

ORTOGONÁLISAN ANIZOTROP HENGERES HÉJAK ELTOLÓDÁSFÜGGVÉNYEI

VARGA LÁSZLÓ*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1971. december 20-án]

A dolgozat homogén anizotropia feltételezésével az ortotrop hengeres héjak feszültségi állapotát jellemző eltolódásfüggvények vizsgálatával és meghatározásával foglalkozik. Az eltolódásfüggvények bevezetésével ismerteti az egyensúlyi feltételekből adódó differenciálegyenletrendszer pontos és közelítő jellegű megoldásait. Részletesen tárgyalja a homogén rész általános megoldásait jelentő és az inhomogén rendszer partikuláris megoldásait jelentő eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolatot. Közli továbbá az eltolódásfüggvények meghatározására szolgáló differenciálegyenleteket. Végül ismerteti a membránerők okozta eltolódások és az eltolódásfüggvényeket tartalmazó differenciálegyenletet és annak megoldását.

Jelölések

- s — héjvastagság [cm]
- $u, u_0, u_p, u_1, u_2, u_3$ — alkotóirányú eltolódások [cm]
- $v, v_0, v_p, v_1, v_2, v_3$ — kerületirányú eltolódások [cm]
- $w, w_0, w_p, w_1, w_2, w_3$ — sugárirányú eltolódások [cm]
- x_1 — alkotóirányú koordináta [cm]
- x_2 — kerületirányú koordináta [cm]
- x_3 — sugárirányú koordináta [cm]
- $\bar{x}_1 = x_1/R, \bar{x}_2 = x_2/R$ — méretnélküli koordináták
- B_1 — az alkotóirányra vonatkozó hajlítási merevség [kp cm]
- B_2 — a kerületirányra vonatkozó hajlítási merevség [kp cm]
- B_3 — csavarási merevség [kp cm]
- D_1 — az alkotóirányra vonatkozó nyúlási merevség [kp/cm]
- D_2 — a kerületirányra vonatkozó nyúlási merevség [kp/cm]
- D_3 — nyírési merevség [kp/cm]
- E_1 — az alkotóirányra vonatkozó rugalmassági modulus [kp/cm²]
- E_2 — a kerületirányra vonatkozó rugalmassági modulus [kp/cm²]
- $\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_p, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ — eltolódásfüggvények [cm]
- G — nyírési rugalmassági modulus [kp/cm²]
- M_1, M_2 — fajlagos hajlítónyomatékok [cm kp/cm]
- M_{12}, M_{21} — fajlagos csavarónyomatékok [cm kp/cm]
- N_1, N_2 — normálerők [kp/cm]
- N_{12}, N_{21} — nyíróerők [kp/cm]
- R — a középfelület görbületi sugara [cm]
- Q_1, Q_2 — sugárirányú nyíróerők [kp/cm]
- X_1, X_2, X_3 — a héjfelületre ható megoszló külső erők [kp/cm²]

* Dr. Varga László, 1026 Budapest, Gábor Á. u. 42.

- ϵ_{11} — alkotóirányú fajlagos nyúlás
 ϵ_{22} — kerületirányú fajlagos nyúlás
 $\epsilon_{12}, \epsilon_{21}$ — fajlagos szögelfordulások
 ν_{12}, ν_{21} — Poisson tényezők (az első index az alakváltozás irányát, a második az erő irányát jelzi)
 σ_{11}, σ_{22} — normálfeszültségek [kp/cm²]
 σ_{12}, σ_{21} — nyírófeszültségek [kp/cm²]

A további jelölések értelme a szöveg között található.

1. Bevezetés

A héjak feszültségi állapotának meghatározására szolgáló vizsgálati alapok lerakása LOVE [1] nevéhez fűződik. A hengeres héjakra vonatkozólag ugyancsak alapvetőknek tekinthetők; TIMOSHENKÓ [2], FLÜGGE [3], WLIASSOW [4], DONNEL [5], NOVOZHILOV [6], és GOL'DENVEIZER [7] munkái is, amelyek közül tárgyalásmódját tekintve külön figyelmet érdemel [4] és [7]. Ezekben találhatóak ugyanis az izotrop hengeres héjak feszültségi állapotának közelítő megoldásait tartalmazó feszültségfüggvények, amelyekhez hasonló — ortotrop héjakra vonatkozó — kifejezéseket e sorok írója eltolódásfüggvényeknek nevez.

A hengeres héjak feszültségi állapotának meghatározása a középfelület eltolódásait tartalmazó eltolódásfüggvény bevezetésével különösen előnyösnek ígérkezik a nyomástartó edények vizsgálatakor. Ezek hengeres köpenyéhez ugyanis különböző alakú és merevségű szerelvények (a végeket határoló zárófelületek, az erőbevezetésre szolgáló támaszszerkezetek stb.) csatlakoznak. A csatlakozás helyén és környékén uralkodó feszültségi állapot meghatározása az illesztési feltételek biztosítása útján történik. Az alakváltozások azonosságát leíró illesztési feltételek pedig közvetlenül kifejezhetők az eltolódásfüggvényekkel. Az eltolódásfüggvények birtokában természetesen a belső erők is egyszerűen számíthatók.

Kezelhetőség és áttekinthetőség szempontjából további előnyökkel jár az eltolódásfüggvények bevezetése olyan héjak vizsgálatakor, amelyek homogén anizotrop szerkezeteknek tekinthetők. Ilyen szerkezetek például az üvegszállal erősített (üvegszál-vázás) műanyag héjak, amelyek — a műanyagba ágyazott végtelen sok elemi szál egyenletesnek tekinthető eloszlása következtében — homogén anizotrop anyagként kezelhetők. Rugalmas tulajdonságaik — a biztonsági okokból megengedhető alakváltozási tartományban — jó közelítéssel Hooke törvényét követik.

Az ilyen szerkezeti anyagból készült hengeres héjakra is jellemző, hogy falvastagságuk a többi mérethez és a görbületi sugárhoz képest kicsi. Így vizsgálatuk során a vékony héjakra szokásos következő feltevések és elhanyagolások tehetők:

1. A héj középfelületére merőleges egyenesek alakváltozás után is egyenesek maradnak és merőlegesek lesznek az alakváltozott héj középfelületére.

2. A középfelületre merőleges irányban ébredő feszültségek elhanyagolhatók a középfelület síkjában és azzal párhuzamos rétegekben ébredő feszültségek mellett.

3. A középfelületre merőleges irányú fajlagos alakváltozások figyelmen kívül hagyhatók.

Az előzőek értelmében, a héj valamely $P(x_1, x_2, x_3)$ pontjában ébredő feszültségek és alakváltozások a következő szimmetikus tenzorokkal jellemezhetők:

$$\begin{aligned}\Sigma &= (\sigma_{ik}), \\ \mathcal{D} &= (\varepsilon_{ik}).\end{aligned}\quad (i, k, = 1, 2) \quad (a)$$

A feltételezéseket kielégítő vékonyfalú szerkezeteknek [2] és [3] szerint az $s/R \leq 1/10$, [6] szerint az $s/R \leq 1/20$ méretviszonyú hengeres héjak tekinthetők. A feltételezések következtében a hengeres héj ortogonálisan anizotrop homogén szerkezetként vizsgálható. Az ortotropia főirányainak a héj alkotó- és kerületiránya tekinthető. A főirányokra vonatkozó rugalmassági jellemzők mérhetők vagy számíthatók.

Ortogonalisan anizotrop homogénnek tekinthető hengeres héjak eltolódásfüggvényei, legegyszerűbben az egyensúlyi feltételeket leíró differenciálegyenletrendszer operátor módszerrel történő megoldása útján származtathatók. A dolgozat tartalmazza az egyenletrendszer pontos és közelítő megoldásait jelentő eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti tényleges függvénykapcsolatokat különböző terhelések eseteiben. Közli az eltolódásfüggvények meghatározására szolgáló — az egyenletrendszereket megoldó — differenciálegyenleteket. Ezek megoldását azonban nem tárgyalja. Ez utóbbival a szerző egy előző dolgozatában [10] foglalkozik, amelyben a homogén egyenletrendsze közelítő megoldásait tartalmazó eltolódásfüggvény bevezetése és meghatározása található.

2. A belső erők és alakváltozások közötti összefüggések

Az ortotrop héj merevségi főirányaiiban ébredő feszültségek és a fellépő fajlagos alakváltozások közötti összefüggések — Hooke törvénye alapján — a következő alakban írhatók:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11} + \nu_{12}\varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{22} + \nu_{21}\varepsilon_{11}), \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = G\varepsilon_{12} = G\varepsilon_{21}.\end{aligned}\quad (1a-c)$$

A fajlagos alakváltozásokat a középfelület eltolódásaival kifejezve adódik:

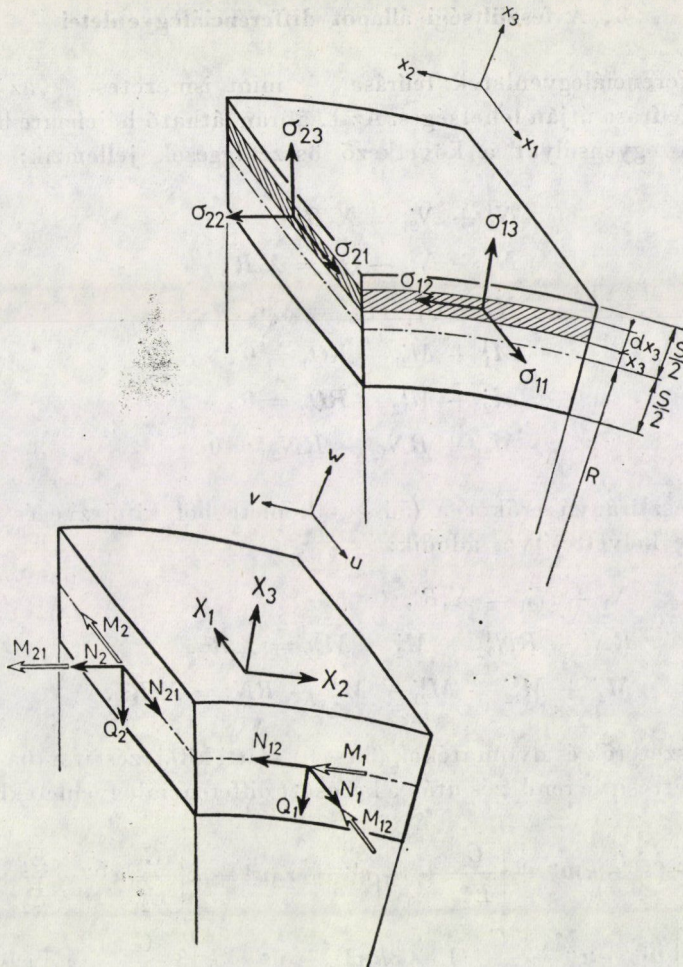
$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{u^I}{R} - x_3 \frac{w^{II}}{R^2}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{v^{\cdot}}{R} - \frac{x_3}{R} \frac{w^{\cdot\cdot}}{R + x_3} + \frac{w}{R + x_3}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{u^{\cdot}}{R + x_3} + \frac{R + x_3}{R^2} v^I - \frac{w^{I\cdot}}{R} \left(\frac{x_3}{R} + \frac{x_3}{R + x_3} \right).\end{aligned}\quad (2a-c)$$

A deriválást jelző jelölések értelme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\cdot)}{\partial \frac{x_1}{R}} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{x}_1} = (\cdot)^I \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \frac{x_2}{R}} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{x}_2} = (\cdot)^{\cdot}\end{aligned}$$

Az (1a-c) és (2a-c) összefüggések felhasználásával előállíthatók a metszeterők és nyomatékok az eltolódások függvényében. Az 1. ábra jelöléseit használva:

$$\begin{aligned}N_1 &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{11} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) dx_3 = \frac{D_1}{R} (u^I + \nu_{12} v^{\cdot} + \nu_{12} w) - \frac{B_1}{R^3} w^{II}, \\ N_2 &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{22} dx_3 = \frac{D_2}{R} (\nu_{21} u^I + v^{\cdot} + w) + \frac{B_2}{R^3} (w^{\cdot\cdot} + w), \\ N_{12} &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{12} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) dx_3 = \frac{D_3}{R} (u^{\cdot} + v^I) + \frac{B_3}{R^3} (v^I - w^{I\cdot}), \\ N_{21} &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{21} dx_3 = \frac{D_3}{R} (u^{\cdot} + v^I) + \frac{B_3}{R^3} (u^{\cdot} + w^{I\cdot}), \\ M_1 &= - \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{11} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) x_3 dx_3 = \frac{B_1}{R^2} (w^{II} + \nu_{12} w^{\cdot\cdot} - u^I - \nu_{12} v^{\cdot}), \\ M_2 &= - \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{22} x_3 dx_3 = \frac{B_2}{R^2} (w^{\cdot\cdot} + \nu_{21} w^{II} + w), \\ M_{12} &= - \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{12} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) x_3 dx_3 = 2 \frac{B_3}{R^2} (w^{I\cdot} - v^I), \\ M_{21} &= - \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{21} x_3 dx_3 = 2 \frac{B_3}{R^2} \left(w^{I\cdot} + \frac{u^{\cdot}}{2} - \frac{v^I}{2} \right),\end{aligned}\quad (3a-h)$$



1. ábra.— A feszültségek, a metszeterők és a nyomatékok, valamint a külső terhek értelmezése

ahol:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{E_1 s}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & B_1 &= \frac{E_1 s^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \\
 D_2 &= \frac{E_2 s}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & B_2 &= \frac{E_2 s^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \\
 D_3 &= G s, & B_3 &= \frac{G s^3}{12}
 \end{aligned}
 \tag{4a-f}$$

a merevségi főirányokra vonatkozó nyúlási és hajlítási merevségek.

3. A feszültségi állapot differenciálegyenletei

A differenciálegyenletek felírása — mint ismeretes — az egyensúlyi egyenletek felírása útján lehetséges. Az 1. ábrán látható héjelemre ható erők és nyomatékok egyensúlyát a következő összefüggések jellemzik:

$$\begin{aligned}
 N_1^I + N_{21}^I &= X_1 R, \\
 N_2^I + N_{12}^I - Q_2 &= X_2 R, \\
 N_2 + Q_1^I + Q_2^I &= X_3 R, \\
 M_1^I + M_{21}^I - RQ_1 &= 0, \\
 M_2^I + M_{12}^I - RQ_2 &= 0, \\
 M_{21} + RN_{12} - RN_{21} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5a-f}$$

A keresztirányú erőket a (5d–e) képletekből kifejezve és az (5b–c) egyenletekbe helyettesítve, adódik:

$$\begin{aligned}
 N_1^I + N_{21}^I &= X_1 R, \\
 RN_2^I + RN_{12}^I - M_2^I - M_{12}^I &= X_2 R^2, \\
 M_2^I + M_{12}^I + M_{21}^I + M_{11}^I + RN_2 &= X_3 R^2.
 \end{aligned}
 \tag{6a-c}$$

A metszeterők és nyomatékok (3a–h) alatti kifejezéseit a (6a–c) egyenletekbe helyettesítve rendezés után a keresett differenciálegyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
 \frac{E_1}{E_2} u^{II} + \frac{G}{E_2^*} (1+k) u^{II} + \left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) v^{I'} + \nu_{21} w^I + k \left(\frac{G}{E_2^*} w^{I''} - \frac{E_1}{E_2} w^{III} \right) &= X_1^*, \\
 \left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) u^{I'} + v^{II} + \frac{G}{E_2^*} (1+3k) v^{II} + w^I - k \left(3 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) w^{II'} &= X_2^*, \\
 \nu_{21} u^I + v^I + w + k \left[\frac{G}{E_2^*} u^{I''} - \frac{E_1}{E_2} u^{III} - \left(3 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) v^{II'} + \frac{E_1}{E_2} w^{IV} + \right. \\
 \left. + 2 \left(2 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) w^{II''} + w^{II} + 2w^{II} + w \right] &= X_3^*,
 \end{aligned}
 \tag{7a-c}$$

ahol

$$E_i^* = \frac{E_i}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad k = \frac{B_i}{R^2 D_i} = \frac{1}{12} \frac{s^2}{R^2}, \quad X_i^* = \frac{R^2}{D_i} X_i,$$

A feszültségi állapotot jellemző (7a–c) differenciálegyenletrendszer megoldása a következő fejezet szerint történik.

4. A differenciálegyenletek megoldása az eltolódásfüggvény bevezetésével

Az ortotrop hengeres héj feszültségi állapotát leíró (7a–c) egyenletek inhomogén lineáris egyenletrendszerként kezelhetők, amelynek megoldásai — mint ismeretes — a homogén rész általános megoldásaiból és az inhomogén rendszer partikuláris megoldásaiból tevődnek össze. A megoldást jelentő eltolódások tehát;

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_p, \\ v &= v_0 + v_p, \\ w &= w_0 + v_p \end{aligned} \quad (8a-c)$$

alakban írhatók.

A megoldásokhoz viszonylag egyszerűen az

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (9)$$

eltolódásfüggvény bevezetésével juthatunk oly módon, hogy az eltolódásokat

$$\begin{aligned} u &= U(\mathcal{F}), \\ v &= V(\mathcal{F}), \\ w &= W(\mathcal{F}) \end{aligned} \quad (10a-c)$$

alakban keressük.

Célravezető és ésszerű az eltolódásfüggvényt ugyancsak két részre bontani, illetve az

$$\mathcal{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \mathcal{F}_0(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \mathcal{F}_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (11)$$

összegként előállítani úgy, hogy a homogén rész megoldásait az \mathcal{F}_0 , az inhomogén rendszer partikuláris megoldásait pedig az \mathcal{F}_p függvény tartalmazza. Az áttekinthetőség és kezelhetőség érdekében az \mathcal{F}_p eltolódásfüggvényt ugyancsak célszerű

$$\mathcal{F}_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \mathcal{F}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \mathcal{F}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \mathcal{F}_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (12)$$

összegként értelmezni ahol:

\mathcal{F}_1 első eltolódásfüggvény az X_1 terhelésből adódó u_1, v_1 és w_1 , az

\mathcal{F}_2 második eltolódásfüggvény az X_2 terhelésből adódó u_2, v_2 és w_2 , az

\mathcal{F}_3 harmadik eltolódásfüggvény az X_3 terhelésből adódó u_3, v_3 és w_3

eltolódásokat tartalmazza.

Végeredményben tehát az eltolódások

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = U_0(\mathcal{F}_0) + U_1(\mathcal{F}_1) + U_2(\mathcal{F}_2) + U_3(\mathcal{F}_3), \\ v &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = V_0(\mathcal{F}_0) + V_1(\mathcal{F}_1) + V_2(\mathcal{F}_2) + V_3(\mathcal{F}_3), \\ w &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = W_0(\mathcal{F}_0) + W_1(\mathcal{F}_1) + W_2(\mathcal{F}_2) + W_3(\mathcal{F}_3) \end{aligned} \quad (13a-c)$$

alakban írhatók.

Az eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti tényleges kapcsolat meghatározását a következő fejezet tárgyalja.

5. A középfelület eltolódásai és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolat

A középfelület eltolódásai és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolat meghatározása az operátor módszer alkalmazásával történhetik. A (7a–c) alatti összefüggéseket algebrai egyenletrendszerként kezelve, a keresett u , v és w eltolódások együtthatóiból képzett determináns

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

alakban írható. Az d_{ij} együtthatók értelmét az I. táblázatban foglalt differenciáloperátorok adják.

A (7a–c) egyenletrendszer megoldásait a következő alakban keressük:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_p = \mathfrak{D}_{11}(\gamma_1^0 + \gamma_1^p) + \mathfrak{D}_{12}(\gamma_2^0 + \gamma_2^p) + \mathfrak{D}_{13}(\gamma_3^0 + \gamma_3^p), \\ v &= v_0 + v_p = \mathfrak{D}_{21}(\gamma_1^0 + \gamma_1^p) + \mathfrak{D}_{22}(\gamma_2^0 + \gamma_2^p) + \mathfrak{D}_{23}(\gamma_3^0 + \gamma_3^p), \\ w &= w_0 + w_p = \mathfrak{D}_{31}(\gamma_1^0 + \gamma_1^p) + \mathfrak{D}_{32}(\gamma_2^0 + \gamma_2^p) + \mathfrak{D}_{33}(\gamma_3^0 + \gamma_3^p). \end{aligned} \quad (15a-c)$$

I. Táblázat

Az eltolódások együtthatóit jelentő operátorok

d_{11}	$\frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{G(1+k)}{E_2^*} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{12} = d_{21}$	$\left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{11} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2}$
$d_{13} = d_{31}$	$\nu_{11} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + k \left(\frac{G}{E_2^*} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2^2} - \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2} \right)$
d_{22}	$\frac{G(1+3k)}{E_2^*} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{23} = d_{32}$	$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} - k \left(3 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{11} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2}$
d_{33}	$1 + k \left[1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^4} + 2 \left(2 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{11} \right) \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_2^2} \right]$

A megoldásokat a (7a–c) differenciálegyenletrendszerbe helyettesítve, — a lineáris algebrai egyenletek elmélete alapján — a következő homogén és inhomogén egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\gamma_1^0 &= 0, \\ \mathfrak{D}\gamma_2^0 &= 0, \\ \mathfrak{D}\gamma_3^0 &= 0,\end{aligned}\tag{16a–c}$$

valamint:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\gamma_1^p &= X_1^*, \\ \mathfrak{D}\gamma_2^p &= X_2^*, \\ \mathfrak{D}\gamma_3^p &= X_3^*.\end{aligned}\tag{17a–c}$$

A homogén egyenletrendszer általános megoldását tartalmazó megoldó egyenlet levezetéséhez a gyököket

$$\gamma_1^0 = \gamma_2^0 = 0 \text{ és } \gamma_3^0 = \frac{E_2^*}{G} \mathfrak{F}_0\tag{18a–c}$$

alakban célszerű választani. Így a megoldásokat az

$$\mathfrak{D}^* \mathfrak{F}_0 = 0\tag{19}$$

egyenértékű differenciálegyenlet tartalmazza, ahol

$$\mathfrak{D}^* = \frac{E_2^*}{G} \mathfrak{D}.\tag{20}$$

Az inhomogén rendszer partikuláris megoldásai

$$\begin{aligned}\gamma_1^p &= \frac{E_2^*}{G} \mathfrak{F}_1, \\ \gamma_2^p &= \frac{E_2^*}{G} \mathfrak{F}_2, \\ \gamma_3^p &= \frac{E_2^*}{G} \mathfrak{F}_3\end{aligned}\tag{21a–c}$$

alakban állíthatók elő. A megoldásokat tartalmazó eltolódásfüggvények az

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^* \mathfrak{F}_1 &= X_1^*, \\ \mathfrak{D}^* \mathfrak{F}_2 &= X_2^*, \\ \mathfrak{D}^* \mathfrak{F}_3 &= X_3^*\end{aligned}\tag{22a–c}$$

differenciálegyenletek partikuláris megoldásaként adódnak. Az előzőek értelmében az eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolatot az

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{D}_{11}^* \mathcal{F}_1 + \mathcal{D}_{12}^* \mathcal{F}_2 + \mathcal{D}_{13}^* (\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_0), \\ v &= \mathcal{D}_{21}^* \mathcal{F}_1 + \mathcal{D}_{22}^* \mathcal{F}_2 + \mathcal{D}_{23}^* (\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_0), \\ w &= \mathcal{D}_{31}^* \mathcal{F}_1 + \mathcal{D}_{32}^* \mathcal{F}_2 + \mathcal{D}_{33}^* (\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_0) \end{aligned} \quad (23a-c)$$

egyenletek írják le.

A közöltek szerint az eltolódásfüggvények potenciálfüggvényeknek tekinthetők, amelyekre vonatkozó részletesebb vizsgálatok a következő fejezetben találhatóak.

6. A homogén rendszer megoldásait tartalmazó eltolódásfüggvény

Az előző fejezetben levezetett (23a–c) összefüggések alapján – figyelembevétel az operátorok I. táblázatban foglalt kifejezéseit, továbbá a (20) alatti értelmezést – a homogén rendszert megoldó eltolódások és az eltolódásfüggvény közötti tényleges függvénykapcsolat a következők szerint alakul:

$$\begin{aligned} u_0 &= U_{01} \mathcal{F}_0^{III} + U_{02} \mathcal{F}_0^{I'} + k(U_{03} \mathcal{F}_0^{III} + U_{04} \mathcal{F}_0^V + U_{05} \mathcal{F}_0^{III'} + U_{06} \mathcal{F}_0^{I''}) + \\ &\quad + k^2(U_{07} \mathcal{F}_0^V + U_{08} \mathcal{F}_0^{III'}), \\ v_0 &= V_{01} \mathcal{F}_0^{II'} + V_{02} \mathcal{F}_0^{I''} + k(V_{03} \mathcal{F}_0^{I''} + V_{04} \mathcal{F}_0^{IV'} + V_{05} \mathcal{F}_0^{II''}) + \\ &\quad + k^2 V_{06} \mathcal{F}_0^{I'''}, \\ w_0 &= W_{01} \mathcal{F}_0^{IV} + W_{02} \mathcal{F}_0^{II'} + W_{03} \mathcal{F}_0^{I''} + k(W_{04} \mathcal{F}_0^{IV} + W_{05} \mathcal{F}_0^{II'} + W_{06} \mathcal{F}_0^{I''}) + \\ &\quad + k^2 W_{07} \mathcal{F}_0^{I''}. \end{aligned} \quad (24a-c)$$

Az együtthatók kifejezése a II. táblázatban található.

Az eltolódásfüggvény meghatározására szolgáló (19) differenciálegyenlet pedig az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_0^{VIII} + a_{01} \mathcal{F}_0^{VI} + a_{02} \mathcal{F}_0^{IV''} + a_{03} \mathcal{F}_0^{II'''} + a_{04} \mathcal{F}_0^{I''''} + a_{05} \mathcal{F}_{50}^{VI} + \\ &+ a_{06} \mathcal{F}_0^{IV'} + a_{07} \mathcal{F}_0^{II''} + a_{08} \mathcal{F}_0^{I'''} + a_{09} \mathcal{F}_0^{IV} + a_{010} \mathcal{F}_0^{II'} + a_{011} \mathcal{F}_0^{I''} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Az együtthatók a III. táblázatban közölt összefüggések szerint alakulnak.

Az \mathcal{F}_0 eltolódásfüggvény – adott peremfeltételek esetén – a (25) egyenlet általános megoldásából számítható.

A vizsgálatok tárgyát képező vékony héjak eseteiben $R/s > 10$; tehát $k < 0,001$ így k az egység mellett indokoltan elhagyható. Az elhanyagolás következtében a gyakorlat számára elfogadható pontossággal, a IV. táblázatban közölt együtthatókkal számolhatunk.

II. Táblázat

A homogén megoldások együtthatói

j	U_{0j}	V_{0j}	W_{0j}
1	$-v_{21}$	$v_{21} - \frac{E_1}{G}$	$\frac{E_1}{E_2}$
2	1	-1	$\frac{E_1}{G} - 2v_{21}$
3	$-3v_{21}$	-1	1
4	$\frac{E_1}{E_2}$	$2 \frac{E_1}{E_2}$	$3 \frac{E_1}{E_2}$
5	$\frac{E_1}{G} - 4 \left(\frac{G}{E_2^*} + v_{21} \right)$	$2 \left(2 \frac{G}{E_2^*} + v_{21} \right)$	$4 \frac{G}{E_2^*}$
6	-1	$3 \frac{G}{E_2^*} + v_{21}$	1
7	$3 \frac{E_1}{E_2}$		$3 \frac{G}{E_2^*}$
8	$-3 \frac{G}{E_2^*}$		

További jelentős egyszerűsödést jelent, ha az előző megfontolások alapján

$$(1 + k)u'' \approx u'' \tag{26a-b}$$

$$(1 + 3k)v^{II} \approx v^{II}$$

közelítéssel élünk. Ebben az esetben ugyanis a

$$U_{03} = U_{07} = U_{08} = 0,$$

$$V_{03} = V_{06} = 0,$$

$$W_{04} = W_{05} = W_{06} = W_{07} = 0$$

együtthatók adódnak. Így a (24a-c) egyenletek a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned} u_0 &= U_{01} \mathcal{F}_0^{III} + U_{02} \mathcal{F}_0^{I'} + k(U_{04} \mathcal{F}_0^V + U_{05} \mathcal{F}_0^{III} + U_{06} \mathcal{F}_0^{I''}), \\ v_0 &= V_{01} \mathcal{F}_0^{II'} + V_{02} \mathcal{F}_0^I + k(V_{04} \mathcal{F}_0^{IV} + V_{05} \mathcal{F}_0^{II''}), \\ w_0 &= W_{01} \mathcal{F}_0^{IV} + W_{02} \mathcal{F}_0^{II'} + W_{03} \mathcal{F}_0^{I''}. \end{aligned} \tag{27a-c}$$

III. Táblázat

Az együtthatók pontos meghatározására szolgáló kifejezések

a_0	$k \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2 (1 + 2k - 3k^2)$
a_{01}	$\frac{k}{a_0} \frac{E_1}{E_2} \left[\frac{E_1}{G} + 4 \frac{G}{E_2^*} - k \left(\frac{E_1}{G} - 15 \frac{G}{E_2^*} - 8\nu_{21} \right) + 9k^2 \frac{G}{E_2^*} \right]$
a_{02}	$\frac{k}{a_0} \left[6 \frac{E_1}{E_2} + 2\nu_{21} \frac{E_1}{G} - 8\nu_{21} \frac{G}{E_2^*} - 8\nu_{21}^2 + k \left(6 \frac{E_1}{E_2} - 6\nu_{21} \frac{G}{E_2^*} - 3\nu_{21}^2 \right) - k^2 \nu_{21}^2 \right]$
a_{03}	$\frac{k}{a_0} \left[\frac{E_1}{G} + 4 \frac{G}{E_2^*} + k \left(7 \frac{G}{E_2^*} + 2\nu_{21} \right) + 3k^2 \frac{G}{E_2^*} \right]$
a_{04}	$\frac{k}{a_0} (1 + k)$
a_{05}	$2 \frac{k}{a_0} \frac{E_1}{E_2} \nu_{21} (1 + 3k)$
a_{06}	$\frac{k}{a_0} \left[6 \frac{E_1}{E_2} + 2\nu_{21} \frac{E_1}{G} - 8\nu_{21} \frac{G}{E_2^*} - 8\nu_{21}^2 + 6k \left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_{21} \frac{G}{E_2^*} \right) \right]$
a_{07}	$\frac{k}{a_0} \left[8 \frac{G}{E_2^*} + 2 \frac{E_1}{G} - 2\nu_{21} + k \left(14 \frac{G}{E_2^*} + 2\nu_{21} \right) + 6k^2 \frac{G}{E_2^*} \right]$
a_{08}	$2 \frac{k}{a_0} (1 + k)$
a_{09}	$\frac{k}{a_0} \left(4 \frac{E_1}{E_2} - 3\nu_{21}^2 + 3k \frac{E_1}{E_2} \right) + \frac{1}{a_0} \left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_{21}^2 \right)$
a_{010}	$\frac{k}{a_0} \left(\frac{E_1}{G} + 4 \frac{G}{E_2^*} - 2\nu_{21} + 7k \frac{G}{E_2^*} + 3k^2 \frac{G}{E_2^*} \right)$
a_{011}	$\frac{k}{a_0} (1 + k)$

Az eltolódásfüggvény meghatározására szolgáló (19) differenciálegyenlet pedig az alábbiak szerint írható:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}_0^{\text{VIII}} + a_{01} \mathfrak{F}_0^{\text{VI}} + a_{02} \mathfrak{F}_0^{\text{IV}} + a_{03} \mathfrak{F}_0^{\text{II}} + a_{04} \mathfrak{F}_0^{\text{I}} + a_{05} \mathfrak{F}_0^{\text{VI}} \\ & + a_{06} \mathfrak{F}_0^{\text{IV}} + a_{07} \mathfrak{F}_0^{\text{II}} + a_{08} \mathfrak{F}_0^{\text{I}} + a_{09}^* \mathfrak{F}_0^{\text{IV}} + a_{010}^* \mathfrak{F}_0^{\text{II}} + a_{011} \mathfrak{F}_0^{\text{I}} = 0. \quad (28) \end{aligned}$$

IV. Táblázat
Az együtthatók közelítő meghatározására szolgáló kifejezések

a_0	$k \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2$
a_{01}	$4 \left(\frac{G}{E_1^*} + \frac{1}{4} \frac{E_2}{G} \right)$
a_{02}	$6 \frac{E_2}{E_1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E_2}{G} \nu_{21} - \frac{4}{3} \frac{G}{E_2^*} \nu_{12} - \frac{4}{3} \nu_{12} \nu_{21} \right)$
a_{03}	$4 \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{G}{E_1^*} + \frac{1}{4} \frac{E_2}{G} \right)$
a_{04}	$\left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2$
a_{05}	$2\nu_{12}$
a_{06}	$6 \frac{E_2}{E_1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E_2}{G} \nu_{21} - \frac{4}{3} \frac{G}{E_2^*} \nu_{12} - \frac{4}{3} \nu_{12} \nu_{21} \right)$
a_{07}	$2 \frac{E_2}{E_1} \left(4 \frac{G}{E_1^*} + \frac{E_2}{G} - \nu_{12} \right)$
a_{08}	$2 \left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2$
a_{09}	$\frac{1}{k} \frac{E_2}{E_1^*} + \frac{E_2}{E_1} (4 - 3\nu_{12}\nu_{21})$
a_{010}	$\frac{E_2}{E_1} \left(4 \frac{G}{E_1^*} + \frac{E_2}{G} - 2\nu_{12} \right)$
a_{011}	$\left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2$

Az együtthatók a IV. táblázat szerint és az

$$a_{09}^* = \frac{1}{k} \frac{E_2}{E_1^*} + \frac{E_2}{E_1},$$

$$a_{010}^* = \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_{12} \right)$$

összefüggésekből számíthatók.

7. Az inhomogén egyenletek partikuláris megoldásait tartalmazó eltolódásfüggvény

Az inhomogén differenciálegyenletrendszer partikuláris megoldásai — mint ismeretes — a héjfelületre ható megoszló erőrendszer hatását képviselik. Meghatározásuk során egyszerűsítő feltevések tehetők [5] a következő elhanyagolások útján:

A metszeterők (N_1, N_2, N_{12}, N_{21}) kifejezésében szereplő B_i -vel szorzott tagok elhagyhatók a D_i -vel szorzott tagok mellett.

A nyomatékok (M_1, M_2, M_{12}, M_{21}) kifejezésében, a w eltolódás második deriváltjai (w^{II}, w'', w') mellett az u és v eltolódások első deriváltjai (v^I, v', u^I, u) elhanyagolhatók.

Az erők kerületirányú egyensúlyát leíró egyenletben a viszonylag kis Q_2 keresztirányú erő még kisebb kerületirányú komponense elhagyható.

Az elhanyagolásból származó hiba nagysága a k tényező függvénye. A szokásos héjaknál ($k < 0,001$) a hiba figyelmen kívül hagyható [8], [9].

Az elhanyagolások következtében a (7a–c) differenciálegyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} u^{II} + \frac{G}{E_2^*} u'' + \left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) v^{I'} + \nu_{21} w^I &= X_1^*, \\ \left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) u^{I'} + v'' + \frac{G}{E_2^*} v^{II} + w' &= X_2^*, \\ \nu_{21} u^I + v' + w + k \left[\frac{E_1}{E_2} w^{IV} + 2 \left(2 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) w^{III} + w'' \right] &= X_3^*. \end{aligned} \quad (29a-c)$$

A (29a–c) inhomogén rendszer partikuláris megoldásait tartalmazó kifejezések bevezetése az 5. fejezetben közölt módszer szerint történhetik az eltolódások együtthatóiból képzett

$$\mathfrak{D}^p = \begin{bmatrix} d_{11}^p & d_{12}^p & d_{13}^p \\ d_{21}^p & d_{22}^p & d_{23}^p \\ d_{31}^p & d_{32}^p & d_{33}^p \end{bmatrix} \quad (30)$$

determináns figyelembevételével. Az d_{ij}^p együtthatók értelmét most az V. táblázatban foglalt differenciáloperátorok adják.

A (20), (22a–c) és (23a–c) összefüggések alapján, az eltolódásfüggvények meghatározására, valamint az eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolat kifejezésére az alábbi összefüggések szolgálnak:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^p \mathfrak{F}_1 &= X_1^*, \\ \mathfrak{D}^p \mathfrak{F}_2 &= X_2^*, \\ \mathfrak{D}^p \mathfrak{F}_3 &= X_3^*, \end{aligned} \quad (31a-c)$$

V. Táblázat

Az eltolódások együtthatóit jelentő közelítő operátorok

d_{11}^p	$\frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{G}{E_2^*} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{12}^p = d_{21}^p$	$\left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2}$
$d_{13}^p = d_{31}^p$	$\nu_{21} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}$
d_{22}^p	$\frac{G}{E_2^*} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{23}^p = d_{32}^p$	$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2}$
d_{33}^p	$1 + k \left[\frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^4} + 2 \left(2 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_2^4} \right]$

valamint

$$\begin{aligned}
 u_p &= u_1 + u_2 + u_3 = \mathfrak{D}_{11}^{p*} \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{12}^{p*} \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{13}^{p*} \mathfrak{F}_3, \\
 v_p &= v_1 + v_2 + v_3 = \mathfrak{D}_{21}^{p*} \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{22}^{p*} \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{23}^{p*} \mathfrak{F}_3, \\
 w_p &= w_1 + w_2 + w_3 = \mathfrak{D}_{31}^{p*} \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{32}^{p*} \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{33}^{p*} \mathfrak{F}_3.
 \end{aligned}
 \tag{32a-c}$$

A (32a-c) összefüggések alapján – figyelembe véve az operátorok V. táblázatban foglalt kifejezéseit – az egyes eltolódások a következők szerint írhatók:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= U_{11} \mathfrak{F}_1^{II} + k(U_{12} \mathfrak{F}_1^{VI} + U_{13} \mathfrak{F}_1^{IV} + U_{14} \mathfrak{F}_1^{III} + U_{15} \mathfrak{F}_1^{III}), \\
 v_1 &= V_{11} \mathfrak{F}_1^{I'} + k(V_{12} \mathfrak{F}_1^{V'} + V_{13} \mathfrak{F}_1^{III} + V_{14} \mathfrak{F}_1^{III}), \\
 w_1 &= W_{11} \mathfrak{F}_1^{III} + W_{12} \mathfrak{F}_1^{I'},
 \end{aligned}
 \tag{33a-c}$$

továbbá

$$\begin{aligned}
 u_2 &= U_{21} \mathfrak{F}_2^{I'} + k(U_{22} \mathfrak{F}_2^{V'} + U_{23} \mathfrak{F}_2^{III} + U_{24} \mathfrak{F}_2^{III}), \\
 v_2 &= V_{21} \mathfrak{F}_2^{II} + V_{22} \mathfrak{F}_2^{II} + k(V_{23} \mathfrak{F}_2^{VI} + V_{24} \mathfrak{F}_2^{IV} + V_{25} \mathfrak{F}_2^{III} + V_{26} \mathfrak{F}_2^{III}), \\
 w_2 &= W_{21} \mathfrak{F}_2^{II} + W_{22} \mathfrak{F}_2^{II},
 \end{aligned}
 \tag{34a-c}$$

valamint,

$$\begin{aligned}
 u_3 &= U_{31} \mathfrak{F}_3^{III} + U_{32} \mathfrak{F}_3^{I'}, \\
 v_3 &= V_{31} \mathfrak{F}_3^{II} + V_{32} \mathfrak{F}_3^{II}, \\
 w_3 &= W_{31} \mathfrak{F}_3^{IV} + W_{32} \mathfrak{F}_3^{II} + W_{33} \mathfrak{F}_3^{II}.
 \end{aligned}
 \tag{35a-c}$$

VI. Táblázat
Az inhomogén megoldások együtthatói

<i>j</i>	U_{1j}	$V_{1j} = U_{2j}$	$W_{1j} = U_{3j} = U_{0j}$	V_{2j}	$W_{2j} = V_{3j} = V_{0j}$	$W_{3j} = W_{0j}$
1	1	-1	$-\nu_{21}$	$\frac{E_1}{G}$	$\nu_{21} - \frac{E_1}{G}$	$\frac{E_1}{E_2}$
2	$\frac{E_1}{E_2}$	$-\left(\frac{E_1}{E_2} + \nu_{21} \frac{E_1^*}{G}\right)$	1	1	-1	$\frac{E_1}{G} - 2\nu_{21}$
3	$\frac{E_1^*}{G} + 4 \frac{G}{E_2^*} + 2\nu_{21}$	$-\left(4 \frac{G}{E_2^*} + 2\nu_{21}^2 \frac{E_2^*}{G} + 6\nu_{21}\right)$		$\frac{E_1^*}{G} \frac{E_1}{E_2}$		1
4	$2\nu_{21} \frac{E_2^*}{G} + 5$	$-\left(1 + \nu_{21} \frac{E_2^*}{G}\right)$		$5 \frac{E_1}{E_2} + 2\nu_{21} \frac{E_1^*}{G}$		
5	$\frac{E_2^*}{G}$			$\frac{E_1^*}{G} + 4 \frac{G}{E_2^*} + 2\nu_{21}$		
6				1		

Az U_{ij} , V_{ij} és W_{ij} együtthatók a VI. táblázatban közölt összefüggésekből számíthatók.

Az eltolódásokat kifejező eltolódásfüggvényeket a (31a–c) összefüggések alapján felírható

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_i^{\text{VIII}} + a_{01} \mathfrak{F}_i^{\text{VI}} + a_{02} \mathfrak{F}_i^{\text{IV}} + a_{03} \mathfrak{F}_i^{\text{II}} + a_{04} \mathfrak{F}_i^{\text{I}} + a_{09}^{**} \mathfrak{F}_i^{\text{IV}} = \\ = a_{09}^{**} \frac{E_2^*}{E_1} X_i^* \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (36)$$

differenciálegyenletek partikuláris megoldásai szolgálják.

Az együtthatók a IV. táblázat szerint és az

$$a_{09}^{**} = \frac{1}{k} \frac{E_2}{E_1^*}$$

összefüggésből számíthatók.

Említést érdemel még az a megállapítás [8], [9], [10], hogy a peremterhelések hatására ébredő feszültségállapot sok esetben elfogadható pontossággal vizsgálható a (29a–c) egyenletrendszer homogén részének megoldása útján is. Ilyen jellegű vizsgálatok — ortotrop hengeres héjra vonatkozólag — a szerző előző dolgozatában [10] található.

8. A membránfeszültségi állapotra vonatkozó eltolódásfüggvények

A gyakorlati számítások során különös fontossággal jelentkezik a hengeres héjakban ébredő membránfeszültségek és ezek hatására fellépő alakváltozások meghatározása. Nem érdektelen tehát a membránfeszültségi állapothoz tartozó eltolódásfüggvények ismertetése.

A vizsgálatok teljes egészében a már közölt összefüggések felhasználásával történhetnek a membránfeszültségi állapotra jellemző $B_i = 0$ és $k = 0$ feltételezésével. Így a membránerők okozta eltolódások a (33a–c), továbbá a (34a–c), valamint a (35a–c) összefüggések felhasználásával a következők szerint írhatók:

$$\begin{aligned} u_{1M} &= U_{11} \mathfrak{F}_{1M}^{\text{II}}, \\ v_{1M} &= V_{11} \mathfrak{F}_{1M}^{\text{I}}, \\ w_{1M} &= W_{11} \mathfrak{F}_{1M}^{\text{III}} + W_{12} \mathfrak{F}_{1M}^{\text{I}}, \end{aligned} \quad (37a–c)$$

továbbá,

$$\begin{aligned} u_{2M} &= U_{21} \mathfrak{F}_{2M}^{\text{I}}, \\ v_{2M} &= V_{21} \mathfrak{F}_{2M}^{\text{II}} + V_{22} \mathfrak{F}_{2M}^{\text{I}}, \\ w_{2M} &= W_{21} \mathfrak{F}_{2M}^{\text{III}} + W_{22} \mathfrak{F}_{2M}^{\text{I}}, \end{aligned} \quad (38a–c)$$

valamint,

$$\begin{aligned} u_{3M} &= U_{31} \mathfrak{F}_{3M}^{III} + U_{32} \mathfrak{F}_{3M}^I, \\ v_{3M} &= V_{31} \mathfrak{F}_{3M}^{II} + V_{32} \mathfrak{F}_{3M}^{\cdot\cdot}, \\ w_{3M} &= W_{31} \mathfrak{F}_{3M}^{IV} + W_{32} \mathfrak{F}_{3M}^{II} + W_{33} \mathfrak{F}_{2M}^{\cdot\cdot}. \end{aligned} \quad (39a-c)$$

Az eltolódásfüggvény meghatározására szolgáló (36) differenciálegyenlet pedig a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathfrak{F}_{iM}^{IV} = \frac{E_2^*}{E_1} X_i^*, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (40)$$

Bevezetve a

$$J_{4i} = \frac{E_2^*}{E_1} X_i^* \quad (41)$$

terhelésfüggvény értelmezését a (40) differenciálegyenlet megoldása;

$$\mathfrak{F}_{iM} = J_{0i} + \sum_{n=1}^4 C_n(\bar{x}_2) \bar{x}_1^{n-1} \quad (42)$$

alakban írható, ahol J_{0i} az

$$J_{(k-1)i} = \int J_{ki} d\bar{x}_1 \quad (k = 1, 2, 3, 4,) \quad (43)$$

összefüggés alapján számítható.

Az eltolódásfüggvények ismeretében az eltolódások mellett természetesen a membránérők is meghatározhatók.

IRODALOM

1. LOVE, H.: The Mathematical Theory of Elasticity. Univ. Press, Oxford 1952.
2. TIMOSHENKO, S.: Theory of Plates and Shells. Mc Graw-Hill, New York 1959.
3. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. Springer-Verlag, Berlin 1960.
4. WLASSOW, S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1958.
5. DONNEL, H.: Stability of Thin-walled Tubes under Torsion. *NACA, Tech. Rep.* 1933.
6. NOVOZHILOV, V.: The Theory of thin Shells. Noordhoff 1959.
7. GOL'DENVEIZER, L.: Theory of Elastic Thin Shells. Pergamon Press, Oxford 1961.
8. HOFF, J.: The Accuracy of DONNEL's Equations. *J. Appl. Mech.* **22** (1955), 329–334.
9. KEMPNER, J.: Remarks on DONNEL's Equations. *J. Appl. Mech.* **22** (1955), 117–118.
10. VARGA, L.: Discussion of the Bending Theory of Cylindrical Shells of Orthogonally anisotropic Structural Material, by Introducing the Displacement Function. *Acta Techn. Hung.* **73** (1972), 175.

Displacement Functions of Orthogonally Anisotropic Cylindrical Shells. Displacement functions describing the stress state of orthotropic, anisotropic cylindrical shells are analysed and determined on the assumption of homogeneous anisotropy. By introducing the displacement functions, the exact and approximate solutions of the set of differential equations derived from the equilibrium conditions are presented. The relation between the displacements and displacement functions rendering general solutions to the homogeneous part and performing particular solutions to the non-homogeneous system are detailed. The differential equations furnishing the establishment of the displacement functions are reported. Last, the relations existing between the displacements caused by the membrane forces and the displacement functions, as well as the differential equation including the displacement functions and their solution are shown.

Verschiebungsfunktionen von orthogonal-anisotropischen zylindrischen Schalen. Behandelt werden die Untersuchung und Ermittlung zylindrischen Schalen kennzeichnenden Verschiebungsfunktionen unter der Voraussetzung der Anisotropie. Durch Einführung der Verschiebungsfunktionen werden sowohl die exakten als auch die Näherungslösungen des Differentialgleichungssystems dargestellt, das sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt. Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen, die die allgemeinen Lösungen des homogenen Teils und die partikularen Lösungen des inhomogenen Systems bedeuten, und den Verschiebungsfunktionen wird eingehend erörtert. Ferner werden die Differentialgleichungen zur Ermittlung der Verschiebungsfunktionen vorgelegt. Abschließend werden die Zusammenhänge zwischen den durch die Membrankräfte hervorgerufenen Verschiebungen und Verschiebungsfunktionen, sowie die, eine Verschiebungsfunktionen enthaltende Differentialgleichung und deren Lösung erörtert.