

GÖRDÜLŐCSAPÁGYAK ELASZTIKUS REZGÉSE*

I. RÉSZ: A FORGÓ TÖMEG SAJÁT TENGELYÉRE VONATKOZÓLAG KI VAN EGYENSÚLYOZVA

SZŐKE BÉLA**

a műsz. tud. kandidátusa

[Beérkezett 1969. szeptember 29.]

A dolgozat azt tárgyalja, milyen mozgást végez különböző üzemi körülmények közt a forgó tengelynek a csapágy síkjában fekvő középpontja azon a területen belül, amelyet a hézag és a terhelésből eredő deformációk engednek számára. Kimutattuk, hogy egyetlen olyan erőközpontból hat az erő, amely magában foglalja a gördülő-csapágy geometriai adatait és a legfontosabb üzemi viszonyok paramétereit. Stribeck számításait kiegészítettük a stabilis golyóelhelyezkedés esetére. Kimutattuk, hogy a külső futópálya egy bizonyos fordulatszámhatárig meghatározott helyen a fordulatszámnál szaporább kalapálást szenved. Ezen a billegő mozgáson kívül a tengelyközéppontnek ringó mozgási lehetősége is van, amelynek szöge meghatározható. Egyszerű mechanikai és geometriai szemlélet alapján meghatároztuk azokat az üzemi adatokat, melyeknél a legnagyobb dinamikus hatások várhatók.

I. Bevezetés***

A gördülő csapágyak rezgésének vizsgálatakor külön figyelmet érdemel annak kutatása, hogy ezt a jelenséget mi okozza. JÜRGENSMEYER [2] főképpen a gyártási, vagy szerelési hibák okozta rezgésekkel foglalkozik. PERRET [3, 7] és MELDAU [9] a terhelés folytán bekövetkező alakváltozásokban is rezgést keltő ok után kutatnak, SZŐKE [10], [25—28] rámutatott arra, hogy a deformációmentesnek képzelt teljesen hibátlan csapágnál is felléphetnek „kinetikus” rezgések. Miután a gördülőcsapágyak elméleti vizsgálatában STRIBECK [1] fejtegetései óta a deformáció fogalmának bevezetése különösen fontos szerepet játszik és a valóságban az alakváltozás a terhelés függvényeként mindig fellép, érdemes e rezgést keltő okkal behatóbban foglalkozni annál is inkább, mivel az e kérdéssel foglalkozó fent említett két szerző csupán az ilyen csapágyaknál

* A Magyar Tudományos Akadémia 1958. évi pályázatán „Mikroszkóp” jelíggel díjat nyert tanulmány átdolgozása.

** Dr. Szőke Béla c. egyet. docens, 1182 Budapest, Batthyány L. u. 139.

*** Az irodalomjegyzék a dolgozat II. részének végén található.

legritkábban előforduló egész kis fordulatszámok (nulla fordulat) esetét tárgyalja, és fejtegetéseik eredményeire vonatkozólag nincsenek egy véleményen [8].

A kérdés lényege ezek szerint tisztázandó és a vizsgálat az összes üzemi viszonyokra kiterjesztendő.

E mikrogeometria világában végbemenő jelenségek leírásának feladatát kívánja az alábbi fejtegetés arra az általános esetre megoldani, melynél a gördülő csapágy szerkezetének és az üzemi viszonyoknak összes jellemző paraméterei figyelembe vehetők.

II. Kiindulási feltételek

A gördülő testek méretezésére vonatkozó vizsgálatokban a golyócsapágyat hézagmentesnek képzelik és ilyenkor némi számítási könnyebbséget jelent, ha egy golyót a külső erő hatásvonalába képzelnek. A gyakorlati esetekben azonban úgyszólván mindig van kisebb-nagyobb radiális csapágyhézag és ilyenkor a tengely csak akkor van stabilis helyzetben a külső gördülő pályához képest, ha legalább két görgő, nagyobb terhelésnél pedig általában páros számú görgő érintkezik a gördülő pályával (1. ábra). Századunk elején végzett klasszikus elméleti vizsgálatokhoz híven egyelőre (a XI. fejezetig) feltételezzük, hogy a Hertz-féle benyomódások folytán a gördülőtestek szenvedik az alakváltozást a külső és belső gördülő pályák pedig kóralakúak maradnak.

Feltételezzük továbbá, hogy a gördülő testek (amiket a következőkben röviden görgőknek, vagy golyóknak nevezünk tekintet nélkül arra, hogy a csapágyhézagnak görgőcsapágyaknál nagyobb a jelentősége, mivel a golyók amúgyis jobban deformálódnak) terheletlen állapotban a belső gördülő pályával érintkeznek és a hézag a golyók külső burkoló köre és a gördülő pálya között jelentkezik.

Ilyen feltételek mellett a forgásban levő tengely O középpontja a golyó kosárral együtt a külső gördülőkör K középpontja körül olyan keringő mozgást végezhet, amelynél a pálya excentricitása terheletlen állapotban kisebb, terhelt állapotban pedig a golyók belapulása folytán nagyobb.

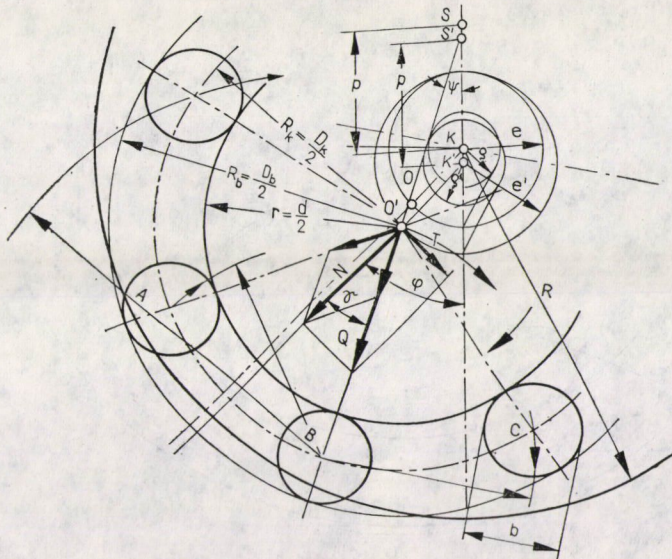
Áttekinthetőség kedvéért a 2. ábrában külön feltüntettük azt a geometriai összefüggést, ami akkor jelentkezik, amikor a golyók külső burkoló körének középpontját a külső gördülőkör K középpontjából sugárirányban abba az O helyzetbe toljuk el, ahol már két golyó érinti a külső gördülő pályát.

Az ábrából látjuk, hogy ebben a helyzetben

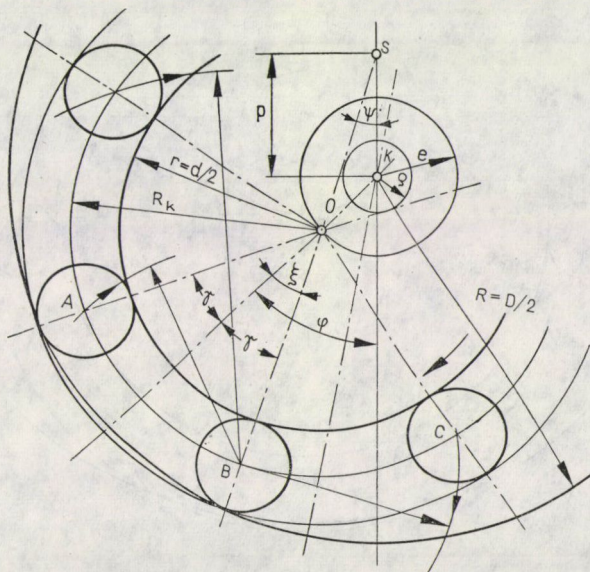
$$KO = e = \frac{h}{\cos \gamma} \quad (1)$$

excentricitás jelentkezik, ahol

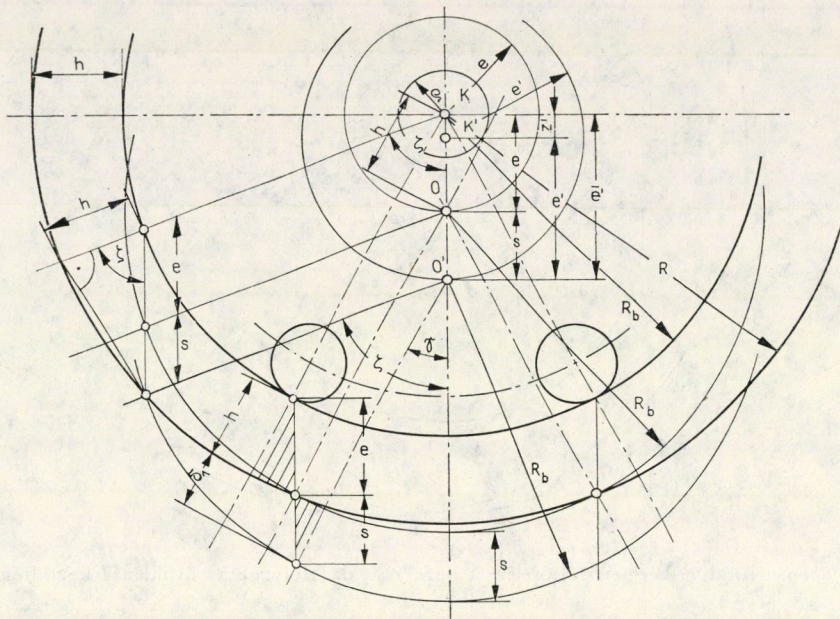
$$h = e \cos \gamma$$



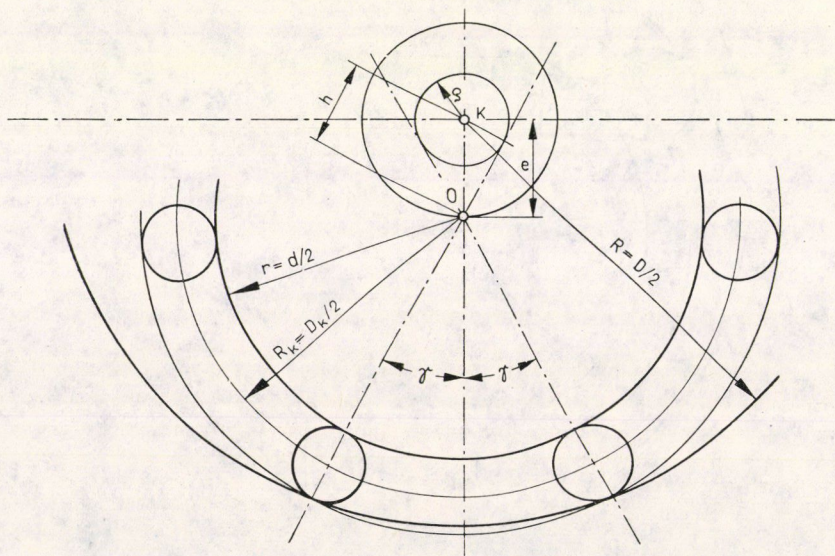
1. ábra. Kiindulásképpen feltételezett deformáció. (Helyzet az átbillenés kezdetének pillanatában)



1a. ábra. Átbillenés kezdete deformációmentes esetben



2. ábra. A deformáció folytán létrejött geometriai összefüggések



2a. ábra. Geometriai összefüggések deformációmentes esetben

a terheletlen csapágnak az a radiális hézaga, amely az érintkező golyóknál eltűnik.

Ha ezután terhelés folytán ennél az első golyópárnál fellépő δ_1 golyó-deformáció következtében a tengely O pontja s távolsággal süllyed O' -be, akkor az ábra jelöléseivel

$$KO' = \bar{e}' = e + s = \frac{h + \delta_1}{\cos \gamma}, \quad (2)$$

és (1) tekintetbe vételével

$$\delta_1 = s \cos \gamma. \quad (3)$$

Az s süllyedés mellett valamely tetszőleges $\xi = 2(n+1)\gamma$ \sphericalangle -hoz tartozó δ deformációnál

$$e + s = \frac{h + \delta}{\cos \xi}. \quad (2a)$$

Az ábra alapján közvetlenül megállapítható a golyók burkoló körének az a 2ζ szögnyílása, amely s deformációs tengelysüllyedés mellett a gördülőpályával érintkező golyókat magában foglalja.

A (2a) szerint ugyanis azt a szöget kell keresnünk, amelynél a golyó deformációja nulla, vagyis

$$e + s = \frac{h}{\cos \zeta},$$

ahonnan (1) tekintetbevételével

$$\cos \zeta = \frac{h}{e + s} = \frac{e \cos \gamma}{e + s} = \frac{\cos \gamma}{1 + \frac{s}{e}}. \quad (4)$$

A felírt összefüggések olyan közelítő értékekre vonatkoznak, amelyek azzal a feltevéssel fogadhatók el, hogy a valóságban $e' = e + s - z'$ távolság a külső gördülő pálya sugarához képest nagyon kicsiny, ami fejtegetésünk folyamán mindvégig igaz marad.

III. A fontosabb fogalmak jelölése

Az alábbiakban 1., 1a., 2., 2a. ábra szerint a következő betűjeleket vezetjük be:

- $d = 2r$ = az alaktartó és a golyó-koszorút belülről mindig burkoló belső gördülőpálya átmérője;
- b = a bolygó mozgást végző golyók átmérője;
- $D_k = 2R_k = d + b$ = a golyókoszorú (kosár) középátmérője;
- $D_b = 2R_b = D_k + b = d + 2b$ = a terheletlen golyók külső burkoló körének átmérője;
- h = sugárirányú csapágyhézag terheletlen állapotban, amely páratlan golyó számnál közvetlen nem mérhető;

- $D = 2R = d + 2b + 2h = D_k + b + 2h = D_b + 2h$ = az alaktartó és csak a terhelési íven belül levő golyókkal érintkező külső gördülőkör átmérője;
- z = a golyók száma;
- $\gamma = 180/z$ = a golyók fél osztási szöge;
- $e = h/\cos \gamma$ a külső gördülőpálya K középpontjának és a hozzátolt *terheletlen* golyókoszorú O középpontjának mindig mérhető távolsága (excentricitása);
- s = az O tengelyközéppontnak a terhelési ív szögfelezőjén mért süllyedése, amely a terhelt golyók deformációja folytán keletkezett;
- e' = excentricitás K körül terheléskor;
- e' = a deformáció folytán megnagyobbodott „excentricitás” K' pont körül, ahol $KK' = z' =$ az e' sugarú simuló-kör középpontjának eltolódása
- $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ = a terhelési ív szögfelezőjéhez szimmetrikusan elhelyezkedő első, második, harmadik \dots golyópár deformáció folytán keletkezett belapulásának Hertz szerint számított értéke;
- ζ = a terhelési ív félszöge;
- ξ = a terhelési íven belül levő hordozó golyók fél központi szöge, ahol ξ mindig γ egész számú többszöröse (fél terhelési szög);
- $\rho = h \tan \gamma = e \sin \gamma$ = annak az alapkörnek a sugara, amelyet a *terheletlen*, de a gördülő pályával érintkező két szomszédos golyó vezérsugara érint, gördülés közben pedig e vezérsugarak burkolják;
- ρ' = $e' \sin \xi$ a terhelési ívben levő két szélső hordozó golyóhoz tartozó alapkör sugara;
- n = az O középpont körül forgó tengely perccenkénti fordulatszám;
- $\omega = n\pi/30$ = ugyanennek a tengelynek szögsebessége;
- $n_k = n d/(D+d) \approx n d/2D_k$ = a golyókosár perccenkénti fordulatszám, mely azonos az O tengelyközéppont e' excentricitású keringő pályán végzett keringési számával;
- $\omega_k = \omega d/(D+d) \approx \omega d/2D_k$ = a golyókosár (és O tengelyközéppont keringésének) szögsebessége;
- G = az O tengelyközéppont körül n fordulatszámmal forgó, a tengelyközéppontra nézve kiegyensúlyozott m tömeg súlya;
- g = a nehézségi gyorsulás;
- F = a külső erőnek (pl. szíjhúzás, fognyomás) a csapágyra ható változatlanul feltételezett komponense;
- $\bar{P} = \bar{G} + \bar{F}$ az önsúly és a külső erő csapágyra eső terhelésének eredője;
- m = a tengelyközéppontba redukált, a tengelyre nézve kiegyensúlyozott tömeg;
- $\bar{a} = \bar{P}/m$ = tömeggyorsulás;
- $C = m\omega_k^2$ = a keringő mozgás folytán fellépő centripetális erővel ellentétes centrifugális erő terheletlen csapágyánál;
- $C' = m e' \omega_k^2$ = ugyanaz terhelési excentricitású csapágyánál;
- $\bar{c} = e \omega_k^2$ = centrifugális gyorsulás terheletlen csapágy esetén;
- $\bar{c}' = e' \omega_k^2$ = ugyanaz terhelési excentricitású csapágyánál;
- $\bar{Q} = \bar{P} + \bar{C}$ = eredő erő, ha a golyók deformálását nem vesszük tekintetbe;
- $\bar{Q}' = \bar{P} + \bar{C}'$ = eredő erő deformálódott golyók esetén;
- $i = \bar{Q}/m$ = eredő gyorsulás, ha a golyók alakváltozását nem vesszük tekintetbe;
- $i' = \bar{Q}'/m$ = eredő gyorsulás deformálódott golyók esetén;
- $p = KS = \bar{a}/\omega_k^2$ = az S pólus (erőközéppont) távolsága a külső gördülőpálya K középpontjától;
- ψ = a billenés és ringó mozgás fázis szöge,
- φ = az O tengelyközéppont fázisszöge K középpont körül történő keringésénél
- \bar{n} = az O tengelyközéppontba redukálva képzelt m tömeg i gyorsulásának K középponton keresztülmennő normális komponense;
- \bar{i} = ugyanennek tangenciális komponense;
- $N = m\bar{n}$ = a terhelési ív szimmetria vonalán áthaladó *normális* erő, mely a golyók deformációját idézi elő;
- $T = m\bar{i}$ = az O pontban egyesítve képzelt keringő tömegre ható *tangenciális* erő, mely a billentő és a ringató mozgást idézi elő;
- $D_T = 2R_T$ = az átbillenés idejét meghatározó Thales-kör átmérője (23. ábra),
- y = a lejtő hossza a Thales-körben (tangenciális vagy ütközési amplitúde);
- x = a billenő rezgés sugárirányú kilengése (radiális vagy tetőponti amplitúdó, (21. ábra));
- α_0 = a billenési pályát helyettesítő lejtőnek az erő irányával bezárt hajlásszöge „nulla fordulat” esetében mozdulatlan golyótámasztéknál;
- α = ugyanaz mozgó támasztéknál;
- $u = y \cos \alpha$ = „esési magasság” a Thales-körben;

- $+k$ = arányossági tényező a belső gördülőpálya és a golyó átmérője között a Hertz-féle belapulási sugár számításához;
 $-K$ = ugyanaz a külső gördülő pálya és a golyó átmérő között;
 μ = súrlódási tényező a golyó és a gördülő pályák között;
 μ_1 = ugyanaz a golyók és a kosár között;
 $\bar{\varrho}$ = a gördülő csapágy súrlódási szöge;
 M = a golyók gördülő súrlódásának nyomatéka;
 f = a golyó gördülő súrlódásának nyomatéki karja;
 θ = a golyó belapulási körének átmérője.

IV. A gördülőcsapágy, mint bolygómű

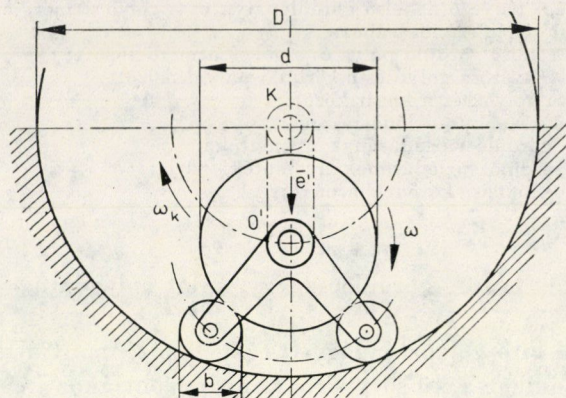
A hézaggal bíró golyóscsapágy O tengelyközéppontja bármely irányban szabadon elmozdulhat a külső gyűrű K középpontjához képest; *terhelés alatt* azonban *stabilis helyzetnél* a szimmetria folytán úgy képzelhetjük, mintha a D átmérőjű külső gyűrű K középpontját az \bar{e}' excentricitás hosszával egyező csuklós kar kötné össze a d átmérőjű belső gyűrű O' középpontjával. Az összefüggések világosan kitűnnek a torzított méretekkel felrajzolt 3. ábrából, amelyen két b átmérőjű görgő befogási ágyazatának O' pontja képviseli a golyókoszorút, illetőleg annak súlypontját.

Tekintve, hogy O' tengelyre nézve a körülötte ω szögsebességgel forgó tömegek ki vannak egyensúlyozva, az \bar{e}' sugáron fellépő centrifugális erő számításakor az m tömeg O' súlypontjának ω_k keringő szögsebességét kell figyelembe vennünk. Az \bar{e}' kar (és a golyókosár) keringési fordulatszámát kiszámíthatjuk azzal a megfontolással, hogy előbb az egész, egymáshoz képest reteszeltnek képzelt alkatrészekből álló rendszert 1 fordulattal körülforogatjuk, majd a reteszelés oldása után D átmérőjű külső gyűrűt visszaforgatjuk eredeti helyzetébe.

	Fordulatszámok			
	\bar{e}' képzelt kar	\varnothing^d belsőgyűrű	\varnothing^b golyó	\varnothing^D külső gyűrű
Az egész rendszer egyszer körülforogatva	+1	+1	+1	+1
D eredeti helyzetébe visszaforgatva mozdulatlan \bar{e}' karral	0	$+\frac{D}{d}$	$-\frac{D}{b}$	-1
Fordulatszám arány, mint eredmény	+1	$1 + \frac{D}{d}$	$1 - \frac{D}{d}$	0

Tehát a d gyűrű egy fordulatára az \bar{e}' kar (és a golyó-kosár)

$$\frac{1}{1 + D/d} = \frac{d}{D + d}$$



3. ábra. A sugárirányú csapágyhézaggal bíró gördülőcsapágyat magyarázó „bolygómmű”

fordulatot végez és d gyűrű n fordulatára az e' kar és kosár fordulatszáma

$$n_k = n \frac{d}{d + D}. \quad (5)$$

A képlet ebben a formájában akkor is érvényes, ha O' távol esik K -tól. Golyóscsapágyaknál azonban $(d + D)$ helyett bevezethetjük a golyókoszorú kétszeres középátmérőjét, amivel az e' elhanyagolásával nyert közelítő érték

$$n_k \approx n \frac{d}{2D_k}, \quad (6)$$

és a koszorú keringésének szögsebessége

$$\omega_k = \frac{n_k \pi}{30} = \frac{n \pi}{30} \frac{d}{d + D} = \omega \frac{d}{d + D} \approx \omega \frac{d}{2D_k}. \quad (7)$$

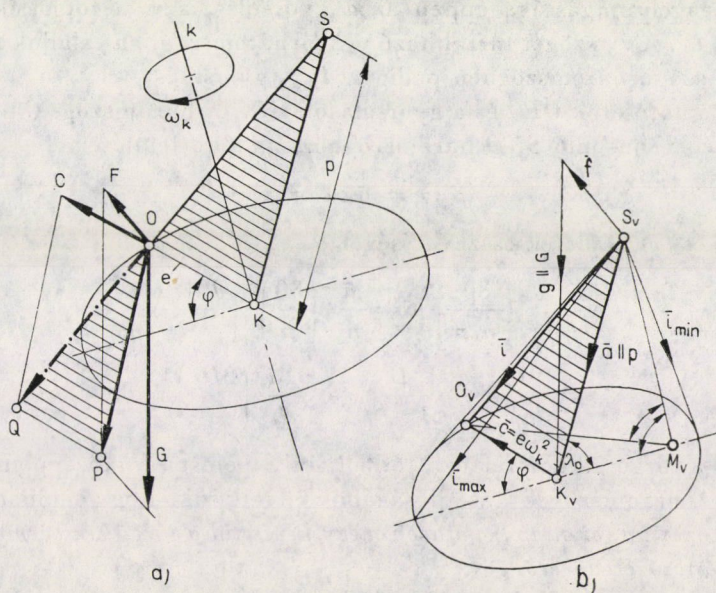
Hasonlóképp d gyűrű n fordulatszámanál a golyók fordulatszáma

$$\begin{aligned} n_b &= n \frac{1 - (D/b)}{1 + (D/d)} = -n \frac{d}{D + d} \cdot \frac{D - b}{b} = \\ &= -n_k \cdot \frac{D - b}{b} \approx -n \frac{d}{2D_k} \cdot \frac{D - b}{b}. \end{aligned} \quad (6a)$$

V. Segédtétel

E segédtétel olyan merev anyagi pontrendszerre vonatkozik, amely tetszőleges irányú homogén erőterben, tetszőleges irányú tengely körül forog.

A tér valamely tetszőleges k tengelye körül a reá merőleges sík ω_k szögsebességgel forog (4a ábra). E sík K forgásközéppontjától e távolságra helyez-



4a. ábra. A tetszőleges k tengely körül forgó reá merőleges sík tömegpontjainak erőközpontja (pólusa)
 4b. ábra. Vektorábra

kedik el az m tömeg O pontja, amelyre a G önsúlyon kívül még F változatlan irányú erő is hat. Ez az önsúllyal az ugyancsak változatlan irányú P erőt eredményezi.

A változatlan irányú P erőn kívül az O pontra hat még a C centrifugális erő, aminek következtében a $\bar{P} + \bar{C} = \bar{Q}$ eredő erő a sík forgása közben irányát és nagyságát változtatni fogja.

Rajzoljuk fel a vektorábrát (4b ábra) a tömegegységre ható erőkre, vagyis a

$$\frac{P}{m} = \bar{a} \left(\text{mely } \frac{G}{m} = g \text{ és } \frac{F}{m} = \bar{f} \text{ gyorsulások eredője} \right),$$

$$\frac{C}{m} = e\omega_k^2 = \bar{c}$$

és

$$\frac{Q}{m} = \bar{i}$$

gyorsulásokra. Miután a vektor ábrában az \bar{a} vektor iránya és nagysága változatlan, \bar{c} pedig a k tengely irányára merőleges síkban \bar{c} sugarú kört ír le K_v középpont körül, az \bar{i} eredő gyorsulást olyan ferde körkúp alkotói szolgáltatják,

amelynek tengelymagassága éppen az \bar{a} gyorsulás, ami a forgássíkjával λ_0 szöget zárja be. A λ_0 szöget tartalmazó vektorháromszögben találjuk az \bar{i}_{\min} , a $(180^\circ - \lambda_0)$ szögű háromszögben pedig az \bar{i}_{\max} gyorsulást.

Mivel a ható erők OPQ és a gyorsulások $S_v K_v O_v$ háromszöge O pont minden helyzetében hasonló SKO háromszöghöz, az ábra jelölésével

$$p : e = \bar{a} : e\omega_k^2,$$

tehát az (5) és (7) képletek összevetésével

$$\begin{aligned} p &= \frac{\bar{a}}{\omega_k^2} = \left(\frac{30}{n_k \pi} \right)^2 \bar{a} = \frac{\bar{a}}{n_k^2} \left(\frac{30}{\pi} \right)^2 \left(\frac{d+D}{d} \right)^2 = \\ &= \frac{91\bar{a}}{n_k^2} \left(\frac{d+D}{d} \right)^2 \approx \frac{91\bar{a}}{n_k^2} \left(\frac{2D_k}{d} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

összefüggés a forgó síkhoz tartozó térbeli fix S pólust (erőközéppontot) meghatározza. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy mindaddig, míg \bar{a} és ω_k változatlan, ezen az S póluson megy keresztül a forgó sík bármely tömegpontjához tartozó eredő erő.

Válasszuk az \bar{i}_{\max} -nak megfelelő helyzetet kiindulási pontnak, és határozzuk meg valamely φ fázisszöghöz tartozó \bar{i} gyorsulás nagyságát.

Az $S_v M_v O_v$ háromszögben $S_v M_v$ oldal a forgó síkra emelt merőleges, és így

$$\begin{aligned} S_v M_v O_v \sphericalangle &= 90^\circ, \\ \overline{S_v O_v^2} &= \bar{i}^2 = \overline{S_v M_v^2} + \overline{O_v M_v^2}. \end{aligned}$$

az $S_v M_v K_v$ derékszögű háromszögből

$$S_v M_v = \bar{a} \sin \lambda_0,$$

és az $O_v M_v K_v$ általános háromszögből

$$\overline{O_v M_v^2} = \bar{c}^2 + \overline{K_v M_v^2} + 2\bar{c}\overline{K_v M_v} \cos \varphi,$$

tehát

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 \sin^2 \lambda_0 + \bar{c}^2 + \overline{K_v M_v^2} + 2\bar{c}\overline{K_v M_v} \cos \varphi,$$

mivel

$$K_v M_v = \bar{a} \cos \lambda_0;$$

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 \sin^2 \lambda_0 + \bar{c}^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \lambda_0 + 2\bar{a}\bar{c} \cos \lambda_0 \cos \varphi,$$

vagyis

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 + \bar{c}^2 + \bar{a}\bar{c} \cos \lambda_0 \cos \varphi. \quad (9)$$

Miután a φ fázisszög kiindulási helyzetét a λ_0 szöget tartalmazó szimmetria síkban vettük fel, a (9) összefüggés mindkét forgásirányra érvényes.

Pusztán az önsúllyal terhelt függőleges tengelyű tárcsás csapágyaknál (talpcsapágyak)

$$\lambda_0 = 90^\circ$$

és

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 + \bar{c}^2. \quad (10)$$

Vízszintes tengelyű radiális csapágyaknál (nyakcsapágy) a tengelyre merőleges csapágy-reakció esetében

$$\lambda_0 = 0$$

és

$$\bar{i}\bar{c}^2 = \bar{a}^2 + \bar{c}^2 + 2\bar{a}\bar{c} \cos \varphi. \quad (11)$$

Miután a gyakorlatban ez utóbbi eset fordul elő legsűrűbben, a következőkben csak ezzel kívánunk foglalkozni.

A tárgyalt törvényszerűség fontosságára való tekintettel a (8) és (11) összefüggések lényegét a következőkben foglaljuk össze:

1. A k tengely körül forgó sík összes pontjaihoz a térben egyetlen S erőközpont (pólus) tartozik, a pólus távolsága a sík forgásközéppontjától \bar{a}/ω^2 , iránya pedig párhuzamos az \bar{a} gyorsulás vektorával;

2. Párhuzamos síkokhoz tartozó pólusok a forgási tengellyel párhuzamos egyenesen sorakoznak;

3. Az \bar{a} gyorsulás végtelenhez közeledő növekedésekor vagy az ω_k szögsebesség nullához közeledő csökkenésekor az S erőközpont (8) szerint a végtelenbe tart és iránya megegyezik \bar{a} gyorsulás irányával;

4. Ha a forgás síkjában O tömegpont helyét változtatja, de a forgástengely helyben marad, akkor az e excentricitás változása az S pólus helyét nem befolyásolja, de ha k forgástengely mozdul el önmagával párhuzamosan, akkor p pólustáv is önmagával párhuzamosan tolódik el;

5. Ha egy körülfordulás alatt a szögsebesség változik, de az \bar{a} gyorsulás változatlan marad, akkor a pólustáv egyenese helyben marad, de nagysága a szögsebesség négyzetével fordított arányban változik;

6. Radiális csapágy tengelyre merőleges fősíkjában érvényesülő erőhatásoknál a pólus is a fősíkban marad, és S pólus távolsága (8) szerint a legjellemzőbb üzemi viszonyokon kívül a csapágy legjellemzőbb adatait is magában foglalja;

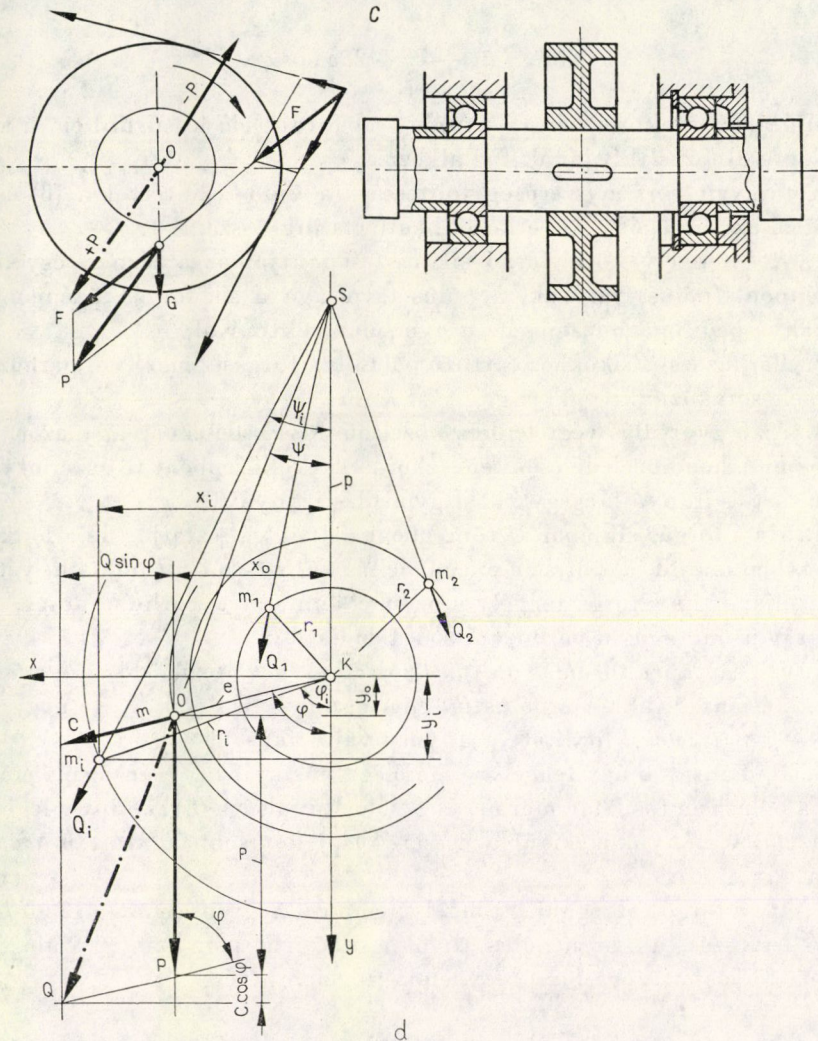
7. Ha a forgó tömeg saját tengelyére nincs kiegyensúlyozva (amiről a II. részben lesz szó), akkor p pólus távolság számításakor nem a keringés ω_k , hanem a forgás ω szögsebessége veendő figyelembe és

$$p = \frac{a}{\omega^2}. \quad (12)$$

VI. A csapágyközépsíkba képzel forgó rendszer tengelybeli súlypontjára ható normális és tangenciális erők

Bár a 4. ábrával kapcsolatban bevezetett segédétel bepillantást nyújt az egész általános esetekre is, a következőkben csakis azt a gyakorlatban legáltalánosabban előforduló esetet vesszük tekintetbe, amikor a k tengely vízszintes, a reá ható térbeli külső erő pedig merőleges a tengelyre.

Egyszerűség kedvéért a 4c ábrán vázolt szimmetrikus elrendezéssel mutatjuk be a csapágyra ható erőket, mert ilyenkor a két csapágy terhelése egyforma, és így elegendő az egyik vizsgálata.



4c. ábra. A csapágy középsíkjában ható erő
 4d. ábra. A forgó rendszert helyettesítő tömegpont

Hézagmentes csapágnál a [27] és [28] közleményekben említett, a görgők véges számából eredő rezgésektől eltekintve, a tengely ω szögsebességű egyenletes körforgásával számolhatunk. Működés közben a laza és feszült szíjak húzásának eredője a tengelyre merőleges kitérő egyenesben hat a szíjkerékre, és a normáltranzverzális a keletkező nyomaték karja. A tengely és a vele együtt forgó szíjkerék, a tengelyvégeken levő két tengelykapcsoló valamint a két gördülőcsapágy belső gyűrűje, kosara és görgőinek önsúlyai a rendszer középsíkjában a tengelyt metsző függőleges egyenesben hatnak. A G önsúly és az F működő szíjhúzás P eredője a tengelyhez képest ugyancsak kitérő egyenesben hat. Ha az O pontban ezzel az egyenessel párhuzamosan vesszük fel az egyensúlyban levő két erőt, akkor látjuk a belső gyűrűkre ható külső erőket, valamint az egy-egy tengelykapcsoló által átviendő nyomatékot. Az ábrán ugyanis csak az egyik csapágyoldalra ható erők vannak feltüntetve. Hézagmentes csapágyazáskor ilyenképpen a csapágy középsíkjában redukált m tömegre ható P erő egyenesén van az erőközpon S pólusa. Mivel most az m tömeg súlypontja benne van a forgási középpontban, a rendszer anyagi pontjaira ható centripetális erők forgás közben egyensúlyban vannak.

Ha van csapághézag, de nincs akkora terhelés, amely a görgőkön számításba vehető deformációt okozzon, akkor a csapágy középsíkjába képzelt ω szögsebességgel forgó rendszer súlypontja, az O tengelyközéppont, az 1a ábra szerint már a külső gyűrű K középpontja körül KO sugarú körön ω_k szögsebességgel keringeni is igyekezni fog.

Segédtevéletünket a merev forgó rendszernek csak egyes anyagi pontjaira vezettük le. Most be fogjuk bizonyítani, hogy e tétel akkor is érvényes, ha e tételt a forgó rendszer tömegközéppontjára vonatkoztatjuk. A bizonyítást csak az általunk bevezetett különleges esetre végezzük el, amikor a forgó rendszer síkja a K forgási középponthez illeszkedő egyenesre merőleges.

A 4d ábra jelöléseivel $m_1, m_2 \dots m_i$ tömegpontokból álló merev forgó rendszer K középpont körül forog; kimutatjuk, hogy az egyes tömegpontokra ható erők geometriai összege

$$\Sigma \bar{Q}_i = \bar{Q}$$

az O tömegközéppont és az S erőközépponthez illeszkedő egyenesben van, és nagyságát a $\Sigma m_i = m$ tömeg nagysága és $\bar{i} = \bar{a} +$ gyorsulása szabja meg.

Felírjuk a ható erők x irányú és y irányú vetületeinek összegét, majd kifejezzük e két vetületösszeg eredőjét.

$$\Sigma Q_i \sin \varphi_i = \Sigma P_i + \Sigma C_i \cos \varphi_i = a \Sigma m_i + \omega_k^2 \Sigma m_i r_i \cos \varphi_i .$$

Az ábra jelöléseivel fenti egyenlőségből következik, hogy

$$\Sigma m_i = m ,$$

és

$$\Sigma m_i r_i \cos \varphi_i = \Sigma m_i y_i = m y_0$$

bevezetése után

$$\Sigma Q_i \sin \psi_i = ma + \omega_k^2 m y_0.$$

Hasonlóképp felírható az x irányú erők vetületeinek összege

$$\Sigma Q_i \sin \varphi_i = \omega_k^2 \Sigma m_i r_i \sin \varphi_i = \omega_k^2 m x_0.$$

Az eredő Q erő tehát

$$Q = \sqrt{m^2(a + \omega_k^2 y_0)^2 + m^2(\omega_k^2 x_0)^2},$$

vagyis

$$Q = m \sqrt{a^2 + 2a y_0 \omega_k^2 + \omega_k^4 y_0^2 + x_0^2 \omega_k^4}.$$

Bevezetve az m tömeg O súlyponti helyzetére az e excentricitás

$$e^2 = x_0^2 + y_0^2$$

értékét,

$$Q = m \sqrt{a^2 + 2a y_0 \omega_k^2 + e^2 \omega_k^4}.$$

Az ábra jelöléseivel

$$y_0 = e \cos \varphi,$$

tehát

$$Q = m \sqrt{a^2 + 2ae\omega_k^2 \cos \varphi + (e\omega_k^2)^2}.$$

Ezzel állításunkat be is bizonyítottuk, mert a zárjel alatti $(e\omega^2)$ tag valóban az

$$OPQ\Delta \sim SKO\Delta$$

hasonlóság folytán az eredő gyorsulásokat adja, és így a hasonlóság alapján a forgórendszer súlypontjára is felírható a (8) kifejezés alapjául szolgáló

$$p : e = \bar{a} : e\omega_k^2$$

aránylat.

A görgőkre a belső csapágy-gyűrű külső felülete átadja a külső terhelést, a külső csapágy-gyűrű belső felülete pedig a reakció erőt, miáltal a görgők deformálódnak, és a tengelyközép O' helyzetbe jutva, az előbb említettől eltérő pályán fog mozogni (1. ábra). Tételünk szerint azonban a tengelyközépre, mint tömegközéppontra ható erők eredőjét az O' minden helyzetében meg tudjuk állapítani.

A csapágyra ható erők számításakor a görgők saját tengelyük körüli forgásától egyelőre eltekintünk, és úgy vesszük, mintha az egész görgőkosár a tengellyel együtt (6) szerint n_k fordulatszámú keringést végezne (sikló mozgással történő görgő-elmozdulások stroboszkóppal végzett vizsgálatok szerint egyes esetekben ki is mutathatók).

A II. részben tárgyalt fejtegetés szerint a görgők saját tengelyük körüli forgása is tekintetbe vehető volna, tömegük azonban oly csekély a forgó rendszeréhez képest, és annyira bizonytalan, hogy a kenőanyag fékezése mellett képesek-e a (6a) képletben kifejezett fordulatszámot felvenni, hogy a saját fordulatszám figyelembevétele csak feleslegesen bonyolítaná a számításokat.

Ha egyelőre a súrlódástól eltekintünk, akkor a külső csapágy-gyűrű belső felülete mint kényszerpálya által az egyes görgőkre gyakorolt reakcióerői keresztülmennek a görgők középpontjain. Az egyes görgőkre ható erők eredője tehát egyensúlyt tart a ható Q erőnek a K forgási középponton átmenő N normális komponensével. Keringés közben a T tangenciális erő is kifejti hatását, amint látni fogjuk a következőkben.

A 3. ábrából kitűnik, hogy az O tengelyközép erőhatás alatt kényszerpálya következtében a külső gyűrű K középpontja körül keringő KO' sugarú mozgást végezhet. Vizsgálatunk lényege annak megállapításában rejlik, hogy a golyók deformációját is tekintetbe véve milyen körülmények között mozog a tengelyközép ezen a keringő pályán, milyen körülmények között és hogyan hagyja el ezt a keringő mozgást. Evégből szükséges, hogy a keringőnek képzelt O pontra ható erő normális összetevőjét, mely az alakváltozás okozója és tangenciális összetevőjét, mely a létrejövő pillanatnyi elmozdulás előidézője, a keringési pálya minden helyén ismerjük.

Az 5a ábra az O súlypontra ható \bar{i} gyorsulások és \bar{n} normális valamint \bar{t} tangenciális komponenseit tünteti fel $\varphi = 0$ helyzettől $\varphi = \pi$ helyzetig, az 5b ábra pedig a további $\pi \dots 2\pi$ -vel határolt félfordulatra. Az ábrából kitűnik, hogy a keresett összetevők megszerkesztésére nagyon jól használható az \bar{a} vektorra, mint átmérőre rajzolt Thales-kör.

Az \bar{a} és \bar{c} vektorok aránya szerint a következő eseteket különböztetjük meg.

1. eset: $\bar{a}/\bar{c} > 1$; $p > e$; S pólus a végesben

Az 5a ábrából közvetlenül kitűnik, hogy az \bar{i} gyorsulás φ fázis szöghöz tartozó normális komponense

$$\bar{n} = \bar{a} \cos \varphi + \bar{c}, \quad (13)$$

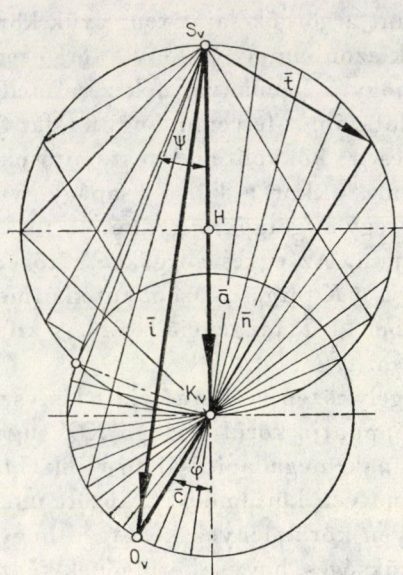
és tangenciális komponense

$$\bar{t} = \bar{a} \sin \varphi. \quad (14)$$

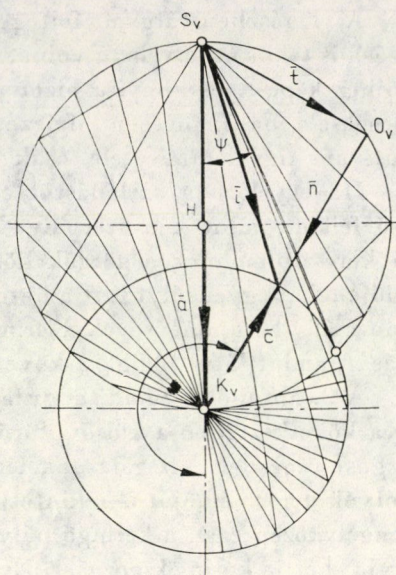
A másik félfordulatnál az $S_v K_v$ szimmetria tengelyre vonatkoztatott megfelelő értékeket nyerjük (5b ábra).

A gyorsulások változását az egyenesbe fejtett φ szög függvényében az 5c ábra szemlélteti.

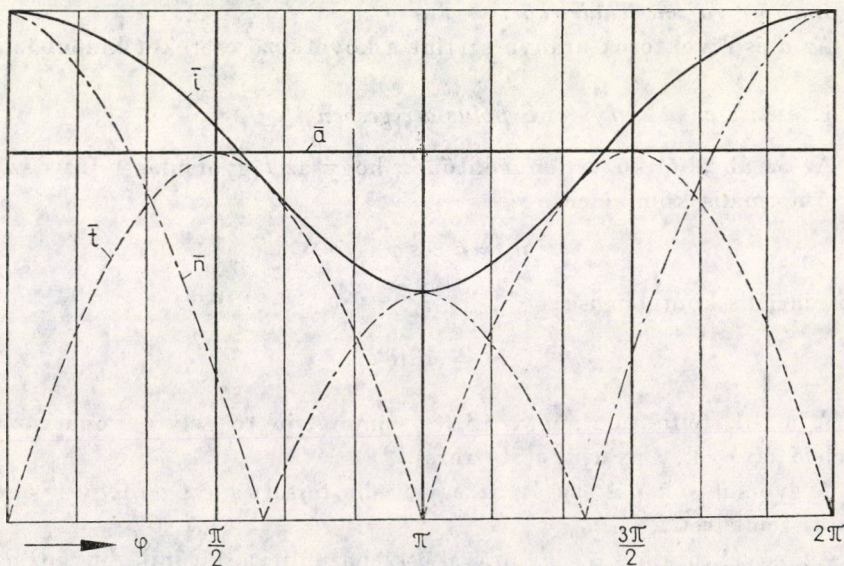
Az 5a vektorábrát az 1. ábrával összehasonlítva, kitűnik, hogy O pontra akkor hat a legnagyobb deformációt okozó erő, amikor az SK sugáron halad



5a. ábra. Az \bar{i} gyorsulás és egymásra merőleges összetevőinek vektorábrája az első félfordulatban. Pólus a végesben



5b. ábra. Ugyanaz a második félfordulatban



5c. ábra. A gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

Különleges esetek

φ	$\cos \varphi$	\bar{i}	\bar{n}	\bar{i}
0°	1	$\bar{a} + \bar{c}$	$\bar{a} + \bar{c}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	$\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{c}^2}$	\bar{c}	\bar{a}
$\bar{c} + \bar{i}$	$-\frac{\bar{c}}{\bar{a}}$	$\sqrt{\bar{a}^2 - \bar{c}^2}$	0	\bar{i}
π	-1	$\bar{a} - \bar{c}$	$\bar{a} - \bar{c}$	0

keresztül, és ha az S pontból az e sugarú körhöz vont érintő érintési pontjáig eljuthatna, akkor ott már csakis tangenciális erő érvényesülne.

2. eset: $\bar{a}/\bar{c} > 1$; $p = \bar{a}/\omega_k^2 \rightarrow \infty$

Ez a feltétel akkor teljesül, amikor a keringési fordulatszámhoz képest az \bar{a} gyorsulás igen nagy, vagy az \bar{a} gyorsuláshoz képest az ω_k igen kicsiny. Így pl. ha csak a nehézségi gyorsulás hat és $\bar{a} = g$, továbbá

$$p = \frac{g}{\omega_k^2} = \frac{895}{n_k^2} \quad (8a)$$

akkor $n_k = 1/4$ /perc esetén

$$p = 895 \cdot 16 = 14,32 \text{ km.}$$

Ha ugyanekkor az e excentricitás esetleg csak 49μ , akkor $p/e = 3 \cdot 10^8$. Ilyenkor az \bar{a} vektorra rajzolt „Thales-kör” a K_v ponton átmenő \bar{a} -ra merőleges egyenessé fajul és az \bar{a} , \bar{c} és \bar{i} vektorok elnyúlt háromszögéből következik, hogy \bar{c} centrifugális gyorsulás \bar{a} mellett elhanyagolható (nulla fordulat esete) és így

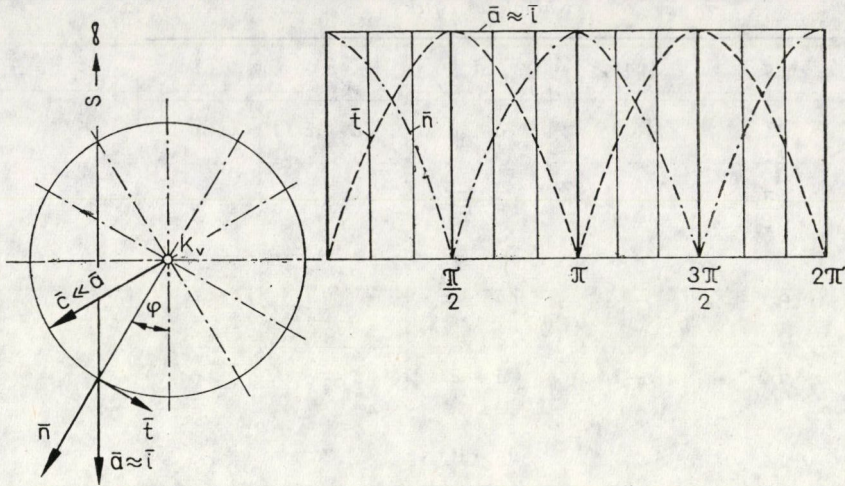
$$\bar{i} \approx \bar{a}.$$

A φ elfordulási szöghöz tartozó gyorsulás normális összetevője (6a ábra)

$$|\bar{n}| = |\bar{a} \cos \varphi|, \quad (13a)$$

és a tangenciális összetevő

$$\bar{i} = \bar{a} \sin \varphi.$$



6a. ábra. Gyorsulások, pólus a végtelenben
6b. ábra. Gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

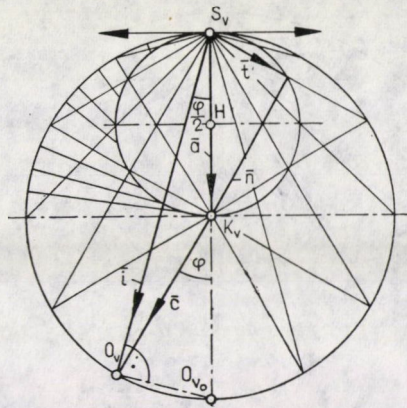
Különleges esetek

φ	\bar{n}	\bar{i}
0	\bar{a}	0
$\frac{\pi}{2}$	0	\bar{a}
π	\bar{a}	0

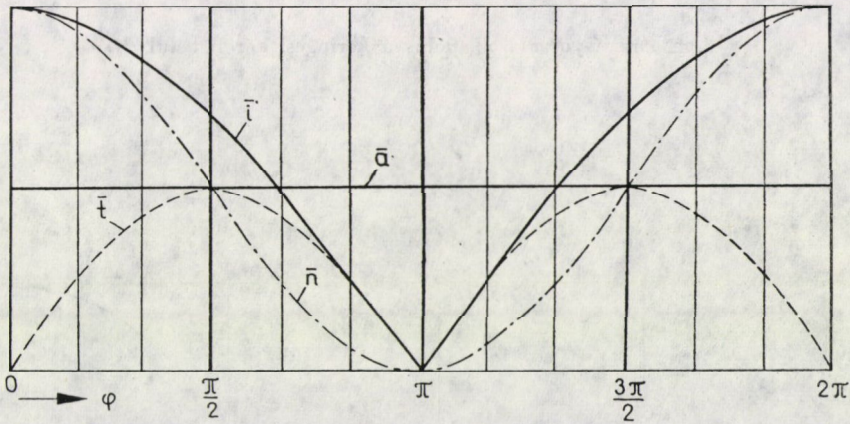
Az egyenesbe fejtett φ függvényében a 6b ábra tünteti fel a ható erőket.
3. eset: $\bar{a}/\bar{c} = 1$; $p = e$; S pólus a keringési körön.

A 7a. ábrából kitűnik, hogy az \bar{a} gyorsulás H felezőpontjából rajzolt Thales-kör belül érinti a \bar{c} sugarú kört S_v pontban. Az \bar{i} gyorsulásra vonatkozó (11) egyenlet így módosul:

$$\begin{aligned} \bar{i}^2 &= 2\bar{a}^2(1 + \cos \varphi); \\ \bar{i} &= 2\bar{a} \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} = 2\bar{a} \cos \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$



7a. ábra. Gyorsulások; pólus a keringési körön



7b. ábra. Gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

ami egyébként a 7a vektorábra $S_v O_v O_{v_0}$ derékszögű háromszögéből is látható.

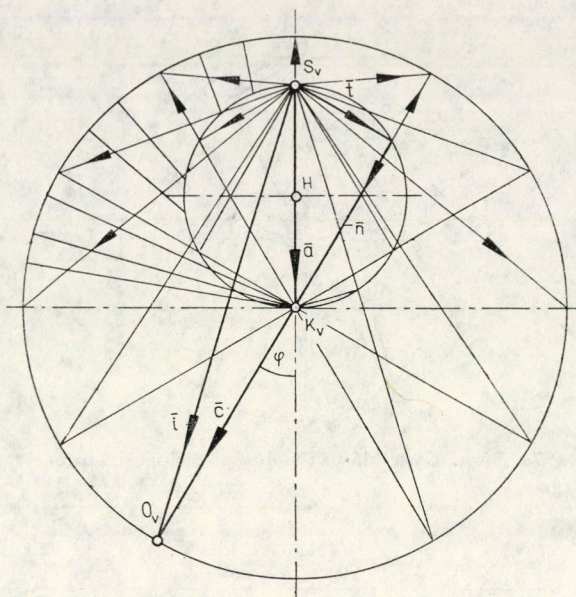
Az \vec{i} gyorsulás normális komponense

$$\vec{n} = \vec{a} + \vec{a} \cos \varphi = \vec{a}(1 + \cos \varphi), \quad (16)$$

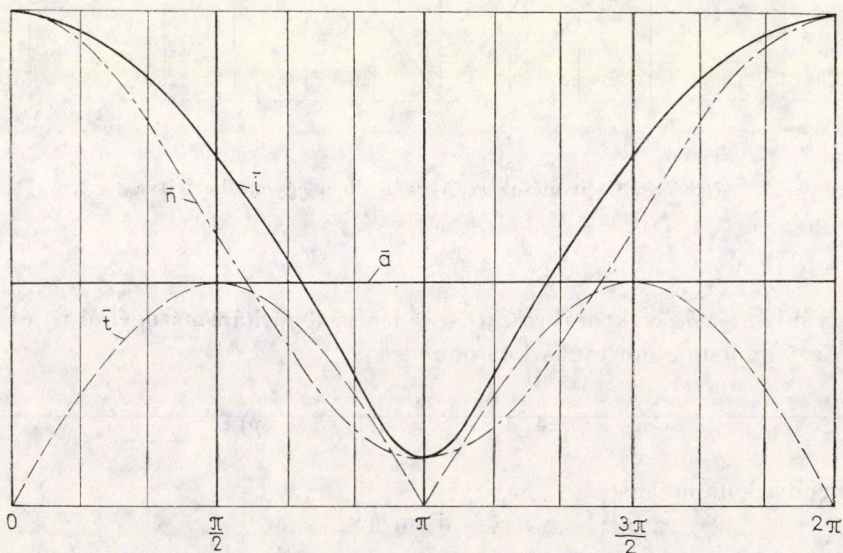
tangenciális komponense

$$t = \vec{a} \sin \varphi.$$

A kifejtett diagramot a 7b ábra szemlélteti,



8a. ábra. Gyorsulások, pólus a keringési körön belül



8b. ábra. Gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

Különleges esetek

φ	$\cos \varphi$	\bar{i}	\bar{n}	\bar{t}
0	1	$2\bar{a}$	$2\bar{a}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	$\bar{a}\sqrt{2}$	\bar{a}	\bar{a}
π	-1	0	0	0

4. eset. $\bar{a}/\bar{c} < 1$; $p < e$; S pólus az e sugarú körön belül foglal helyet.

Az 5a ábra esetében az \bar{i} gyorsulás csak a síknak 2ψ szögén belül helyezkedhetett el, a 7a ábránál már $2\psi = \pi$, a most tárgyalandó 8a ábránál pedig az \bar{i} gyorsulás már teljes 2π körül fordulást végezhet.

Az \bar{i} gyorsulás normális komponense

$$\bar{n} = \bar{c} + \bar{a} \cos \varphi, \quad (17)$$

tangenciális komponense

$$t = \bar{a} \sin \varphi.$$

Különleges esetek

φ	$\cos \varphi$	\bar{i}	\bar{n}	\bar{t}
0	1	$\bar{a} + \bar{c}$	$\bar{a} + \bar{c}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	$\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{c}^2}$	\bar{c}	\bar{a}
π	-1	$\bar{c} - \bar{a}$	$\bar{c} - \bar{a}$	0

A kifejtett diagramot a 8b ábra tünteti fel. A fordulatszám növelésével S pólus egyre jobban közeledik K ponthoz, de a K középponti pólusnak a végtelen nagy keringési fordulatszám felelne meg.

Ebben a fejezetben szereplő vektorábrákban a szimmetria kedvéért az \bar{a} vektort a rajz-sík függélyesébe forgattuk, és ezt fogjuk követni az erők hatásvonal ábráinál is, de megjegyezzük, hogy a tényleges üzemi viszonyoknak megfelelően a $KS = p$ pólustávolság a rajz-síkban bármilyen irányú lehet.

VII. A terhelési ív meghatározása

Azok a mozgásjelenségek, melyek az O tengelyközépbeli súlypontú forgó tömegnél érvényesülnek, szoros összefüggésben vannak a pólustávolsággal és a deformáció által létrehozott terhelési ívvel. Míg a pólustávolság a forgásban résztvevő m tömegtől teljesen független, és (8) szerint csupán a fordulatszámától, az \bar{a} gyorsulástól, a belső és külső gördülő pálya átmérőjétől függ, addig ζ terhelési ív (4) szerint az e excentricitás, a $z = 180^\circ/\gamma$ golyószám és az s besüllyedés, vagyis végeredményben az ezt létrehozó $Q_{\max} = m\bar{a}$ erő függvénye, ami már a forgó m tömeget is tartalmazza.

Az e excentricitást csakis méréssel, az s süllyedést pedig méréssel vagy számítással határozhatjuk meg.

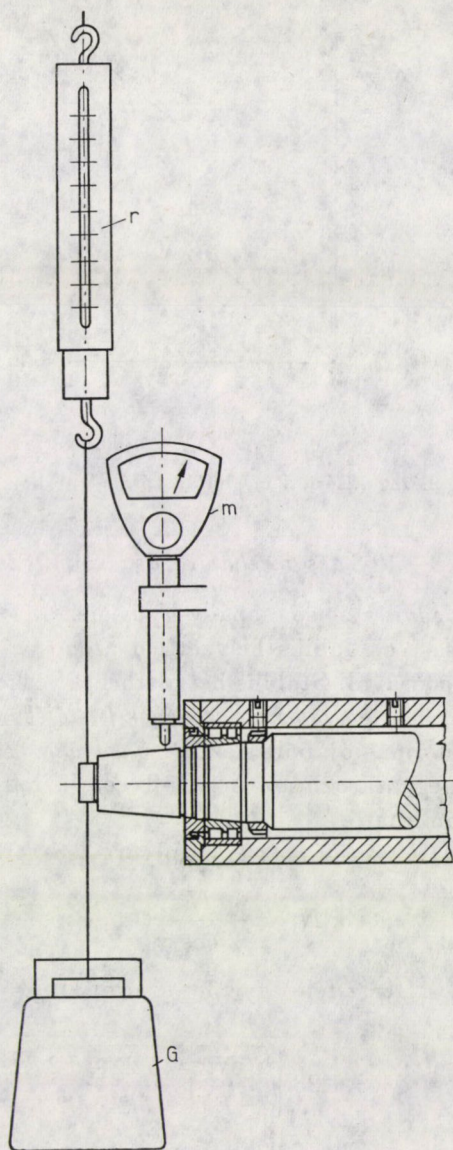
1. A csapágyhézag meghatározása mérés útján

A csapágyhézag mérés útján pl. azzal az eljárással határozható meg amelyet az *SKF Die Kugellager Zeitschrift* 1949 évf. 2. számának 32–33. oldalán ajánl [18].

E módszer pontosság szempontjából teljesen megfelelő. A berendezés a 9. ábra szemlélteti. A tengely végére G súlyt helyezünk, amely a tengely-önsúly egy részével együtt a gördülőcsapágyat *lefelé* irányban terheli. Az m ezredes-mérőórát úgy rögzítjük a csapágyházhoz, hogy tapintója lehetőleg a csapágyhoz minél közelebb érintse a tengelyt, és a mutató állását leolvassuk. Az r rugósmérleg segítségével a tengelyt *fokozatosan* mentesítjük a terheléstől és a mérőóra állását a tehermentesítés minden fokán feljegyezzük. A *felfelé* irányuló terhelést addig fokozzuk, amíg nagysága körülbelül a legnagyobb lefelé irányuló terhelésnek felel meg.

A mérőóra állásait a rugós mérlegen leolvasott terhelés függvényében felrajzoljuk és ennek alapján a csapágyhézag már megállapítható. Pl. a 9a ábrabeli kihúzott vonalú függvénygörbe szerint a tengely $0 \div 30$ kp-ig lefelé, $35 \div 60$ kp-ig felfelé rugózik. A görbe e két szakaszát egymással csaknem pontosan párhuzamos egyenesek képezik, melyek az itt szereplő kis terheléseknél pusztán a tengelyrugózásra vonatkoznak. A $30 \div 35$ kp terhelésnél (ami tulajdonképpen a G súlynak és a tengely-önsúly csapágyat terhelő részének felel meg) a golyóscsapágy teljesen tehermentes és a függvénygörbének e helyen látható ugrását a csapágyhézag okozza. Ha nem volna csapágyhézag, akkor a függvénygörbe 0 és 60 kp terhelés között egyenes vonal maradna. A terhelési görbe felső egyenes szakaszát az ordináta tengelyig (az ábrában szaggatott vonallal) meghosszabbítva, közvetlenül leolvashatjuk a csapágyhézag méretét.

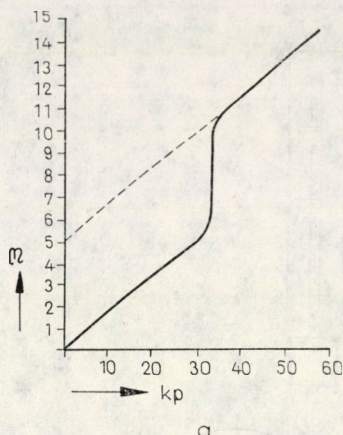
Ez a mérési mód megfelel az MSZ. 7980 értelmezésének, mely szerint: „A gyűrűscsapágy radiális hézagán azt a távolságot értjük, amivel a belsőgyűrű a külsőgyűrűhöz képest adott nagyságú ellenkező irányban felváltva



9. ábra. Berendezés a csapághézagok mérés útján való meghatározására

működő két radiális mérőterhelés hatására sugárirányban elmozdítható, az egyik szélső helyzettől a másik szélső helyzetig mérve”.

Értelmezésünk szerint ez a mérési mód *páros golyószám* esetében az osztásszög felezőirányában történő elmozdításakor $2e$ kétszeres excentricitást, *páratlan golyószám* esetén pedig az $e + h = e(1 + \cos \gamma)$ távolságot szolgáltatja. Természetes, hogy mérés közben a tengely elfordulását meg kell akadályozni.



9a. ábra. A csapágyhézag kísérleti meghatározásának terhelési függvényábrája

2. A süllyedés meghatározása számítással

Az s süllyedés, vagyis a belső csapágy-gyűrűnek az N normális erő irányában mért elmozdulása csak labilis helyzetben azonos a terhelési ív közepén levő golyó δ benyomódásával. Stabilis helyzetben a terhelési ív közepe és így s süllyedés is két szomszédos golyó osztás szögének felezőjébe esik, de (3) összefüggés szerint a golyó deformációjából és az illető golyónak a terhelési ív felezőjével bezárt szögéből meghatározható. A besüllyedés ismerete után a 2ζ terhelési ív (4) szerint számítható.

a) Két terhelte golyó esetében az egy golyóra eső terhelés

$$N_1 = \frac{N}{2 \cos \gamma} \quad (18)$$

és a golyó belapulása a Hertz-féle egyenlet szerint [16]

$$\delta_1 = 1,23 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{E}\right)^2 \frac{b/2 + d/2}{b/2 \cdot d/2}}$$

vagyis

$$\delta_1 = s \cos \gamma = 1,23 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{E}\right)^2 \frac{2}{b} \left(\frac{1+k}{k}\right)}, \quad (19)$$

ahol b = a golyó átmérője és $k = d/b$ a belsőgyűrű és a golyóátmérő aránya.

N_1 fenti értékét tekintetbe véve

$$\delta_1 = s \cos \gamma = 1,23 \sqrt[3]{\left(\frac{N}{2 \cos \gamma \cdot E}\right)^2 \frac{2}{b} \left(\frac{1+k}{k}\right)}.$$

A (13) szerint valamely φ fázis szöghöz tartozó

$$N = m\bar{n} = m\bar{a} \cos \varphi + m\bar{c} = P \cos \varphi + me\omega^2 = P \cos \varphi + C,$$

tehát a φ szöghöz tartozó belépülés

$$\delta_1 = s \cos \gamma = 1,23 \sqrt[3]{\left(\frac{P \cos \varphi + C}{2 \cos \gamma \cdot E}\right)^2 \frac{2}{b} \left(\frac{1+k}{k}\right)}. \quad (19a)$$

Legnagyobb a belépülés $\varphi = 0^\circ$ -nál, ahol

$$N_{\max} = Q_{\max} = P + C;$$

$$\delta_{1\max} = s \cos \gamma = 1,23 \sqrt[3]{\left(\frac{Q_{\max}}{2 \cos \gamma \cdot E}\right)^2 \frac{2}{b} \left(\frac{1+k}{k}\right)}, \quad (19b)$$

és

$$s = \frac{1,23}{\cos \gamma} \sqrt[3]{\left(\frac{Q_{\max}}{E \cos \gamma}\right)^2 \frac{(1+k)}{2kb}}; \quad (20)$$

és valamely φ szöghöz tartozó N normális erőnél

$$s_i = s \left(\frac{N}{Q_{\max}}\right)^{2/3}. \quad (20a)$$

Nagy fordulatszámnál Q_{\max} az $e' = e + s$ excentricitással számítva helyesbítendő és (4) szerint

$$\cos \zeta_{\max} = \frac{e \cos \gamma}{e + \frac{1,23}{\cos \gamma} \sqrt[3]{\left(\frac{Q'_{\max}}{E \cos \gamma}\right)^2 \frac{1+k}{2kb}}}. \quad (21)$$

Mindaddig, amíg az így számított terhelési féllívre azt nyerjük, hogy

$$\gamma < \zeta_{\max} < 3\gamma,$$

csak két golyó van terhelve, de amikor már

$$\zeta_{\max} > 3\gamma$$

akkor már két golyópár veszi át a terhelést.

b) Tetszőleges páros számú hordozó

golyó esetére végzett számítás némiképp módosul ahhoz képest, amit STRIBECK a hézagmentesnek feltételezett gördülő csapágynál páratlan számú golyókra végzett [1]. Hézagmentes állapotban ugyanis a páratlan számú hordozó golyó

is stabilisnak tekinthető, a hézag jelenlétekor azonban „keringésnél” a páros számú hordozó golyó teszi a „stabilis” helyzetet valószínűbbé, ennél fogva indokolt, hogy főképpen a páros golyószámra legyünk tekintettel.

Több golyópár esetén a deformációt létrehozó derékerő

$$N = 2(N_1 \cos \gamma + N_2 \cos 3\gamma + N_3 \cos 5\gamma + \dots), \quad (22)$$

ahol $N_1, N_2, N_3 \dots$ sorra az egyes golyópárok golyóira ható erők. (3) szerint, ahol $\gamma = 180^\circ/z$ szöveget jelentett

$$\delta_1 = s \cos \gamma;$$

$$\delta_2 = s \cos 3\gamma;$$

$$\delta_3 = s \cos 5\gamma;$$

és

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma},$$

$$\frac{\delta_3}{\delta_1} = \frac{\cos 5\gamma}{\cos \gamma},$$

de (19) szerint

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{\frac{2}{3}};$$

$$\frac{\delta_3}{\delta_1} = \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{2}{3}};$$

tehát

$$N_2 = N_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}} = N_1 \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$N_3 = N_1 \left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}} = N_1 \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{3}{2}},$$

és így

$$N = 2N_1 \left[\cos \gamma + \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{3}{2}} \cos 3\gamma + \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{3}{2}} \cos 5\gamma + \dots \right],$$

vagyis

$$N = 2N_1 \cos \gamma \left[1 + \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{5}{2}} + \dots \right]. \quad (23)$$

Ebből

$$N_1 = \frac{N}{2 \cos \gamma \left[1 + \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma} \right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos \gamma} \right)^{\frac{5}{2}} + \dots + \left(\frac{\cos(2n-1)\gamma}{\cos \gamma} \right)^{\frac{5}{2}} \right]}. \quad (24)$$

Az előbbieket szerint N_1 értékével a többi golyópárok golyóinak a terhelése is kifejezhető. A (24) egyenlet nevezőjének zárjeles többtagúját A_{ng} -vel, a terhelt golyópárok számának indexével jelölve, négy hordozó golyó esetén az egy külső golyóra eső terhelés

$$N_2 = \frac{N \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma} \right)^{\frac{3}{2}}}{2 \cos \gamma \cdot A_{2g}}, \quad (25)$$

és általában $2n_g$ hordozó esetén az n_g -edik golyópárnál az egy golyóra eső terhelés

$$N_n = \frac{N \left[\frac{\cos(2n_g-1)\gamma}{\cos \gamma} \right]^{\frac{3}{2}}}{2 \cos \gamma \cdot A_{ng}}, \quad (26)$$

ami úgy értendő, hogy

$$(2n-1)\gamma < \zeta < (2n+1)\gamma.$$

A ζ megállapítása céljából elegendő csupán az N_1 -et (24) szerint fokozatosan növekvő golyópárokra kiszámítanunk, hogy a hozzátartozó ζ_{\max} -ot és ezzel a valóban terhelt golyópárok számát a (20) és (21) szerint megállapíthassuk. A számítás akkor helyes, amikor a (24)-ben felvett terhelési ív nagysága egyezik a (21)-ből kiadódóval.

A számítás könnyebb elvégzése céljából az

$$\frac{N}{N_1} = 2 \cos \gamma \cdot A_{ng} \quad (24a)$$

arány értékeit a különböző z golyószámok és különböző n_g hordozó golyópárok esetére táblázatban állítottuk össze.

A táblázat adatait a 10. ábra szemlélteti. Figyelemre méltó, hogy kevesebb golyót tartalmazó csapágy középső golyópárja akkor is erősebben van terhelve, mint a több golyót tartalmazóé, ha egyébként a terhelési ívben mindkét csapágynál ugyanannyi a golyók száma. Így pl. amikor 6 golyó vesz részt a terhelésben, akkor a 15 golyót tartalmazó csapágynál a középső golyópár golyóira az N normál erő $1/3,54$ -ed része jut, míg $z = 30$ golyószám esetében $N_1 = N/5,09$. Ez azért van így, mert $z = 15$ összes golyószámánál a terhelési íven belül levő 6 golyó középponti szöge 120° , míg $z = 30$ -nál csak 60° , tehát a nagyobb golyószámú csapágy 6 hordozó golyója között egyenletesebben oszlik meg a terhelés, mivel az N normál erőhöz a szélső golyók reakció erői kisebb szög alatt hajlanak.

Az A_{ng} és N/N_1 értékek táblázata $2n_g$ függvényében

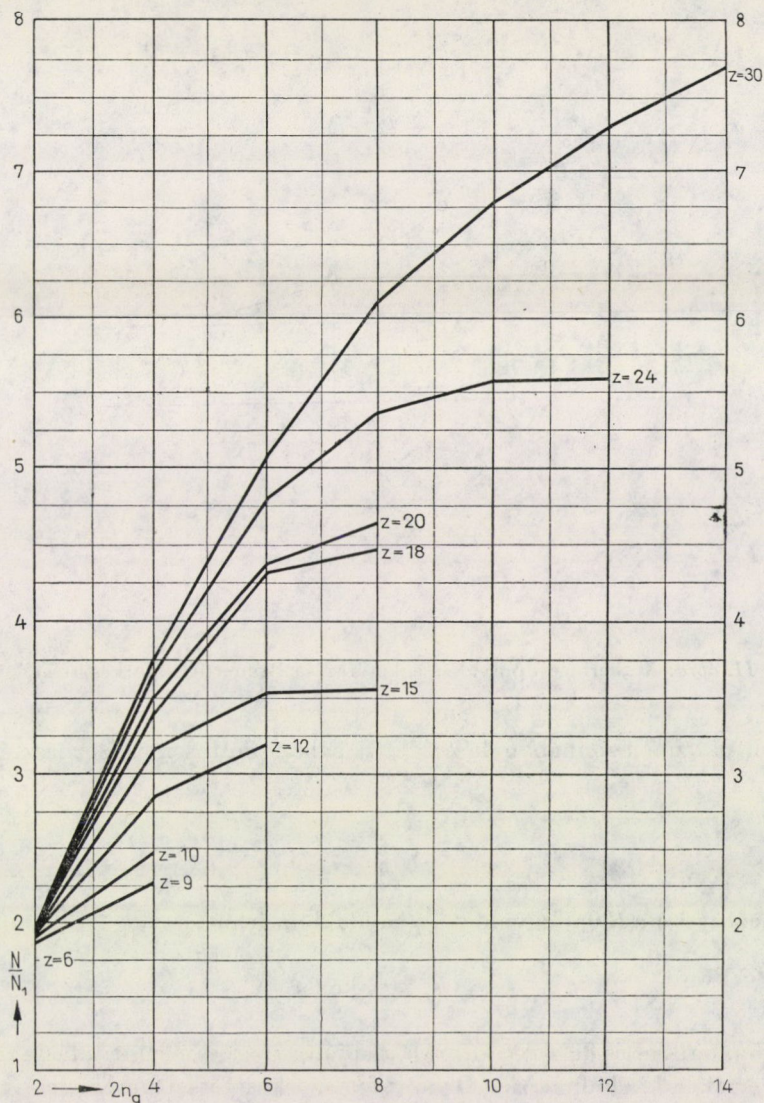
$$A_{ng} = \left[1 + \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos \gamma} \right)^2 + \dots \right] \text{ a terhelt golyópárok szerint;}$$

$N = A$ terhelés normális komponense, mely $\varphi = 0^\circ$ -nál $= Q_{\max}$;

$N_1 = A$ középső terhelt golyópár egy golyójára eső nyomás.

Golyók száma n	Fél osztásszög γ	Terhelt golyók száma $2n_g$	Az erők aránya $\frac{N}{N_1}$	A_{ng}	Félterhelési ív ξ
6	30°	2	1,73	1	30°
9	20°	2	1,88	1	20°
		4	2,27	1,335	60°
10	18°	2	1,9	1	18°
		4	2,48	1,305	54°
12	15°	2	1,94	1	15°
		4	2,85	1,457	45°
		6	3,2	1,648	60°
15	12°	2	1,96	1	12°
		4	3,18	1,622	36°
		6	3,54	1,807	60°
		8	3,55	1,810	84°
18	10°	2	1,97	1	10°
		4	3,42	1,735	30°
		6	4,33	2,196	50°
		8	4,47	2,267	70°
20	9°	2	1,976	1	9°
		4	3,5	1,777	27°
		6	4,38	2,214	45°
		8	4,65	2,355	63°
24	7°30'	2	1,98	1	7°30'
		4	3,65	1,842	22°30'
		6	4,79	2,418	37°30'
		8	5,38	2,717	52°30'
		10	5,57	2,808	67°30'
		12	5,58	2,814	82°30'
30	6°	2	1,99	1	6°
		4	3,76	1,89	18°
		6	5,09	2,594	30°
		8	6,11	3,074	42°
		10	6,8	3,342	54°
		12	7,3	3,367	66°
		14	7,7	3,387	78°

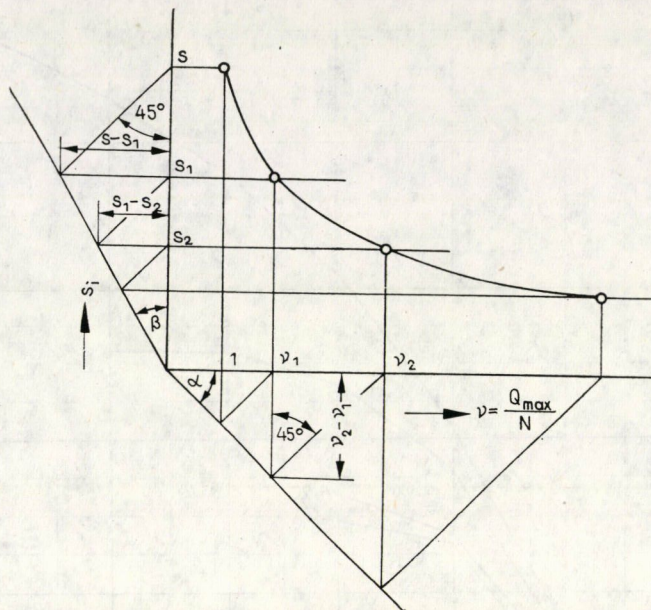
A következőkben látni fogjuk, hogy a hordozó golyók középponti szögének nagysága nemcsak a legjobban terhelt két középső golyó igénybevételét szabja meg, hanem lényeges szerepet játszik abban is, hogy a létrejövő rezgésjelenségek miképp folynak le.



10. ábra. A terhelés normális komponensének aránya a középső golyópár egyik golyójára eső nyomáshoz a hordozó golyók függvényében különböző összgolyószámoknál

VIII. A tengelyközép képzelt keringő pályája

A (20a) egyenlet minden φ szöghöz tartozó N normál erőre megadja az s_i süllyedés értékét. Ha elképzeljük, hogy valamilyen kényszer vezeték (pl. a K körül forgó kulissza) folytán O tengelyközép valóban a φ fázis szög szerint teljesen körül is keringene, és közben az N normális nyomás az O tömegpontra szabadon érvényesülne, akkor (20a) szerint a keringő pálya alakját egész pontosan meg lehetne állapítani.



11. ábra. A „keringési pálya” meghatározása Brauer-féle szerkesztéssel

Nem okozna azonban nehézséget a pálya pontos megszerkesztése sem. Ugyanis a

$$\frac{Q_{\max}}{N} = v$$

jelölést bevezetve a (20a) egyenlet ilyen alakban írható

$$s = s_1 v^{\frac{2}{3}} = \text{konst.} \quad (20b)$$

Az 5a, 6a, 7a, és 8a vektorábrák alapján az egyes φ elfordulási szögekhez tartozó v értékek kiadódnak és a Brauer-féle szerkesztéssel a megfelelő s értékek meghatározhatók.

E célból a 11. ábrában α segédszöget 45° -nak felvéve az

$$(1 + \tan \beta) = (1 + \tan \alpha)^{\frac{2}{3}}$$

egyenlet szerint β meghatározására kapjuk

$$1 + \tan \beta = 2^{\frac{2}{3}} = 1,5874,$$

és

$$\tan \beta = 0,5874; \quad \beta = 30^\circ 26'.$$

Az ábrából látható szerkesztésből kitűnik, hogy

$$\frac{s_1 - s_2}{s_2} = \tan \beta = \frac{s_1}{s_2} - 1,$$

és

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} = \tan \alpha = \frac{v_2}{v_1} - 1,$$

tehát

$$\frac{s_1}{s_2} = 1 + \tan \beta = (1 + \tan \alpha)^{2/3},$$

és

$$\frac{v_2}{v_1} = (1 + \tan \alpha),$$

vagyis a (20b) egyenletet a szerkesztés kielégíti, mert

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{2/3},$$

azaz

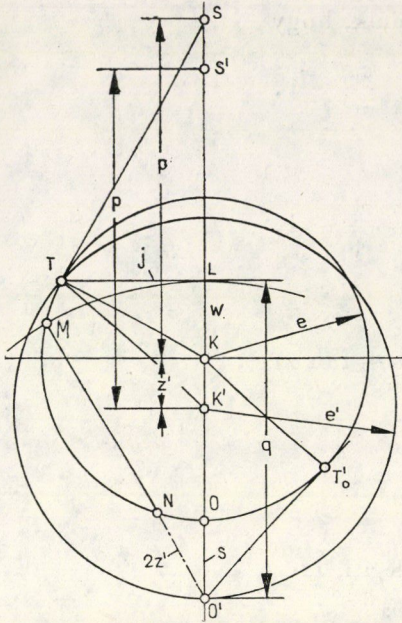
$$s_1 v_1^{2/3} = s_2 v_2^{2/3} = \dots = s = \text{konst.}$$

Az így meghatározott s_i értékeket a K középponton áthaladó φ fázis szögű sugárra az e excentricitás körétől az n normális gyorsulás irányában felmérve, nyerjük a keringési pályát. (Természetes, hogy a K ponthoz való közeledésnek csak előfeszítésnél van fizikai értelme.) A szerkesztéshez elegendő az egyetlen s kiszámítása, mivel az n gyorsulások a vektorábrákból kiadódnak.

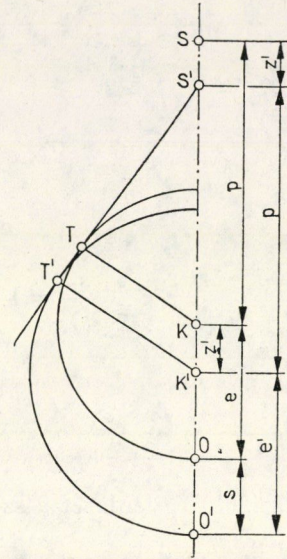
Felesleges azonban a keringési pályának ily módon való megszerkesztése, mert általánosságban — amint ezt a következő fejezetben már látni fogjuk — az O tömegpont nem követheti ezt a pályát, hanem annak csak egy egész kis ívét. Éppen ezért ezt az elméletileg pontos keringési pályát olyan körrel helyettesítjük, mely az elméleti pályához a jellegzetes pontokban tökéletesen simul. A tengely rezgő mozgásának jellemzéséhez ennek a simuló körnek kell az e' sugarát és K' középpontját ismernünk, a p pólus távolság nagysága (mivel az (8) szerint csak \bar{a} gyorsulástól, n fordulatszámától, továbbá a d belső és D külső gördülő pályától függ) változatlan marad, de saját egyenesén eltolódik $K'S'$ -be.

1. eset. $\bar{a}/c > 1$; $p > e$; S pólus a végesben.

A 12. ábra K középponttal bíró e sugarú köre a terhelés nélküli (deformáció nélküli) keringő pályát, a hozzátartozó S pólust és az ebből vont érintő T érintési pontját, valamint a deformáció folytán támadt s süllyedést tünteti fel, mint kiindulást. Ezekből az adatokból úgy kívánjuk meghatározni a defor-



12. ábra. A „keringési pálya” simuló köre (O' és T pont közös)



13. ábra. A „keringési pálya” simuló köre (O' pont és $S'T'$ érintő közös)

máció folytán létrejövő keringési pálya körének e' sugarát és K' középpontját, hogy ez a kör keresztülmenjen O' ponton, valamint a T érintési ponton, mert akkor eleget teszünk az $5a$ vektorábrában kifejezésre jutó követelménynek, hogy az O' pontban legyen a legnagyobb az s süllyedés és fokozatosan kisebbedve T pontnál már tűnjék el a deformáció.

Az ábra jelöléseivel $KK' = z'$ ismeretlent igyekszünk meghatározni, mert ezzel

$$e' = e + s - z'$$

már kiadódik.

LTK' derékszögű háromszögből

$$j^2 + (w + z')^2 = \overline{K'T}^2 = \overline{K'O}^2 = (e + s - z')^2;$$

$$j^2 + w^2 + 2wz' + z'^2 = e^2 + 2es + s^2 - 2ez' - 2sz' + z'^2;$$

$$2z'(w + e + s) = (e + s)^2 - (j^2 + w^2),$$

mivel az ábra szerint

$$j^2 + w^2 = e^2$$

és

$$w + e + s = q,$$

továbbá az $O'T_0'$ érintő hossza

$$(e + s)^2 - e^2 = \overline{O'T'}^2,$$

azért

$$2z'q = (e + s)^2 - e^2 = O'T'^2,$$

amiből az a rendkívül egyszerű szerkesztés adódik, hogy O' -ből $O'L = q$ sugárral körívet vonva és ennek e sugarú körrel való M metszés pontját O' -vel összekötve, kapjuk az N pontot, amelyre nézve

$$z' = \frac{O'N}{2},$$

a számított érték pedig fenti egyenlethől

$$z' = \frac{(e + s)^2 - e^2}{2q} = \frac{2es + s^2}{2(w + e + s)}, \quad (27)$$

ahol SKT derékszögű háromszögből

$$w = \frac{e^2}{p}, \quad (28)$$

és

$$e' = e + s - z'. \quad (29)$$

Egyszerű geometriai megfontolás szerint pedig az $O'T$ felező merőlegese metszi ki K' középpontot $O'S$ egyenesből.

A tárgyalat simuló kör nagy fordulatszám és kis deformáció esetére alkalmas. Kis fordulatszám és nagy deformáció esetén használható a 13. ábrában feltüntetett simuló kör is. Ez a kör szintén keresztülmegy O' ponton és S' pólusból vont érintője érinti az e sugarú kört is.

Az ábrában feltüntetett geometriai vonatkozásokból a K' pontot meghatározó z' eltolódás a következőképp adódik:

$$S'O' : S'K' = S'O : S'K,$$

vagyis

$$(s + e + p - z') : p = (e + p - z') : (p - z'),$$

ahonnan

$$z'^2 - z'(p + e + s) + sp = 0.$$

Az O' ponton két olyan kör megy keresztül, melyeket az S' -ből az e sugarú körhöz vont érintők érintenek, ezek közül megoldásunkat a kisebbik z' érték szolgáltatja.

$$z' = \frac{(p + e + s) - \sqrt{(p + e + s)^2 - 4ps}}{2(p + e + s)} \quad (30)$$

az

$$e' = e + s - z'$$

értéknek $s = 0$ esetén a (30) kifejezés szerint is $z' = 0$, vagyis $e' = e$ felel meg.

$$2. \text{ eset } \bar{a}/\bar{c} > 1, \quad p = \bar{a}/\omega_k^2 \rightarrow \infty$$

Ebben az esetben a normális erő abszolút értéke úgy $\varphi = 0^\circ$ -nál, mint pedig $\varphi = 180^\circ$ -nál egyformán P , tehát az e sugarú excentricitás köre *önmagával párhuzamosan* eltolódik.

$$3. \text{ eset } \bar{a}/\bar{c} = 1; \quad p = e; \quad S \text{ pólus a keringési körön.}$$

A keringési görbét

$$e' = \frac{2e + s}{2} \quad (31)$$

sugarú simuló körrel helyettesíthetjük, amelynél az eltolódás

$$z' = \frac{s}{2}. \quad (32)$$

Itt azonban kitűnik, hogy a simuló körrel való helyettesítés már kifogásolható, ha s nagy az e -hez képest, mert a keringési pálya görbületi sugarának a felső tetőpontban éppen e -nek kellene lenni, mivel a p pólustáv változatlan. A helyes pályaalak (20b) szerint adódik.

$$4. \text{ eset } \bar{a}/\bar{c}_{if} < 1; \quad p < e; \quad S \text{ pólus az } e \text{ sugarú körön belül foglal helyet.}$$

Ebben az esetben a képzelt keringési pálya a felső tetőpontban is távolodik az e sugarú körtől s_{if} -el, tehát (20a) szerint

$$s_{if} = s \left(\frac{P - C}{P + C} \right)^{\frac{2}{3}}$$

alapján meghatározzuk a felső tetőpontban fellépő s_{if} -t is, és ennek alapján

$$e' = \frac{2e + s + s_{if}}{2}, \quad (33)$$

és a keringési középpont eltolódása

$$\overline{KK'} = z' = \frac{s - s_{if}}{2}. \quad (34)$$

Megismételjük, hogy a képzelt keringési pályának simuló körrel való helyettesítése azért engedhető meg, mert általában ennek csak egy ív részlete játszik szerepet.* A következetesség kedvéért meg kell azonban említenünk, hogy az ovális keringési pálya változó görbületi sugarakat tartalmaz. Tudjuk, hogy a pólustáv mindig a görbületi kör középpontján megy keresztül. Elméleti

* Nagy pólustávnál és $\varphi = 0$ környezetében $\bar{e} = e + s$ is tekinthető simuló körnek.

szigorúsággal tekintve K középpont változását, azt kell kijelentenünk, hogy a normális erők változása által a fázisszöggel együtt változó deformáció ovális keringési pályát is eredményezhet, ami a pólustávnak nemcsak saját vonalában, hanem önmagával párhuzamos eltolódását is eredményezheti a pálya különböző sugarú görbületi körei miatt. A pólustáv nagysága ilyenkor is változatlan marad. De látni fogjuk, hogy általában e jelenség fellépését megelőzhetik más rezgés jelenségek és a görbületi sugár változása következtében fellépő pólus „táncolásra” csak igen nagy terheléseknél és fordulatszámoknál van eshetőség.

IX. A ható erők működési képe (konfigurációja)

Az előzőek szerint a saját tengelyére tökéletesen kiegyensúlyozott forgó rendszernek hézaggal bíró gördülőcsapágyban való forgásakor nemcsak a tengelyközéppontra ható erőket, hanem a tengelyközéppontnak a deformálódó golyók folytán keletkezett pályáját és az ezt megközelítő kört is ismerjük.

Vizsgáljuk meg most azt, hogy az elfordulás szögével változó *erőtér* hatása alatt milyen elmozdulások jöhetnek létre. Kétféle esetet kell megvilágítanunk: Milyen elmozdulás jöhet létre a súrlódástól függetlenül, és milyen az elmozdulás akkor, ha a görgőknek a csapágy-gyűrűkkel való súrlódását is figyelembe vesszük.

1. eset. *A pólustáv nagyobb, mint az excentricitás*

$$\frac{\bar{a}}{c} > 1, \quad p > e; \quad S \text{ pólus a végesben}$$

A 14a ábra $\varphi = 0$ helyzetben 4 hordozógolyót tüntet fel. Az ennek megfelelő fél középponti szög $\xi = 3\gamma$ és $e' = e + s - z'$ érték szerint az A és B szélső golyók vezérsugarai a

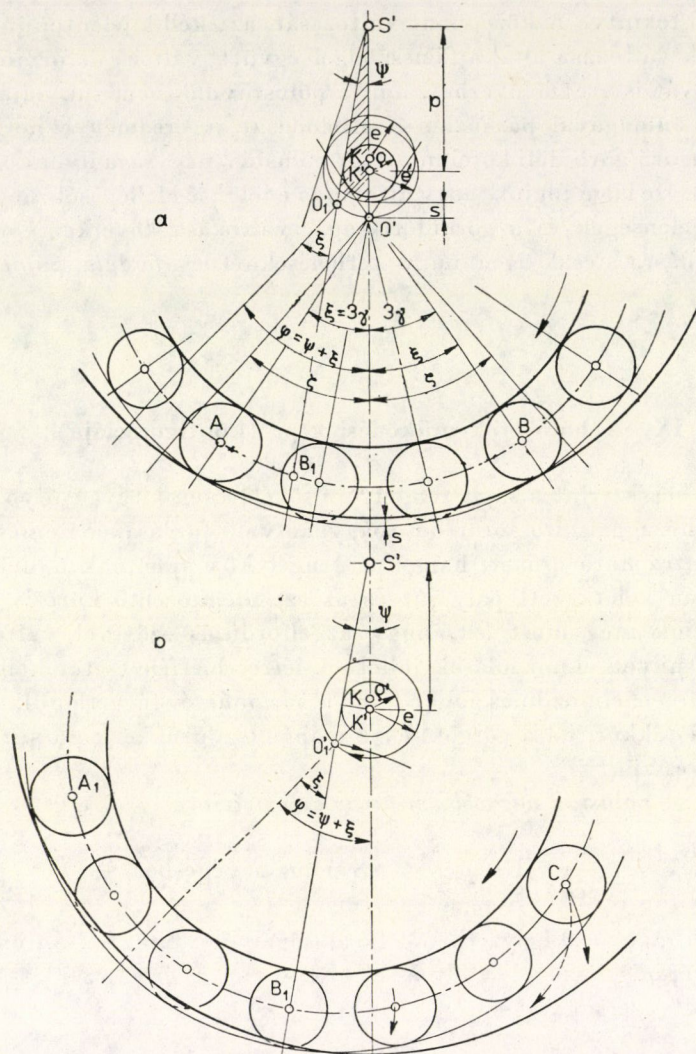
$$\varrho' = e' \sin \xi \quad (35)$$

sugarú kört érintik.

A négy hordozó golyó gördülésekor az O' helyzetű tengelyközép az e' excentricitási görbén mozdul el. Az O' helyzetű tengelyközépnek K' körüli keringési pályán történő elmozdulása közben a normális komponens csökkenése folytán előfordulhat, hogy a terhelési ív kisebb lesz és két szélső golyó felszabaddul a terhelés alól, ami maga után vonja ϱ' alapkör sugar azonnali kisebbedését. Az alapkör sugarának nagysága ugyanis szoros összefüggésben van a terhelés folytán bekövetkező deformációval és a hordozó golyók számával.

Elhanyagolhatóan kis terheléskor két érintkező golyó esetében

$$\varrho = e \sin \gamma \quad (35a)$$



14a. ábra. Hordozó golyócsoport $\varphi = 0$ helyzetben véges pólustávnál
 14b. ábra. Ugyanaz $\varphi = \psi + \xi$ billenési helyzetben

A (35) képlet szerint ϱ' a $\sin \xi$ értékkel arányosan növekszik és $2\xi = 180^\circ$ esetében, amikor a szélső hordozógolyók vezérsugarai az e' sugarú kör érintőibe mennek át,

$$\varrho'_{\max} = e' \sin \frac{\pi}{2} = e'. \quad (35b)$$

A 14a ábrában felvázolt esetben a következő mozgásjelenségek léphetnek fel:

a) A belső gyűrűnek a 4 hordozó görgőn való gördülése közben az O' tengelyközép e' sugarú körön keringő mozgást végez mindaddig, amíg a felvett fordulatirány mellett az „utolsó” B hordozó görgő vezérsugara keresztül nem megy az S' erőközponton. A golyónak ezt az új B_1 helyzetét egyszerűen úgy szerkeszthetjük meg, hogy S' pontból ϱ' sugarú alapkörhöz érintőt vonunk és ez a golyókoszorú középköréből az új B_1 golyóhelyzetet, e' sugarú excentricitás köréből pedig az új O'_1 tengelyhelyzetet metszi ki.

A 14b. ábra az új helyzetet szemlélteti az A és B golyók új A_1 és B_1 helyzetével. Ebből látható, hogy az eddigi 4 hordozó golyó nem maradhat tovább terhelés alatt, miután „utolsó” B golyója is kilép az erő $S'O'_1$ hatásvonalából és a tengelyközép O'_1 helyzetéből B_1 körül hátrafelé „billen”. E billenő mozgásban résztvesz az egész golyókosár és a következő négyes golyócsoport C golyója billenését B_1 középpontú körívvel kezdi, de eltér a körtől, mivel B golyó közben tovahalad. Ugyancsak körívvel kezdi billenését az O'_1 tengelyközép is, de pályáját ugyancsak befolyásolja a B billenési középpont elmozdulása, annyit azonban már most is láthatunk, hogy a billenés befejezésekor O tengelyközép újra az e' sugarú excentricitás görbéjére kerül.

A billenés kezdő helyzetét számítással is egyszerűen megállapíthatjuk: Az $S'K'O'_1$ háromszögben a 14b. ábra jelöléseivel

$$\varphi = \psi + \xi \quad (36)$$

és

$$\varrho' = p \sin \psi, \quad (37)$$

ahonnan a φ elfordulási szöget meghatározó ψ szög (8) és (35) tekintetbevételével

$$\sin \psi = \frac{e'}{p} = \frac{(e + s - z') \sin \xi \cdot n^2}{91\bar{a}} \left(\frac{d}{D + d} \right)^2. \quad (38)$$

A (19a) alapján megállapítható, hogy az adott terhelés mellett elfordulás közben szabadulnak-e fel golyók a terhelés alól. Ha a terhelés csökkenésekor golyók válnak tehermentessé, akkor ez s kisebbedése (38) szerint ψ szög kisebbedésével és ξ szög hirtelen kisebbedése folytán a φ fázis szög kisebbedésével jár, tehát a billenés a kiindulásul vett közép helyzettől számítva hamarabb bekövetkezik.

A billenés befejezése után az O tengelyközép keringése az e' sugarú pályán ismétlődik.

b) Lehetséges olyan terhelés, amikor a hordozó golyók ξ fél középponti szöge már közel 90° , és az O' tengelyközép keringő mozgása közben az „utolsó” hordozó golyó már nem léphet ki a ható erő mezejéből. Ilyenkor mint már említettük az alapkör ϱ' sugara megközelíti az excentricitás e' sugarát és ennél fogva ilyen terhelésnél billenés nem következhetik be.

Hézaggal bíró csúszó csapágynál [19] a tengelyközép forgás közben nyugalmi helyzetéhez képest a „keringési pályán” a forgással ellentétes irányban elfordul oly módon, hogy a hatóerő érintőleges összetevője egyenlő a súrlódási erővel [20]. Hézaggal bíró *gördülő* csapágynál a tengelyközépnek ez az elfordulása a görgők következtében a *forgásiránnyal egyértelmű* és a terhelés ingadozásakor „ringó” mozgás okozója.

Az olyan terhelési esetekben, mikor „billenés” felléphet, ez az elősietés befolyásolja a billenés kezdetét, illetőleg ringó mozgás vezetheti be a billenést.

Azt a $\bar{\varphi}$ szöveget, *melynél a visszaringás kezdődik*, kiszámíthatjuk a (13) és (14) egyenletek alapján, ha felvesszük a golyók és gördülőpálya közötti μ súrlódási tényezőt, melynek e fejezetben képletes jelentőséget tulajdonítunk és az egyes esetek összehasonlítására alkalmazzuk. (Részletesebb tárgyalása a XI. fejezetben található.)

Abban a pillanatban, amikor

$$\mu N \leq T,$$

a tengelyközép visszaringhat, tehát határesetben

$$\mu m(\bar{a} \cos \bar{\varphi} + e' \omega_k^2) = m\bar{a} \sin \bar{\varphi},$$

vagyis

$$\bar{a} \sin \bar{\varphi} - \mu \bar{a} \cos \bar{\varphi} = \mu e' \omega_k^2,$$

ahonnan

$$\frac{\sin \bar{\varphi} - \mu \cos \bar{\varphi}}{\mu} = \frac{e' \omega_k^2}{\bar{a}}.$$

Bevezetve $\bar{\varrho}$ súrlódási szöveget és a $\mu = \tan \bar{\varrho}$ összefüggést, (8) tekintetbevételével

$$\frac{\sin \bar{\varphi} \cdot \cos \bar{\varrho} - \cos \bar{\varphi} \cdot \sin \bar{\varrho}}{\sin \bar{\varrho}} = \frac{\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho})}{\sin \bar{\varrho}} = \frac{e' \omega_k^2}{\bar{a}} = \frac{e'}{p}. \quad (39)$$

Ebből következik, hogy esetünkben $\bar{\varphi} - \bar{\varrho} < \bar{\varrho}$, vagyis

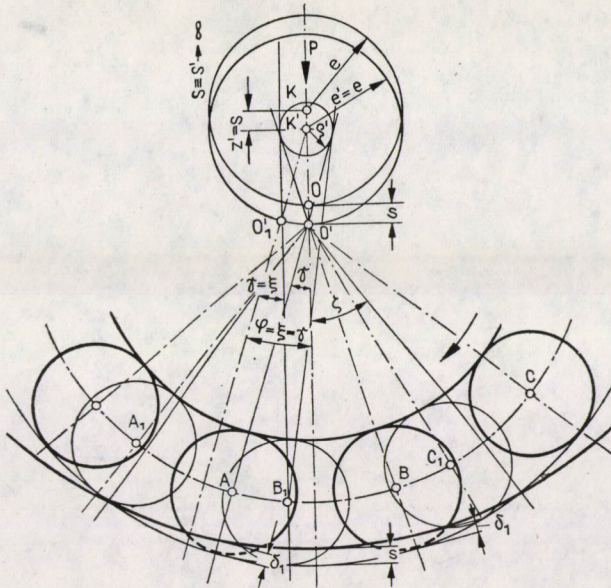
$$\bar{\varphi} < 2\bar{\varrho},$$

és (7) tekintetbevételével $\bar{\varphi}$ meghatározására a következő képletet nyerjük:

$$\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho}) = \frac{\sin \bar{\varrho}}{91} \frac{e'}{\bar{a}} n^2 \left(\frac{d}{D+d} \right)^2, \quad (39a)$$

ahol e' (29)-ből z' -nek (27)-ből, vagy (30)-ból adódó értékével számítható.

Érdemes megemlíteni, hogy egyes megfigyelések szerint a „ringó” mozgáshoz hasonló „visszazökkenések” felléphetnek lassújárátú sikló csapágyakban is [11], és bizonyos körülmények között kellemetlen rezgéseket keltenek.



15. ábra. Egy hordozó golyópár $\varphi = 0$ középhezletben és $\varphi = \gamma$ billenési helyzetben végtelen pólustávnál

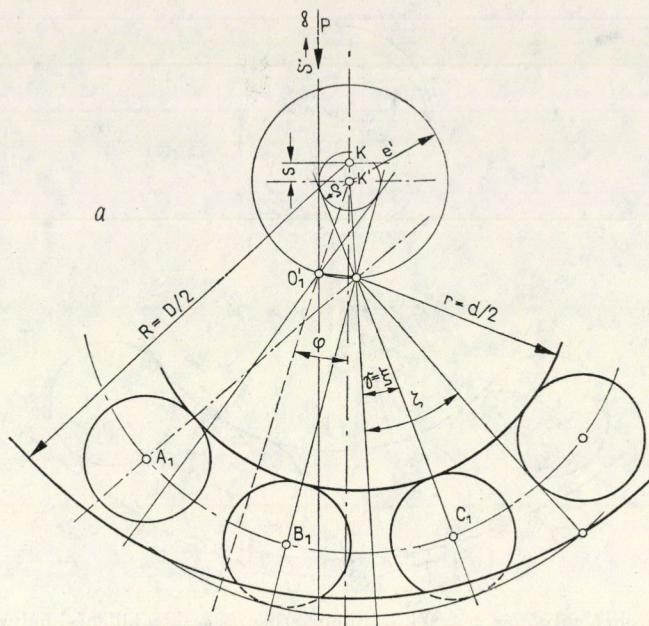
2. eset. Erőközéppont a végtelenben, $\bar{a}/\bar{c} > 1$; $p = \bar{a}/\omega_k^2 \rightarrow \infty$

Az olyan üzemviszonyok, amelyeknél a terheléshez képest igen kicsi a fordulatszám, az előző pont különleges eseteként tekinthetők. A végtelenben fekvő pólus azt jelenti, hogy P erő önmagával párhuzamosan eltolódva követi az O tengelyközeget ennek minden elmozdulásában.

a) A 15. ábra két terhelt golyót tüntet fel ennek következtében a fél terhelési szög $\xi = \gamma$. A végtelenben levő $S \equiv S'$ pontból az e sugarú körhöz vont érintők csak akkor érinthetik a K' középpontú e' sugarú kört, ha az eredeti excentricitás körét a P erő irányában önmagával párhuzamosan s süllyedési távolsággal eltoljuk. A deformáció folytán O' -be került tengelyközep csak addig keringhet B terhelt golyón, míg a golyó a tengelyközeggel együtt a P erő irányába nem esik, illetve ezt el nem haladja. A tengelyközep O'_1 és a golyó B_1 helyzetében (a jelzett fordulatirány mellett) B_1 körül billen az egész golyókoszorú a tengellyel együtt. Billenés után az A_1 helyzetbe jutott A golyó vezérsugara nem érinti többé a q' sugarú alapkört, ennek helyébe lép B_1 golyóé. B vezérsugara helyett pedig a hordozóvá vált C_1 helyzetű C -golyó vezérsugara (15a ábra). Miután közvetlen az átbillenés után a C golyó is deformálódik, a fellépő elmozdulásokra nem a ζ fél terhelési ív, hanem a ξ fél terhelési szög a jellemző.

Miután az üzemi viszonyoknak ennél az eseténél

$$\psi = 0,$$



15a. ábra. A következő hordozó golyópár átváltás után

a (36) szerint az átbillenés kezdetének a fázisszöge

$$\varphi = \xi. \quad (40)$$

b) Azt a $\bar{\varphi}$ szöget pedig, melynél a visszaringás kezdődik $\bar{\varrho}$ súrlódási szög és a (13a)-ban kifejezett normális gyorsulás, továbbá a (14)-ben kifejezett, de erre az esetre is érvényes tangenciális gyorsulás tekintetbevételével számíthatjuk. A

$$\mu \bar{n} \leq \bar{t},$$

határesetben

$$\mu \bar{a} \cos \bar{\varphi} = \bar{a} \sin \bar{\varphi},$$

ahonnan

$$\tan \bar{\varphi} = \mu = \tan \bar{\varrho}$$

és

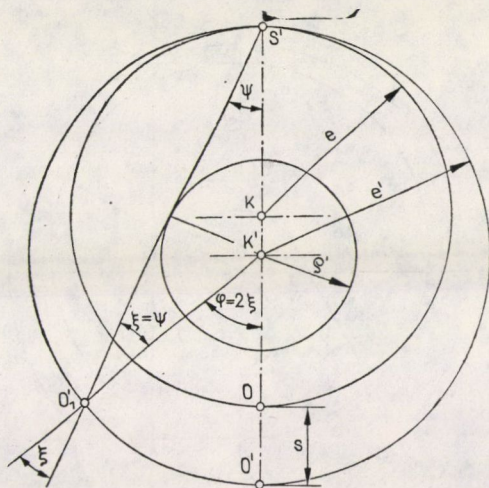
$$\bar{\varphi} = \bar{\varrho}. \quad (41)$$

3. eset. $\bar{a}/\bar{c} = 1$; $p = e$; S pólus a keringési körön

A 16. ábrában csupán a terhelés nélkül deformációmentesen érvényesülő e sugarú keringési kört, továbbá az ehhez és a keringési pályához simuló deformáció esetére érvényes e' sugarú simuló kört, valamint a ϱ' sugarú alapkört tüntettük fel.

a) Az átbillenés kezdetének φ fázisszöge az $S'K'O_1$ egyenlőszárú háromszögből egyszerű szemlélettel megállapítható; ugyanis ebben az esetben

$$\begin{aligned} \xi &= \psi; \\ \varrho' &= e' \sin \psi = e' \sin \xi, \end{aligned} \quad (42)$$

16. ábra. Keringési pálya $\varphi = \psi$ esetén (Pólus a keringési-körön)

és az átbillenés kezdetének fázisszöge

$$\varphi = 2\xi. \quad (43)$$

b) *A visszaringás* kezdetének fázisszöge a (16) és az ennél az esetenél is érvényes (14) összefüggésekből számítható az előző megfontolás alapján:

$$\mu \bar{a}(1 + \cos \bar{\varphi}) = \bar{a} \sin \bar{\varphi},$$

ahonnan

$$\frac{\sin \bar{\varphi} - \mu \cos \bar{\varphi}}{\mu} = 1.$$

Bevezetve a

$$\mu = \tan \bar{\varrho}$$

jelölést

$$\frac{\sin \bar{\varphi} \cdot \cos \bar{\varrho} - \cos \bar{\varphi} \cdot \sin \bar{\varrho}}{\sin \bar{\varrho}} = 1,$$

ahonnan

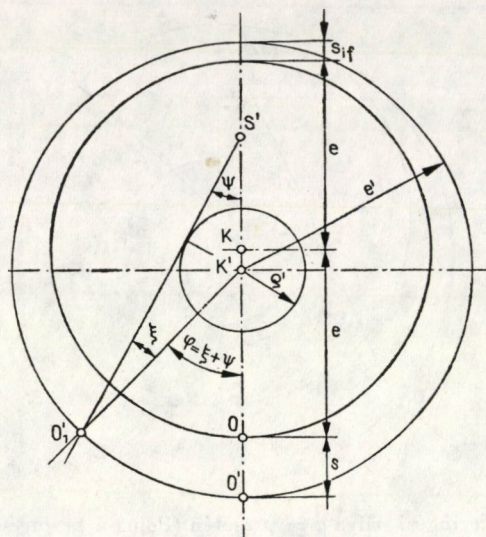
$$\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho}) = \sin \bar{\varrho},$$

amiből

$$\bar{\varphi} = 2\bar{\varrho}. \quad (44)$$

4. eset. $\bar{a}/\bar{c} < 1$; $p < e$; *S* pólus az e sugarú körön belül foglal helyet.

Ennek a fejezetnek első három pontjában azokat az üzemi viszonyokat vettük tekintetbe, melyeknél az *S* erőközpont a végtelentől az excentricitás



17. ábra. Keringési pálya (pólus a keringési körön belül)

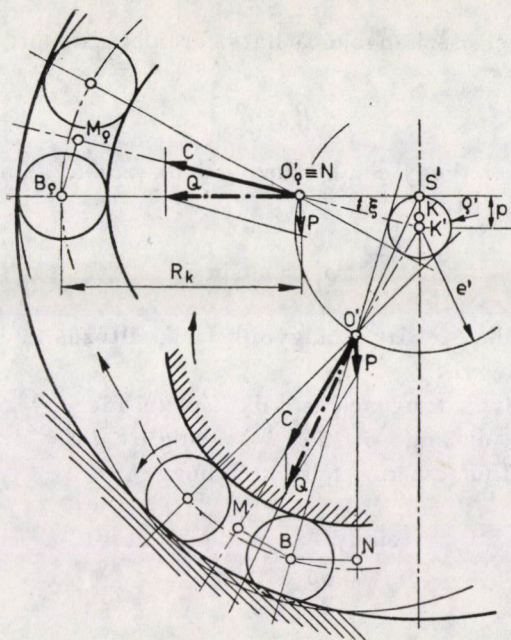
köréig vándorol. Amikor az üzemi viszonyok meghatározó adatai szerint az erőközéppontnak olyan az elhelyezkedése (konstellációja), hogy belép az e sugarú excentricitás körébe, avagy a q' sugarú alapkör belsejébe, a jelenségek a legnehezebben követhetők, pedig az üzembiztonság szempontjából esetleg éppen a legfontosabb megállapításokra volna szükség, annál is inkább, mivel a melegedés miatt éppen nagy fordulatszámoknál fontos az elegendő nagy hézag.

Talán különösnek tűnik, hogyan lehet S pólus utolsó tized mm „újtának” nagyobb jelentősége, mint a nulla-fordulatnak megfelelő végtelen helyzettől az excentricitás köréig „megtett” útjának. Gondoljuk meg azonban, hogy a golyóscsapágy működő felületeinek simaságára vonatkozó tűrések mikron nagyságrendűek, míg a sugárirányú csapágyhézag már középnagyágú csapágyaknál tized mm is lehet [14], vagyis százszor akkora mint a felületek egyenetlensége. Szinte említésre kívánkozik az a hasonlat, mintha a terepjáró kocsinak 8–10 cm-es göröngyökön kívül 8–10 méretes üregek jelenlétével is kellene számolnia.

a) *A pólus változatlan külső terhelés mellett a fordulatszám növelésekor közeledik K középponthoz (17. ábra) és a billenés szükséges feltétele, hogy*

$$\varphi = \xi + \psi,$$

ahol φ értéke a (21), (35) és (37) összefüggésekből kiszámítható. Az eddig tárgyalt 3 esetben mindig volt a keringési pályának olyan pontja, ahol a Q ható erő normális komponense eltűnt (5c, 6b, 7b ábrák), ebben az esetben a normális komponens nem tűnik el (l. 8b. ábrát), és így felvetődik a kérdés, hogy melyik az a határhelyzet, melynél a fenti szükséges feltétel semmiképpen sem



18. ábra. A határfordulatszám esete (pólus a ϱ' alapkör kerületén)

elegendő a billenés bekövetkezéséhez. Kimutatjuk, hogy ez a határhelyzet akkor következik be, amikor a pólus éppen a ϱ' sugarú alapkör kerületére esik.

A 18. ábrán a terhelt golyócsoportot feltüntettük a tengely O' helyzetében, amikor P külső erő nyomatéki karja a billenési pontnak tekinthető B golyóra BN , a C centrifugális erőé pedig BM . A további forgás folyamán a centrifugális erő karja változatlan marad, P erőé pedig nagyobbodik és annál a B_ϱ helyzetnél lesz a legnagyobb, amikor a $B_\varrho O_\varrho$ sugár merőleges P -re.

Ha P erőnek ez a legnagyobb nyomatéka sem nagyobb a centrifugális erő nyomatékánál, akkor a billenő mozgás nem jöhet létre. Ennél a helyzetnél az ábra jelöléseivel a nyomatékok egyenlőségét kifejező egyenlet:

$$PR_k = CR_k \sin \xi .$$

Ebbe behelyettesítve

$$P = m\bar{a} ,$$

és

$$C = me'\omega_k^2 = me' \frac{n^2}{91} \left(\frac{d}{D+d} \right)^2$$

értékeit, kifejezhetjük azt az n_h határfordulatszámot, amelynél már a billenés nem következhetik be:

$$n_h = 9,55 \frac{D+d}{d} \sqrt{\frac{\bar{a}}{e' \sin \xi}} = 9,55 \frac{D+d}{d} \sqrt{\frac{\bar{a}}{\varrho'}} . \quad (45)$$

A (8) képlettel összhangban a határfordulatszám ott lép fel, ahol

$$p = \varrho'.$$

Nyilvánvaló azonban, hogy ϱ' a hordozó golyók számával, illetőleg lényegében a deformációval együtt

$$\varrho' = e' \sin \xi \quad (46)$$

szerint nagyobbodik, tehát a nagyobb alakváltozás a határfordulatszám kisebbedésével jár együtt.

b) A normális és tangenciális erőik képletei megegyeznek az 1. eset (13) és (14) képleteivel, de amíg ott $\bar{a}/\bar{c} > 1$ addig itt $\bar{a}/\bar{c} < 1$.

A (39) képletből eszerint felírható, hogy

$$\frac{\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho})}{\sin \bar{\varrho}} = \frac{e'}{p} > 1,$$

amiből következik, hogy

$$\bar{\varphi} > 2\bar{\varrho}. \quad (47)$$

Nézzük, mi történik akkor, amikor $p = \varrho'$. A (35) tekintetbevételével (39) így írható $p = \varrho'$ esetén

$$\frac{\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho})}{\sin \bar{\varrho}} = \frac{e'}{p} = \frac{\varrho'}{p \sin \xi} = \frac{1}{\sin \xi}.$$

A ξ szög értéke γ -tól 90° -ig terjedhet, tehát

$$\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho}) = \sin \bar{\varrho} \dots \frac{\sin \bar{\varrho}}{\sin \gamma}.$$

A $\xi = 90^\circ$ határ esetnek $\bar{\varphi} = 2\bar{\varrho}$ felel meg, ami összhangban van (44)-el, mivel $\xi = 90^\circ$ esetén (35) szerint $e' = \varrho'$. A $\xi = \gamma$ határesetben $\bar{\varphi}$ egyértelműleg meghatározható és értéke (47) szerint nagyobb $\bar{\varrho}$ kétszeresénél, ami összhangban van azzal, hogy p további kisebbedésével egyre valószínűbbé válik a *keringés*.

A saját tengelyére vonatkozólag kiegyensúlyozott, hézaggal bíró gördülőcsapágyban forgó tömegnek eddig háromféle rezgő mozgásával találkozunk: a *billenés*, a *ringás* és a pólusnak az alapkörbe való „bevonulása” után fellépő *keringés*. Az eddigi vizsgálatok alapján az ilyenkor fellépő keringésről semmi közelebbit nem mondhatunk. A XI. fejezetben kíséreljük megállapítani, hogy ilyenkor a golyók gördülésével, vagy siklásával kell-e számolnunk.

X. A rezgési út

1. Ringási szög

Kis sugárirányú terhelésnél, avagy pusztán forgatónyomaték átvitelekor a deformáció elhanyagolható és ilyenkor az alapkör sugara az 1. és 2. ábrák szerint

$$\rho = e \sin \gamma = h \operatorname{tg} \gamma = p \sin \psi .$$

Ha a súrlódásra sem vagyunk tekintettel, akkor a ringó kilengés is elmarad és csupán a *billenő mozgás lép fel* mindaddig amíg a fordulatszám növekedése következtében a pólustávolság a ρ sugarú alapkör kerületére nem kerül. Az egyszerű geometriai szemléletből is következik, hogy a *billenő mozgás már nem jelentkezhetik, amikor a pólus-táv kisebb az alapkör sugaránál*, mert a billenési helyzet megszerkesztése azonos feladat azzal, hogy a dott S pontból érintőt húzunk a ρ sugarú körhöz, már pedig a körön belül fekvő S pont esetében nem kaphatunk valós megoldást.

A radiális terhelés fellépésekor a *deformáció* fogalmát is be kellett vezetnünk és amint láttuk, az első sorban az e sugarú keringési kör helyett az e' sugarú simulókör bevezetését tette szükségessé, *az alapkör sugara pedig megnagyobbodott*

$$\rho' = e' \sin \xi$$

értéküre, ahol ξ *kis terhelésnél még γ is lehet*, nagy terhelésnél pedig $\xi \approx 180^\circ/2$. Ez utóbbi esetben

$$\rho'_{\max} \approx e' .$$

A súrlódás fogalmának bevezetésével pedig megjelenik a $\bar{\varphi}$ *ringási* kilengés, mely végeredményben azt jelenti, hogy a *billenés* nem az előzőekben kiszerezett helyzetben *kezdődik*, hanem a *ringási* szöggel eltolódik. Amint az előzőekben láttuk ez a *ringási* szög a pólustáv függvénye és amíg a pólus a végtelentől a tengelyközép keringési pályájáig vándorol, a *ringási* szög $\bar{\varrho}$ -től $2\bar{\varrho}$ -ig nő, majd a pólustávnak további csökkenésekor a *ringási* szög tovább növekszik.

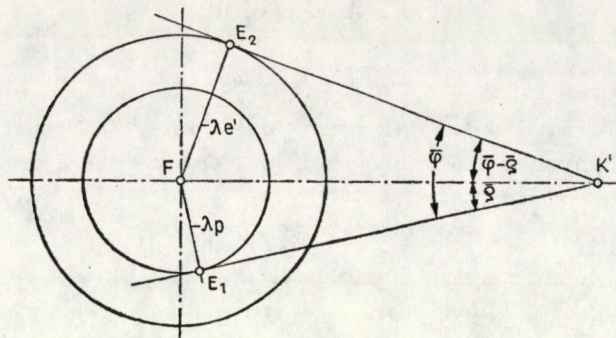
A (39) összefüggést a 19. ábra szemlélteti: A K' pontból kiinduló $\bar{\varrho}$ szög egyik szárának tetszőleges F pontjában FE_1 sugarú érintő kört rajzolunk a másik szögszárhoz majd

$$\frac{FE_1}{FE_2} = \frac{\lambda p}{\lambda e'} = \frac{p}{e'}$$

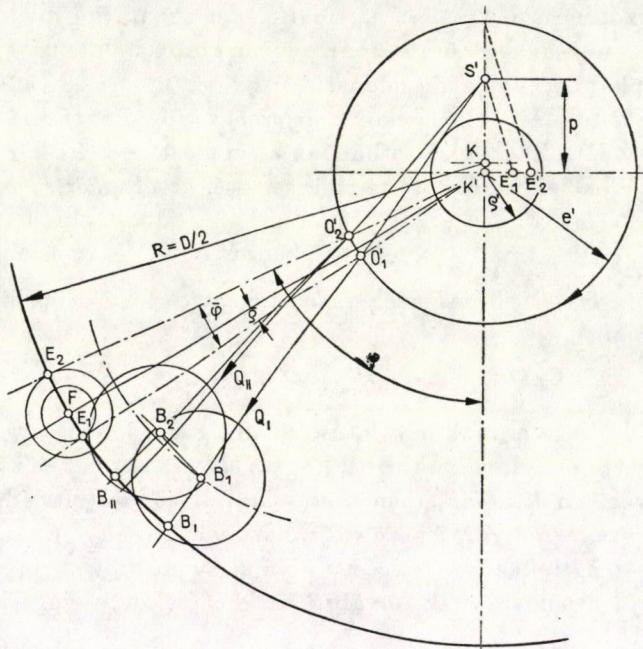
arány betartásával FE_2 sugarú kört rajzolva és ehhez K' pontból érintőt vonva, megkapjuk az

$$E_1K'E_2 = \bar{\varphi}$$

ringási szöget.



19. ábra. A súrlódási szög és ringási szög összefüggése különböző pólustávoknál



20. ábra. A ringás fázisszögének meghatározása

A ringási szög helyzetének a golyócsapágyban való megszerkesztését a 20. ábra tünteti fel: Az S' pontból a ϱ' körhöz vont érintő, mely az e' sugarú kört O_1 -ben, a külső gördülő kört B_1 -ben metszi, a súrlódás nélküli billenő helyzetnek felel meg. Ennél a helyzetnél a hordozó golyócsoport középvonala $K'O_1$, mely a külső gördülő kört E_1 -ben metszi. $\bar{\varphi}$ szög másik szárának F pontjából megrajzoljuk az FE_1 és FE_2 sugarú köröket úgy, hogy

$$FE_1 = K'E_1$$

és

$$FE_2 = K'E_2$$

legyen.

Az ábra feltünteti azt a két párhuzamos vonalat is, amellyel a

$$K'E_2 : K'E_1 = e' : p$$

arány betartását elértük. $K'E_2$ az e' sugarú körből kimetszi O'_2 pontot.

Most már $K'O'_2$ az új billenési helyzetnél a hordozó golyócsoport középvonala,

$$E_1K'E_2 \sphericalangle = O'_1K'O'_2 \sphericalangle = \bar{\varphi},$$

a ringási szög és a B golyónak a külső gördülő pályával való B_{II} új érintési pontját az ábra jelzéseivel

$$E_2B_{II} = E_1B_I$$

távolságok egyenlősége alapján kapjuk meg.

Az ábrából kitűnik az is, hogy míg az S' pólusból kiinduló és az O'_1 tömegponton áthaladó Q_1 erő áthalad a golyó B_1 középpontján, addig az $S'O'_2$ egyenesben ható erő nem halad át a B_2 helyzetű golyó középpontján és emiatt olyan forgató nyomaték keletkezik, mely éppen a súrlódási erők nyomatékával tart egyensúlyt.

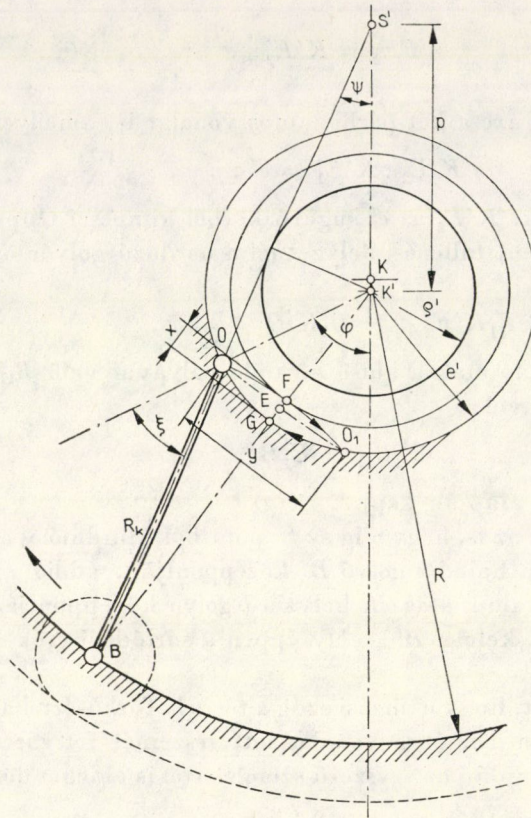
Azt a megállapítást, hogy e ringási szög a tengely forgásértelmével egyező értelemben keletkezik, a 18. ábra vonalkázott részeinél feltüntetett forgási irányokat jelző nyilak alapján az egyszerű szemlélettel is el lehet dönteni.

2. Billenési pálya

A csapágyhézag által megengedett térségen belül a gördülő csapágy tengelyének legjellegzetesebb elmozdulása a billenő pálya, mivel ez mind a deformáció mellett, mind anélkül, továbbá mind a kis, mind a nagy fordulatszámoknál fellép. Ha eltekintünk a ringó mozgástól és pusztán a billenést kívánnók leírni, akkor is bonyolult és kevésbé áttekinthető számítási eredményekre jutnánk, aminek oka abban rejlik, hogy e rezgés billenési szakaszának útgörbéjét az üzemi adatok csoportosulásának változásával más és más görbék jellemzik.

A kérdés úgy fogalmazható, hogy leírandó a súlytalan rúd egyetlen O tömegpontjának útja, amikor a rúd B pontja R sugarú körön ω_k szögsebességgel forog és az S' erőközéppont helyzete változatlan (21. ábra). Kis terhelésnél, 2 hordozó görgő esetén $\xi = \gamma$ és általában a billenés kezdetén (36) szerint $\varphi = \psi + \xi$. Az OFO_1 „billenő szakasz” után az e' sugarú körön O_1GO „vonszolási szakasz” zárja le a rezgési utat. Ha B billenési középpontot a billenés tartamára mozdulatlanak tekintjük, akkor a zárt rezgési útnak

$$OO_1 = y$$



21. ábra. A billenési pálya

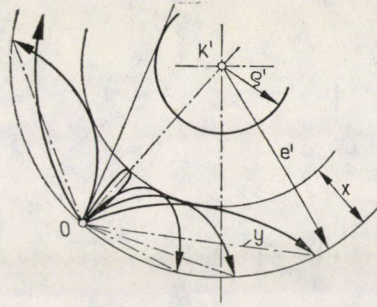
kilengésére merőleges

$$FG = x$$

kilengés F tető pontja B pontnak abban a helyzetében jelentkezik, amikor O pont együttállásban (opposícióban) van B és K' ponttal. A 23. ábrával kapcsolatban figyelembe vesszük a billenési középpont elmozdulását is.

A rezgés kezdetének φ fázis szöge pontosan meghatározható a (36) és (38) összefüggések szerint. Miután változatlan terhelés és változatlan fordulatszám mellett az S' erőközéppont sem változtatja helyét, az OFO_1 billenő szakasz minden hordozó golyócsoport váltáskor azonos görbe, tehát a szaporán következő ütések a gördülő pályának ugyanazt a helyét érik, ami a „pikkelyesedés” okozója lehet deformáció esetén éppúgy, mint kis terhelésnél a deformáció elhanyagolásakor.

Amikor B szögsebessége kicsi, a billenő szakasz B középponttal bíró körívnek tekinthető; ha ω_k szögsebesség nő (a p pólustáv csökken), akkor az y



22. ábra. Az egy kezdőpontba forgatott billenő görbék

amplitúdó előbb kisebbedik, sőt el is tűnhet, majd ellenkező irányban jelentkezik folyton nagyobbodva, míg végül a billenés helyett létrejön a *keringés*.

Az x amplitúdó előbb megtartja állandó nagyságát, még akkor is amikor y eltűnik, majd y irányváltása után fokozatosan csökken és közeledik a nullához (keringésnél).

Ha a különböző fázisszögnél keletkező képzelt billenő görbéket összehasonlítás kedvéért K' pont körül *egy kezdőpontba forgatjuk*, akkor a 22. ábrát kapjuk. Az ábra szerint x -et tetőponti y -t *ütközési* amplitúdónak nevezhetjük.

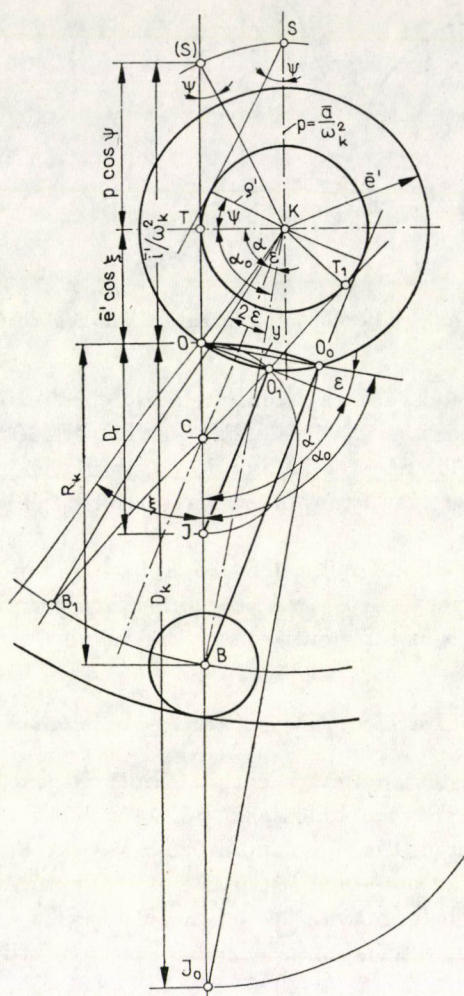
3. Az ütközési amplitúdó közelítő számítása

A különböző pólustáv mellett jelentkező billenési kezdőpontok erőit K körül egy egyenesbe forgatva a különböző pólustávoknak megfelelő ütközési amplitúdókat az SO irányú Q erőhöz különböző α szögek alatt hajló lejtőknek tekinthetjük. A 23. ábrán a ∞ -ben fekvő S pont billentő erejének vonalába történt a beforgatás. A beforgatás szöge az illető pólushoz tartozó ψ \sphericalangle . Egyszerűsítésképp az \bar{e}' sugarú kör középpontját K -ba helyeztük.

Végtelen nagy pólustávnál a billenő szakasz ideje alatt B pontot állónak képzelve, az OO_0 lejtő szakaszon megtett út ideje azonos azzal az idővel, ami az S pontból kiinduló gyorsulás hatására *szabad esésnél* az $OI_0 = D_k$ Thales-kör átmérő hosszának megtételéhez szükséges. Mivel véges nagyságú p pólustávnál ω_k lényegesen eltér a nullától, B billenési pont nem marad egy helyben, ennek folytán az ütközési amplitúdó is és a billenő szakasz ideje is csökken a végtelen pólustáv esetéhez képest. Megoldásra akkor jutunk, ha valamely tetszőleges pólustávolsághoz meghatározzuk a hozzá tartozó Thales-kör átmérőjét illetőleg a lejtő α hajlásszögét.

Valamely tetszőleges pólustáv mellett a billenés középpontjául szolgáló golyó a saját billenési BK sugárhoz képest a billenőszakaszt t tartalma alatt a 23a. ábra szerint

$$\omega_k t = 2\varepsilon = BKB_1 \sphericalangle$$

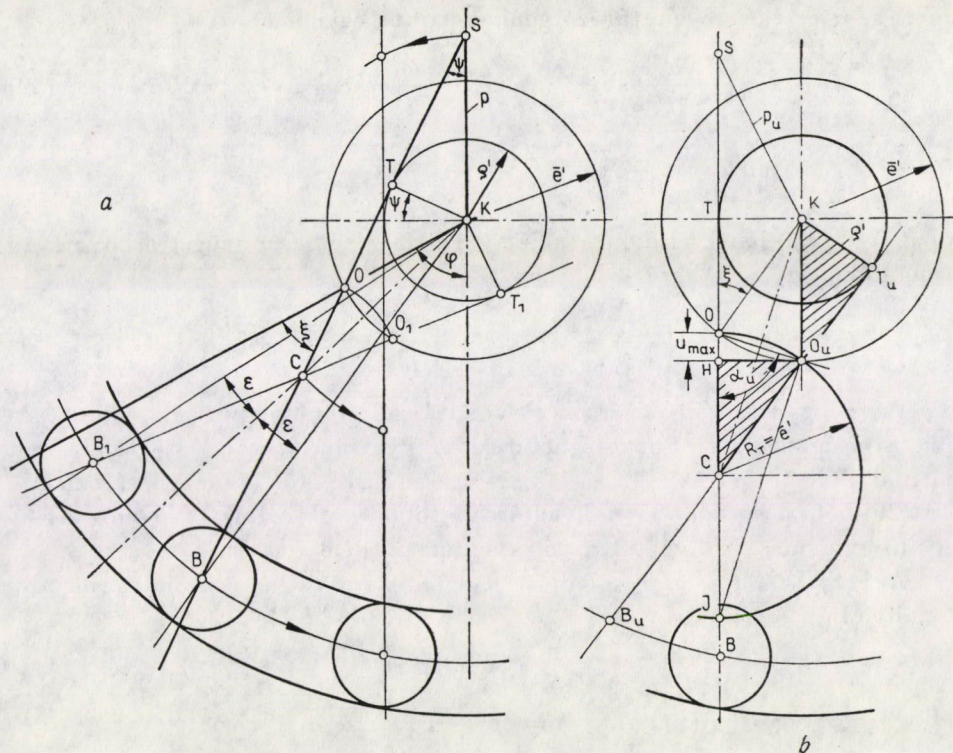


23. ábra. Az ütközési amplitúdót helyettesítő lejtő a Thales-körben

szögelfordulást végzi, ami abból következik, hogy billenés kezdetén T pontban, a végén pedig T_1 pontban érinti ρ' kört a golyó vezérsugara. A merőleges szárú szögekre vonatkozólag a 23. ábra szerint

$$BKC \sphericalangle = O_0 O O_1 \sphericalangle = \varepsilon = \alpha_0 - \alpha.$$

Feladatunk tehát abban áll, hogy az adott pólustávhoz tartozó \bar{i}' billentő gyorsulás hatása alatt $t = 2 \varepsilon / \omega_k$ idő alatt megtett szabadesési út meghatározzuk, mivel ez lesz a pólustávhoz tartozó $D_T = OJ$ Thales-kör átmérő,



23a. ábra. Az ütközési amplitúdó keletkezése a billenési középpont elmozdulásakor
 23b. ábra. A legnagyobb dinamikus hatás konfigurációja

vagyis

$$t = \sqrt{\frac{2D_T}{\bar{i}'}} = \frac{2\epsilon}{\omega_k} = \frac{2(\alpha_0 - \alpha)}{\omega_k}$$

és

$$D_T = \frac{2\bar{i}'(\alpha_0 - \alpha)^2}{\omega_k^2} \tag{48}$$

De *KTC* derékszögű háromszögből

$$CT = \frac{D_T}{2} + \bar{e}' \cos \xi = \rho' \tan \alpha,$$

ahonnan

$$D_T = 2\rho' \tan \alpha - 2\bar{e}' \cos \xi. \tag{49}$$

(48) és (49) szerint és $\rho' = \bar{e}' \sin \xi$ figyelembevételével

$$\frac{\bar{i}'}{\omega_k^2} (\alpha_0 - \alpha)^2 = \rho' \tan \alpha - \bar{e}' \cos \xi = \bar{e}' \sin \xi \cdot \tan \alpha - \bar{e}' \cos \xi,$$

vagyis az α értékét meghatározó goniometrikus egyenlet

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 - \frac{\omega_k^2}{\dot{i}'} \sin \xi \cdot \tan \alpha + \frac{\omega_k^2}{\dot{i}'} \bar{e}' \cos \xi + \alpha_0^2 = 0; \quad (50)$$

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{3} \frac{\alpha^5}{5} + \frac{17\alpha^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

sorbafejtett alakjának első két tagját véve figyelembe, α szöget a következő harmadfokú egyenlet határozza meg

$$\alpha^3 - \frac{3\bar{i}'\alpha^2}{\omega_k \varrho'} + \left(\frac{6\alpha_0}{\varrho'} \frac{\bar{i}'}{\omega_k^2} + 3 \right) \alpha - \left(\frac{3\bar{e}'}{\varrho'} \cos \xi + \frac{3\alpha_0^2 \bar{i}'}{\varrho' \omega_k^2} \right) = 0. \quad (51)$$

Az α együtthatóinak értékére vonatkozólag megjegyezzük, hogy a p pólustávolságot (8) szerint meghatározó \bar{a} gyorsulást és ω_k szögsebességet adottnak tekintjük, ξ szög (21) alapján γ tekintetbevételével meghatározható, \bar{e}' a (20)-ból, ϱ' pedig (35)-ből határozható meg. Kiszámítandó még az \bar{i}' billentő gyorsulás és a végtelen pólustávnak megfelelő α_0 szög.

Az (S) KO háromszög oldalai ω_k^2 -val szorozva a vektor háromszög oldalait adják,

$$\bar{i}' = \overline{(S)O} \cdot \omega_k^2,$$

$$(S)O = (S)T + TO = \sqrt{p^2 - \bar{e}'^2 \sin^2 \xi} + \bar{e}' \cos \xi,$$

tehát

$$\bar{i}' = \omega_k^2 (\bar{e}' \cos \xi + \sqrt{p^2 - \bar{e}'^2 \sin^2 \xi}). \quad (52)$$

Az α_0 szög KTB derékszögű háromszögből határozható meg, melynek átfogója

$$BK = \sqrt{\bar{e}'^2 + R_k^2 + 2\bar{e}'R_k \cos \xi} \approx \sqrt{R_k^2 + 2R_k\bar{e}' \cos \xi}$$

és

$$\cos \alpha_0 = \frac{TK}{BK} = \frac{\bar{e}' \sin \xi}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k\bar{e}' \cos \xi}}. \quad (53)$$

A lejtő α hajlásszögének ismeretével (48)-ból vagy (49)-ből a Thales-kör átmérője, az y ütközési amplitúdó hossza, az y útnak az \bar{i}' gyorsulás irányába eső vetülete, ennek alapján pedig az ütközési sebesség meghatározható.

Legnagyobb az y ütközési amplitúdója a végtelen pólustáv esetén és pedig OO_0J_0 derékszögű háromszögből (53) tekintetbevételével

$$y = D_k \cos \alpha_0 = \frac{2R_k\bar{e}' \sin \xi}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k\bar{e}' \cos \xi}} = \frac{2\bar{e}' \sin \xi}{\sqrt{1 + \frac{2\bar{e}' \cos \xi}{R_k}}}. \quad (54)$$

A billentő erő irányára eső vetület

$$u = y \cos \alpha_0 = D_k \cos^2 \alpha_0. \quad (55)$$

Miután a VI. fejezet 2. pontja szerint végtelen pólustávnál

$$\bar{i}' \approx \bar{a},$$

a végsebesség (55) figyelembevételével

$$v_2 = \sqrt{2\bar{i}' \cdot u} \approx \cos \alpha_0 \cdot \sqrt{2\bar{a}D_k} \quad (56)$$

és az „esési idő” illetőleg a billenési idő

$$t = \sqrt{\frac{2D_k}{\bar{i}'}} \approx \sqrt{\frac{2D_k}{\bar{a}}}. \quad (57)$$

4. A legnagyobb dinamikus hatás

Bár az (50) és (51) egyenletek a billenőszakaszra a különböző üzemi viszonyok között érvényesülő mennyiségi vonatkozásokat tartalmaznak, a jellegzetes esetek számítás nélkül a Thales-kör alapján felismerhetők.

A 23. ábrából kitűnik, hogy a legnagyobb y ütközési kilengésre az egész lassú ún. nullfordulatnál számíthatunk (54) összefüggés szerint.

A 23. és 23a. ábrából az is látható, hogy a Thales-körök között lesz egy olyan, amelynél az α_u szögű lejtőnek a billentő erőre eső u vetülete a legnagyobb, és ennél jelentkezik a legnagyobb v_2 végsebesség. Az ábra szerint ez akkor következik be, amikor a lengési amplitúdó végpontját K középponttal összekötő egyenes párhuzamos a billentő erő irányával.

A 23a ábra szerint ilyen esetben

$$CHO_u \Delta \simeq KT_u O_u \Delta,$$

mivel

$$HO_u = TK = KT_u = \rho'$$

és szögeik egyformák.

Ezért a Thales-kör sugara

$$CO = KO_u = R_T = \bar{e}'$$

és

$$u_{\max} = \bar{e}' - \bar{e}' \cos \xi = \bar{e}'(1 - \cos \xi). \quad (58)$$

A

$$D_T = 2\bar{e}'$$

Thales-kör átmérőhöz (48) szerint

$$\bar{i}' = \frac{\bar{e}' \omega_k^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)^2} \quad (59)$$

billentő gyorsulás tartozik, melyből ω_k^2 -val való osztás után a ható erők háromszögének SO oldala kiadódik

$$SO = \frac{\bar{v}'}{\omega_k^2} = \frac{\bar{e}'}{(\alpha_0 - \alpha_u)^2}$$

és az SKO háromszögből

$$\begin{aligned} SK = p_u &= \frac{\bar{a}}{\omega_k^2} = \frac{\bar{a}}{\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2 \left(\frac{d}{D+d}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\bar{e}'^2 + \frac{\bar{e}'^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)^4} - 2 \frac{\bar{e}'^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)^2} \cos \xi}, \end{aligned} \quad (60)$$

ahol HOO_u derékszögű háromszögből (58) értékével

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{HO_u}{HO} = \frac{\rho'}{u_{\max}} = \frac{\bar{e}' \sin \xi}{\bar{e}'(1 - \cos \xi)},$$

vagyis

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{\sin \xi}{1 - \cos \xi} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\xi/2)}. \quad (61)$$

Az OO_uC egyenlőszárú háromszögből

$$u_{\max} = \bar{e}' - \sqrt{\bar{e}'^2 - \rho'^2}, \quad (62)$$

vagyis

$$u_{\max} = \bar{e}' \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho'}{\bar{e}'}\right)^2}\right) = \bar{e}'(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \xi}) = \bar{e}'(1 - \cos \xi),$$

amivel a legnagyobb ütközési sebesség (59) értékével

$$v_{2\max} = \sqrt{2\bar{v}'u_{\max}} = \sqrt{\frac{2\bar{e}'\omega_k^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)} \cdot \bar{e}'(1 - \cos \xi)},$$

vagyis

$$v_{2\max} = \frac{\bar{e}'\omega_k\sqrt{2(1 - \cos \xi)}}{(\alpha_0 - \alpha_u)} = \frac{2\bar{e}'\omega_k}{(\alpha_0 - \alpha_u)} \sin \frac{\xi}{2}. \quad (63)$$

A kiindulási feltételek folytán természetes, hogy a Thales-körrel való közelítő számítás annál helytállóbb, mennél nagyobb a pólustáv és amikor a Thales-kör átmérője nullához közeledik, akkor e számítási mód elveszti jelentőségét.

XI. A csúszás esete

1. Egy hordozó golyó

A VII. fejezetben tárgyalt számítási mód, mellyel a stabilis helyzetet elfoglaló golyó-koszorú egyes golyópárjaira ható erőket meghatároztuk, módot nyújt arra is, hogy a gördülés és csúszás körülményeibe mélyebben betekint-hessünk.

A 24. ábra egyetlen golyó és a gördülő pályák deformációját annak fel-tüntetésével szemlélteti, hogy a deformáció körén nem egyenletes a terhelés eloszlás, hanem a ráfutási félkörön nagyobb, mint a lefutásin. A *hasonlóság elve alapján* feltehető, hogy minden egyes hordozó golyó belapulási körének ϑ átmérője ugyanazzal a κ konstanssal szorzandó, hogy a gördülő súrlódás f karját megkapjuk, vagyis

$$f = \kappa \vartheta,$$

ahol κ az érintkező anyagok rugalmasságától függ. Ha feltesszük, hogy a terhelés egyenletesen oszlik el a belapulás félkörén, akkor κ tényező a terhelt félkör súlypontjának karja, vagyis

$$\kappa = \frac{2\vartheta}{3\pi}.$$

Mivel a felületi nyomás a közép felé nagyobb és az érintkező anyagok rugalmassági tulajdonságaitól függően a lefutó *félkör* tehermentesítő hatása is érvényesül, a valóságban $\kappa < 0,2 \vartheta$.

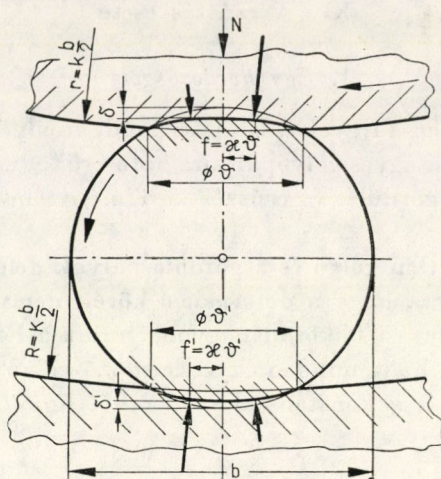
Hengeres felületek súrlódási tényezőjére a Hertz-féle egyenletek és az ebből következő geometriai vonatkozások alapján Vidéky [15] az

$$f = f_0 + 0,38 \sqrt{\frac{P'}{E} \frac{1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}}$$

összefüggést adta meg, ahol P' a hengerhossz folyó cm-ére eső nyomás f_0 pedig a rendes értelemben vett súrlódási tényező. Bár ez az összefüggés henger és kúp-görgős csapágyaknál változatlanul átvehető, golyós csapágyakra vonatkozó vizsgálatainknál, azonban elegendő annak a feltételezése, hogy az egyes hordozó golyók súrlódása arányos a belapulás átmérőjével.

Hertz egyenlete szerint a belapulás következtében keletkezett kör átmé-rője [16] az ábra jelöléseivel

$$\vartheta = 2,22 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{(b/2)r}{b/2 + r}},$$



24. ábra. A golyó és a görbülő pályák deformációja egyetlen golyónál

és

$$\vartheta' = 2,22 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{(b/2)R}{b/2 + R}}$$

Bevezetve a két domború érintkező felületnél az

$$r = (+k) \frac{b}{2};$$

és a domború és homorú felületnél az

$$R = (-K) \frac{b}{2}$$

jelölést, és tekintetbe véve, hogy

$$R_k = 2r + b = d + b = 2R - b = D - b,$$

a belapulás átmérője

$$\vartheta = 2,22 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{b}{2} \left(\frac{k}{1+k} \right)} = 1,76 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{bd}{R_k}} \quad (64)$$

és

$$\vartheta' = 2,22 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{b}{2} \left(\frac{K}{K-1} \right)} = 1,76 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{bD}{R_k}} \quad (64a)$$

A gördülő súrlódás karja

$$f = 1,76\kappa \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{bd}{R_k}} = C \sqrt[3]{\frac{Nbd}{R_k}}, \quad (65)$$

$$f' = 1,76\kappa \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{bD}{R_k}} = C \sqrt[3]{\frac{NbD}{R_k}}, \quad (65a)$$

ahol

$$C = 2,22 \sqrt[3]{\frac{1}{2E}}$$

az anyag-állandó.

2. Egy hordozó golyópár

Vizsgáljuk meg először egy hordozó golyópár esetén a csúszás feltételét (25. ábra).

Az ábra jelöléseit és a (18) alattiakat tekintetbe véve, továbbá a csúszási súrlódás tényezőjét μ -nal jelölve, a B golyóra ható

$$\mu N_1 = \mu \frac{N}{2 \cos \gamma}$$

súrlódási erő akkor képes a golyót gördíteni, ha a golyó átellenes felfekvő pontjára vonatkozó forgató nyomatéka nagyobb, mint ugyanarra a pontra vonatkozó

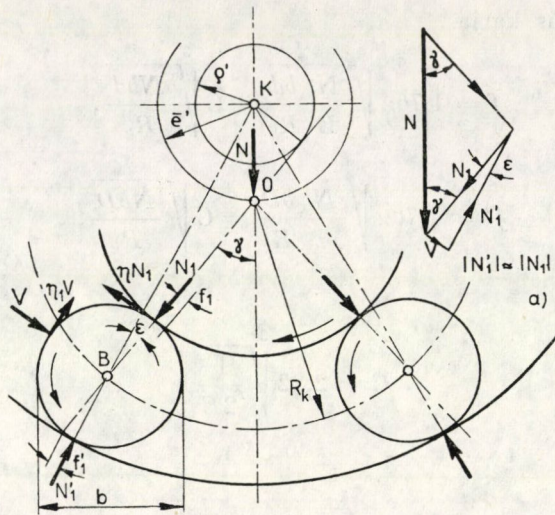
$$f_1 = C \sqrt[3]{\frac{N_1 bd}{R_k}} = C \sqrt[3]{\frac{Nbd}{2 \cos \gamma R_k}}$$

és

$$f'_1 = C \sqrt[3]{\frac{NbD}{2 \cos \gamma R_k}}$$

karokon érvényesülő gördülési ellenállás, és a μ_1 súrlódási tényezővel számított kosársúrlódás $(\mu_1 v)b/2$ nyomatéka. Mindkét golyó terhelését tekintve

$$M = 2N_1 \mu b \geq 2N_1 f_1 + 2N_1 f'_1 + 2V \mu_1 \frac{b}{2},$$



25. ábra. A csúszás feltétele egy hordozó golyópárnál
25a. ábra. Vektorábra

ahol (25a ábra)

$$V = N_1 \sin \varepsilon = N_1 \frac{e'}{BK} = \frac{N_1 \bar{e}' \sin \gamma}{\sqrt{\bar{e}'^2 + R_k^2 + 2\bar{e}' R_k \cos \gamma}} \approx \frac{N_1 \bar{e}' \sin \gamma}{\sqrt{R_k^2 + 2\bar{e}' R_k \cos \gamma}},$$

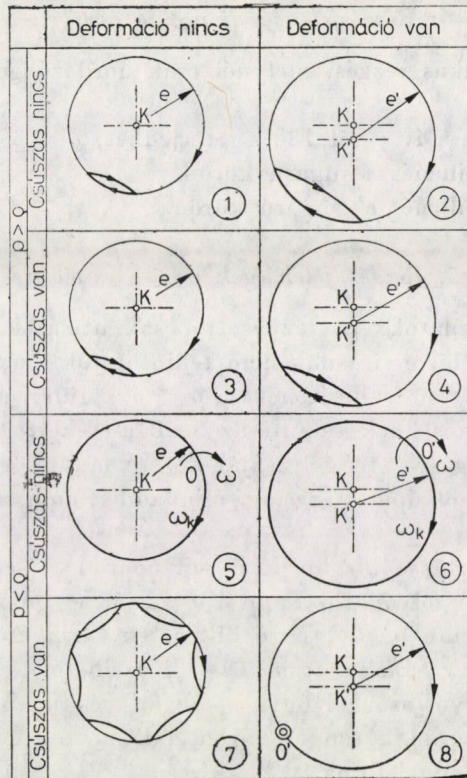
vagyis (65) (65a) és (18) figyelembevételével

$$\begin{aligned} \frac{\mu N}{2 \cos \gamma} &\geq \frac{N}{2 \cos \gamma} \frac{C}{b} \sqrt[3]{\frac{Nbd}{2 \cos \gamma R_k}} + \frac{N}{2 \cos \gamma} \frac{C}{b} \sqrt[3]{\frac{N}{2 \cos \gamma} \frac{bD}{R_k}} + \\ &+ \frac{N \mu_1 \bar{e}' \sin \gamma}{2 \cos \gamma \cdot \sqrt{R_k^2 + 2\bar{e}' R_k \cos \gamma}}. \end{aligned}$$

Tehát a gördülés feltétele

$$\mu \geq \frac{C}{b} \sqrt[3]{\frac{Nb}{2 \cos \gamma R_k}} (\sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{D}) + \frac{\bar{e}' \sin \gamma \cdot \mu_1}{R_k \sqrt{1 + \frac{2\bar{e}' \cos \gamma}{R_k}}}. \quad (66)$$

Ha pedig μ kisebb ennél az értéknél, akkor már csúszás is fellép.



26. ábra. A rezgésjelenségek különböző esetei

3. Több hordozó golyópár

Több golyópár esetén kell hogy

$$\mu(N_1 b + N_2 b + \dots) \geq N_1(f_1 + f'_1) + N_2(f_2 + f'_2) + \dots +$$

$$+ \frac{N_1 \bar{e}' \sin \gamma \mu_1}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k \bar{e}' \cos \gamma}} + \frac{N_2 \bar{e}' \sin 3\gamma \mu_1}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k \bar{e}' \cos 3\gamma}} + \dots,$$

legyen, ahol a megfelelő N értékek (26)-ból, vagy a megadott táblázat segítségével számíthatók. A kissé hosszadalmas számítás csak azt bizonyítja, hogy a csúszási határ az anyag rugalmassági tulajdonságain, és a μ, μ_1 súrlódási tényezőkön kívül a csapágy szerkezeti adataitól és a terheléstől függ.

A csúszási határ jelenlétével számot vetve, a saját tengelyére vonatkozólag kiegyensúlyozott, hézaggal bíró csapágyban forgó tömeg tengelyközepének rezgésjelenségeinél a tárgyaltak alapján a 26. ábrában feltüntetett 8 főesetet különböztethetjük meg.

4. Rezgéjelenségek $p > \rho$ esetében

1. Tiszta kinetikus rezgés, melynél csak hordozó golyópárok váltogatják egymást.
2. A fél terhelési ív γ -tól 180° -ig terjedhet, $\rho < \rho' < e'$.
3. Ringás és billenés e sugarú körön.
4. Ringás és billenés e' sugarú körön.

5. Rezgés jelenségek $p < \rho$ esetében

Az előző vizsgálatok erre az esetre csak utalásokat tartalmaznak és elméletileg helytálló bizonyításnak nem tekinthetjük, ezért a szerző — addig, amíg kísérletek fényt nem derítenek a $p < \rho$ körülmények között történő forgásra — csak sejtéseknek tekinti az 5—8 eseteket:

5. Bolygó mozgás: A tengely saját középvonala körül forogva e sugarú körön ugyanazon a golyópáron kering, mindaddig, amíg a fordulatszám nem csökken.

6. Bolygó mozgás több hordozó golyópáron $e' > e$ sugarú keringési görbén, de a hordozó golyópárok nem váltogatják egymást.

7. Csúszás folytán bekövetkező billenések keringés közben.

8. *Elegendő nagy terhelési ív mellett* elképzelhető, hogy a tengely a forgásirányában „bizonyos szöggel felviszi magát”, és a tengely középvonala e labilis helyzetben marad a tengely forgása közben. (A koszorú esetleg fél keringési fordulatszámmal forog.)

XII. A deformáció sebességének befolyása

Az előzőekben az egyszerűbb szemlélet és a tárgyalás egysége kedvéért hallgatólagosan feltételeztük, hogy az átbillenés egyformán megy végbe minden ξ szögnél. Ez azonban csak akkor lesz így, amikor a deformáció sebessége nem képes követni a ható erő változását. A valóságban csak kevés hordozó golyópár, nagy hézag és nagy fordulatszám esetén számíthatunk az ilyen „éles” átbillenésre.

Kis hézag, nagy terhelés és lassú fordulat esetén annak a golyónak, amelyik körül az átbillenés történne, van ideje, hogy a reá nehezedő terhelés hatására annyira belapuljon, hogy a következő golyó még az egész terhelt szakasz átváltása előtt részt vegyen a hordozásban. Ilyenkor az egész hordozó szakasz átbillenéséről nem is beszélhetünk, hanem csupán olyan „lebegés”-ről, mely az egyes golyóknak a terhelési szögbe való belépésével jár.

Általánosan ismert azonban az anyagnak az a sajátossága, hogy minél hirtelenebbül érik az erőhatások, annál inkább jelentkeznek a ridegség jellegzetességei. Ennélfogva várható, hogy azonos terhelés és azonos hézag mellett is „élesebbé” válik a billenés, amikor a fordulatszámot emeljük.

Elastic Vibrations in Rolling Bearings. Part I. The Rotating Mass is Balanced with Respect to its Centre Line. In the I. Part of this paper, author intends to describe to probable additional movement of the shaft centre in the meridional plane during rotation. It is remarked that the possible displacement of the shaft is limited by the clearance and by the actual deformation of both the raceway and the rolling elements. It is demonstrated that the rotating mass being balanced with respect to its centre line underlies to the action of a force that acts in a single centre. Dealing with the acceleration and forces and their components axial and tangential acting into the rotating mass, their values, for acting into the rotating mass, their values, for any phase angle, are also determined. The calculation as derived by STRIBECK for a bearing without clearance is applied to a bearing only when the loaded ball is in an unstable position. In this paper, this calculating method is extended to bearings having some loaded balls in a stable position. It is demonstrated further that the so-called „Punktlast” viz. a single point load is non-existing neither with a simplest load arrangement. On the contrary, there is a „hammering” load, acting into the outer raceway at a spot the location of which depends, up to a certain speed limit, on the phase angle determined by the instantaneous speed; the frequency of this hammering is higher than the r.p.m. of the shaft. On the other hand, the inner raceway underlies to another hammering force being in rotation the point of application of which changes round about in rapid succession, at a frequency that corresponds to the speed. It follows the description of how the tilting movement of the ball gives rise to the hammering action and also to another rocking movement to-and-fro the probability of which depends, besides, on the relative magnitude of the pole-distance as compared to the eccentricity.

Elastische Schwingungen in Wälzlagern I Teil: Die Rotierende Masse ist auf die eigene Rotationsachse ausgewuchtet. In diesem Teil der Arbeit verfolgt der Verfasser das Ziel, aufzuklären, welcher Art die verschiedenen Bewegungen sind, die unter verschiedenen Betriebszuständen vom Mittelpunkt der rotierenden Welle in der Lagerebene binnen jenen Grenzen durchgeführt werden können, die einerseits durch das Lagerspiel und andererseits durch die unter der Belastung entstehenden Verformungen bestimmt werden. — Er erbringt hier den Nachweis, daß — unter Voraussetzung einer auf die eigene Achse ausgeglichenen rotierenden Masse — der Angriffspunkt der wirkenden Kraft sich in einem einzigen Kräftemittelpunkt befindet. Da die Berechnungen von STRIBECK bei einem Lager mit Spiel nur im Falle einer Kugel in labilen Zustand anwendbar sind, hat der Verfasser diese durch einen Rechnungsgang für den Fall von Kugeln in stabilem Zustand ergänzt. Auf dieser Grundlage konnte er nachweisen, daß die sogenannte Punktlast selbst beim einfachsten Belastungsfall nicht existiert; sondern die äußere Rollbahn, bis zu einer gewissen Drehzahlgrenze, an einer durch den von der momentanen Drehzahl abhängigen Phasenwinkel bestimmten Stelle eine Hämmerung erleidet, deren Frequenz höher als die Drehzahl ist und an der inneren Rollbahn einer umlaufenden Hämmerung mit einer Drehzahl entsprechenden Frequenz ausgesetzt ist. Es wurde auch der Beweis erbracht, daß außer der die Hämmerung erregenden Schwenkbewegung des Wellenmittelpunktes auch noch eine Schaukelbewegung desselben auftreten kann, deren Phasenwinkel vom Verhältnis des Polabstandes zur Exzentrizität abhängt.