatjuk fel. Behelyettesítve ebbe (27)-et, a következőképpen fejezhetjük ki $\mathbf{n}_{1\,I}$-et $w$-vel és $\Phi$-vel:

$$\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}} = \mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi)\,. \tag{29d*}$$

Ennek $n_{xy1\,\mathrm{I}}$ komponensét véve és hozzáadva (14c) értelmében $-\Phi''$-t, felírhatjuk a (29d) peremfeltételt.

## 6. Alkalmazási példa

Írjuk fel az 1. ábrán vázolt, az $x$ és $y$ irányokban azonos szilárdsági tulajdonságokkal rendelkező térrács kontinuum-differenciálegyenleteit a (29a—b) általános egyenletekből.

Ezt a térrácsot az jellemzi, hogy az alsó öv merevségi mátrixa

$$\mathbf{A}^a = \begin{bmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & A_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakú, a felső övé pedig (lásd [2]-t):

$$\mathbf{A}^f = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 \\ \nu A & A & 0 \\ 0 & 0 & A_{xy} \end{bmatrix}.$$

A (3) egyenlet szerint:

$$k = \frac{A}{A_a}\,.$$

Képeznünk kell még az $(\mathbf{A}^f)^{-1}$ és az $(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}$ mátrixokat:

$$(\mathbf{A}^f)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A(1-\nu^2)} & \dfrac{-\nu}{A(1-\nu^2)} & 0 \\ \dfrac{-\nu}{A(1-\nu^2)} & \dfrac{1}{A(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{A_{xy}} \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(A_a + A)}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & \dfrac{-\nu A}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & 0 \\ \dfrac{-\nu A}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & \dfrac{(A_a + A)}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{A_{xy}} \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, a (28a—b) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\frac{h}{(1+k)^2-k^2\nu^2}\{hkA_a[(1+k-k\nu^2)w^{IV}+2\nu w''^{\cdot\cdot}+(1+k-k\nu)w^{\cdot\cdot}]+$$
$$+[k\nu(\Phi^{IV}+\Phi^{\cdot\cdot})-2(1+k)\Phi''^{\cdot\cdot}]\}=p$$

és

$$\frac{h}{(1+k)^2-k^2\nu^2}[-k(w^{IV}+w^{\cdot\cdot})+2(1+k)w''^{\cdot\cdot}]-$$
$$-\frac{1}{[(1+k)^2-k^2\nu^2]k(1-\nu^2)A_a}\{[1+k(1+\nu^2)](\Phi^{IV}+\Phi^{\cdot\cdot})-2\nu(1+2k)\Phi''^{\cdot\cdot}]\}+$$
$$+\frac{1}{k(1-\nu^2)A_a}(\Phi^{IV}+\Phi^{\cdot\cdot}-2\nu\Phi''^{\cdot\cdot})+\frac{\Phi''^{\cdot\cdot}}{A_{xy}}=0.$$

Ha pedig elhanyagoljuk a felső övsík harántkontrakcióját ($\nu=0$), akkor az egyenletek a következőképpen egyszerűsödnek:

$$h^2\frac{k}{1+k}A_a\left(w^{IV}+w^{\cdot\cdot}-\frac{2\Phi''^{\cdot\cdot}}{hkA_a}\right)=p$$

és

$$\frac{2h}{1+k}w''^{\cdot\cdot}+\frac{1}{(1+k)A_a}(\Phi^{IV}+\Phi^{\cdot\cdot})+\frac{\Phi''^{\cdot\cdot}}{A_{xy}}=0.$$

A peremfeltételek pedig — $\nu=0$ és szabad támaszkodás esetében — az alábbi egyszerű alakban adódnak:

(29a): $$w=0,$$

(29c*): $$\Phi''=0,$$

A (29b*) peremfeltétel a

$$hAw^{\cdot\cdot}-\Phi''=0$$

alakot öltené, de (29c*) miatt tovább egyszerűsödik:

(29b*): $$w^{\cdot\cdot}=0,$$

és végül ($A^f_I=kA^a$ 33-as eleme zérus lévén) $n_{xy1\,I}=0$, így (29d) a következőképpen alakul:

(29d): $$\Phi'^{\cdot}=0.$$

Megjegyezzük azonban, hogy a harántkontrakció elhanyagolása mindenképpen közelítést jelent, mivel [2] szerint nem létezik olyan — két irányú húzási és nyírási merevséggel bíró — rácsozat, amelynek szabatosan 0 lenne a harántkontrakciós tényezője.

## IRODALOM


1. Giencke, E.: Die Grundleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. *Der Stahlbau* **24** (1955), 128—129.
2. Hegedüs I.: Négy vagy több irányú rudazatból álló hálózat számítása folytonos számítási modellal. (Megjelenés alatt)
3. Kollár L.—Hegedüs I.: Kétrétegű, általános háromszög hálózatú rácsszerkezet megoldása folytonos számítási modellal. *Műszaki Tudomány* **46** (1973), 65—82
4. Kollár L.: Kétrétegű, alaprajzban átlós—négyzetes térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel. *Műszaki Tudomány* 46 (1973), 191—209
5. Timoshenko, S.—Goodier, J. N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York—Toronto—London 1951.
6. Timoshenko, S.—Woinowski-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York—Toronto—London 1959.
7. Wright, D. T.: A Continuum Analysis for Double Layer Space Frame Shells. *Publ. Int. Assoc. Bridge Struct. Eng.* Zurich, **26** (1966).



**Continuum Method of Analysis for Double-Layer Space Trusses with Upper and Lower Chord Planes of Different Rigidities** A general method has been presented for determining equivalent continua of double-layer space trusses with two different, arbitrary chord plane meshes. Differential equation system and boundary conditions of the equivalent continuum are derived. In addition to the deflection function describing the plate deformation, a stress function is still needed to describe the internal force system of the substituting continuum, similarly as for ribbed plates.



**Berechnung zweischichtiger Raumfachwerke mit unteren und oberen Gurtebenen von verschiedenen Steifigkeiten mit dem Kontinuumverfahren.** Ein allgemeines Verfahren wird angegeben für die Bestimmung des gleichwertigen Kontinuums von zweischichtigen Raumfachwerken, deren beiden Gurtebenen aus unterschiedlichen, beliebigen Netzwerken bestehen. Differentialgleichungssystem und Randbedingungen des gleichwertigen Kontinuums werden abgeleitet. Ausser der Durchbiegungsfunktion, die die Plattenverformung beschreibt, ist noch eine Spannungsfunktion nötig für die Kennzeichnung des Kräftespiels des Ersatzkontinuums, ähnlich dem Fall der Rippenplatten.