

PONTOKON TÁMASZKODÓ SZABAD PEREMŰ MEMBRÁNHÉJAK

CSONKA PÁL*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1972. március 1-én]

A dolgozat inverz eljárást ismertet tetszőleges (szabályos vagy szabálytalan) sokszög-alaprajz fölé szerkesztett peremtartó és osztóborda nélküli olyan membránhéjak tervezésére, amelyek állandó jellegű függőleges megoszló erőkkel vannak terhelve és csupán sarokpontjaikon vannak megtámasztva. A dolgozat a feladatot a membránelmélet keretében tárgyalja. A feladat peremfeltételeinek megfelelő, a héjsarkokban szingularitással bíró feszültségi állapotról indul ki. A feladat differenciálegyenletében szereplő függvények közül a héj alakját leíró függvényt tekinti ismeretlennek és azt numerikus módszerrel határozza meg. A tanulmány a javasolt eljárás alkalmazását egyenlőszárú derékszögű háromszög alaprajz fölé szerkesztett, csupán a sarkokban megtámasztott szabad peremű héjak példáján mutatja be.

1. Bevezetés

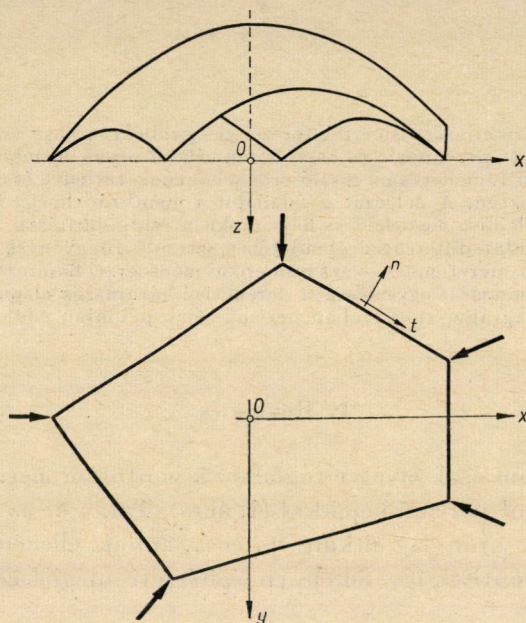
A szakirodalom csak elvétve foglalkozik pontokon megtámasztott osztóborda nélküli szabad peremű héjakkal (1. ábra). Talán ez az oka annak, hogy ilyen fajta héjakat aránylag ritkán építenek, annak ellenére, hogy alkalmazásuk több szempontból, így főképpen építészeti megjelenés szempontjából indokolt lehet.

A szabad peremű héjakban membránerőkön kívül általában hajlító- és csavarónyomatékok is keletkeznek. Ha azonban a héj középfelületének alakját a figyelembe veendő terherrendszerrel függően alkalmasan állapítjuk meg, a héjban az illető terherrendszer (vagy a vele arányos terherrendszerek) esetében semmiféle hajlító-, vagy csavarónyomaték sem jön létre. Az ilyen különlegesen alakított héjak az említett terhek esetében — de csak akkor! — teljes egészükben membránszerű, tehát a héj természetének megfelelő feszültségi állapotban vannak.

Az osztóborda nélküli, szabad peremű héjak e különleges tulajdonságára először A. PUCHER [1] mutatott rá, de nem adott semmiféle utasítást arra nézve, hogy miként lehet ilyenfajta héjakat szerkeszteni. Az efféle héjak első gyakorlati alkalmazása H. ISLER [2] nevéhez fűződik. Ő az általa tervezett héjak alakját nem elméleti megfontolásokkal, hanem empirikus úton állapította meg.

* Prof. Dr. Csonka P., 1114 Budapest, Bartók B. út 31.

A szabad peremű héjak általános peremfeltételeit, ideértve az alaprajzban ívelt peremmel bíró héjak esetét is, szerző [3] tisztázta. Ugyanő példákat mutatott be olyan membránhéjakra, amelyeknek egyes peremszakaszai teljesen szabadok [4, 5, 6]. A sarokpontokon megtámasztott szabad peremű héjak egy különleges példáját, egy derékszögű négyszög alaprajzú héj számítását J. KORDA [7] ismertette. Ő a feladatot inverz módon oldotta meg: a feladat peremfeltételeinek megfelelő, statikai szempontból lehetséges feszültségi álla-



1. ábra. Szabálytalan sokszög alaprajzú szabad peremű héj

potból indult ki, és ismerve a héjra ható terheket, az előre felvett feszültségi állapotnak megfelelő héjalakot numerikus számítással határozta meg.

A Korda-féle inverz számító eljárás alkalmazása során komoly nehézséget okoz a számítás kezdő lépésének megtétele: a feladat peremfeltételeit kielégítő feszültségfüggvény felvétele. A leküzdendő nehézségek különösen jelentősek, ha a héj alaprajzi idoma nem paralelogramma, hanem tetszőleges (szabályos vagy szabálytalan) sokszög.

Ilyen körülmények közt érdeklődésre tarthatnak számot a tetszőleges konvex alaprajzi idom fölé szerkeszthető szabad peremű héjakra vonatkozó alábbi fejtegetések (1. ábra), valamint a feladat peremfeltételeinek megfelelő feszültségfüggvény alkalmas felvételére vonatkozó javaslatok.

2. Alapösszefüggések

A függőleges megoszló erőkkal terhelt membránhéjak ismert differenciálegyenlete az 1. ábrán feltüntetett $0(x, y, z)$ derékszögű koordinátarendszerben [8, 9]:

$$z_{xx}F_{yy} - 2z_{xy}F_{xy} + z_{yy}F_{xx} + \bar{p} = 0. \quad (1)$$

Ebben a képletben $z = z(x, y)$ a héj középfelületének alakját leíró *alakfüggvény*, $\bar{p} = \bar{p}(x, y)$ a héjra ható függőleges terheknek az alaprajz területegységére vonatkoztatott fajlagos értékét kifejező *teherfüggvény*, $F = F(x, y)$ pedig a héj feszültségi állapotát jellemző *feszültségfüggvény*. Ez utóbbi az x, y irányú redukált feszítőerőkkel a következő összefüggésben áll:

$$\bar{N}_x = F_{yy}, \quad \bar{N}_{xy} = -F_{xy}, \quad \bar{N}_y = F_{xx}. \quad (2)$$

A (2) képletekhez hasonló képletekkel fejezhetők ki a héjperem mentén működő redukált feszítőerők is. Ha u_i a héj alaprajzi idomán a peremvonal normálisát n , érintőjét t betűvel jelöljük (1. ábra), akkor az n, t irányú redukált feszítőerők:

$$\bar{N}_n = F_{tt}, \quad \bar{N}_{nt} = -F_{nt}, \quad \bar{N}_t = F_{nn}. \quad (3)$$

Esetünkben a héj különleges megtámasztása folytán a sarokpontok közti peremszakaszokon

$$\bar{N}_n = 0, \quad \bar{N}_{nt} = 0,$$

és ennek megfelelőleg

$$F_{tt} = 0, \quad F_{nt} = 0. \quad (4)$$

Mindkét utóbbi feltétel teljesül, ha a sarokpontok közti peremszakaszokon a feszültségfüggvény értéke legfeljebb lineárisan változik, gradiense pedig a peremvonal mentén sarokponttól sarokpontig állandó:

$$F = A + Bt + Ct^2, \quad F_n = \text{konst.} \quad (5a)$$

Az alábbiakban az (5a) peremfeltételeket szigorítjuk, nevezetesen azt követeljük meg, hogy az egyes sokszögoldalok mentén

$$F = 0, \quad F_n = \text{konst.} \quad (5b)$$

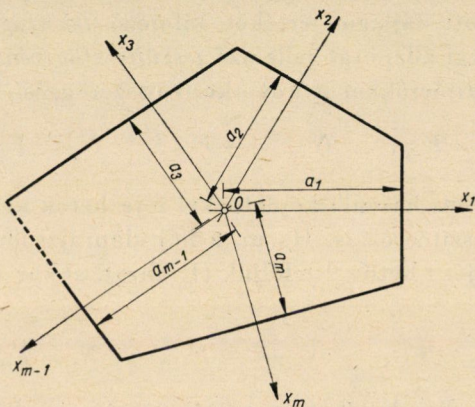
legyen.

Olyan feszültségfüggvény, amely az (5b) peremfeltételeknek megfelel, végtelen sok van, és ennek megfelelően *a feladat adott teherfüggvény esetében is végtelen sok megoldású*. Az alábbiakban e megoldásoknak csak egy egyszerű csoportjával foglalkozunk.

3. A feladat megoldása

3.1. A feszültségfüggvény

Legyen a hég alaprajzi idoma tetszőleges m oldalú konvex sokszög és bocsássunk a hég alaprajz egy tetszőleges O pontjából az alaprajzi sokszög oldalaira merőlegeseket (2. ábra). Tekintsük e merőlegeseket az illető sokszög-oldalokhoz rendelt olyan koordinátasugaraknak, amelyek közös kezdőpontja az O pont és legyen e sugarakon a haladás az O kezdőponttól a megfelelő sok-



2. ábra. Az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ koordinátasugarak

szögoldal felé irányulólag pozitív. Az egyes sokszögoldalok egyenlete a szóban forgó koordinátasugarakkal kifejezve

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, \dots, x_m = a_m.$$

Legyenek az $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ kifejezések legalább kétszer differenciálható egyváltozós függvények,

$$f_1 = f_1(x_1), f_2 = f_2(x_2), f_3 = f_3(x_3), \dots, f_m = f_m(x_m),$$

és követeljük meg, hogy ezeknek a függvényeknek az értéke az $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, \dots, x_m = a_m$ sokszögoldalak mentén rendre zérus legyen,

$$f_1(a_1) = 0, f_2(a_2) = 0, f_3(a_3) = 0, \dots, f_m(a_m) = 0. \quad (6)$$

Kössük ki továbbá, hogy a fenti függvények értéke az említett sokszögoldalaktól eltekintve sehol se legyen zérus.

Válasszuk feszültségfüggvényül az aránylag egyszerű szerkezetű

$$F = \frac{1}{c_0 + \frac{c_1}{f_1} + \frac{c_2}{f_2} + \frac{c_3}{f_3} + \dots + \frac{c_m}{f_m}} \quad (7)$$

kifejezést, amelyben a $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ értékek állandók és közülük legfeljebb c_0 egyenlő zérussal. Ez az F függvény némi átalakítás után

$$F = \frac{u}{v} \quad (8)$$

alakban írható, ahol

$$u = f_1, f_2, f_3 \dots, f_m \quad (9a)$$

$$v = c_0 u + c_1 [f_2 f_3 f_4 \dots f_m] + c_2 [f_1 f_3 f_4 \dots f_m] + \\ + c_3 [f_1 f_2 f_4 \dots f_m] + \dots + c_m [f_1 f_2 f_3 \dots f_{m-1}]. \quad (9b)$$

(Az $f_1, f_2, f_3 \dots, f_m$ függvényeket az $O(x, y)$ koordinátarendszerbe transzformálva kell képzelni).

Az F függvény képletében szereplő c paraméterek nem választhatók szabadon. Ezeknek olyan értékeket kell tulajdonítanunk, hogy a héj feszítőerői a sarokpontok kivételével mindenütt (végesek és) folytonosak legyenek, és sehol se legyen mindhárom feszítőerő egyidejűleg zérus.

A sarokpontokban, a héj egyéb pontjaitól eltérően, az F függvénynek szingularitással kell bírnia. Minthogy a héj peremén $u = 0$, a sarokpontokban a megkövetelt szingularitás csak akkor jöhet létre, ha ott az F függvény $0/0$ alakú, vagyis ha a sarokpontokban $v = 0$.

Annak igazolásául, hogy a sarokpontokban a $v = 0$ követelmény valóban teljesítve van, vegyük szemügyre az alaprajzi sokszög tetszőleges $x_i = a_i$ oldalának az $x_{i+1} = a_{i+1}$, illetve $x_{i-1} = a_{i-1}$ sokszögoldallal közös két sarokpontját. Ezek egyikében f_{i+1} , a másikában pedig f_{i-1} zérus értékű. Minthogy a (9b) képlet minden egyes tagjában vagy az f_{i-1} , vagy az f_{i+1} kifejezés szorzóként szerepel, nyilvánvaló, hogy v mindkét sarokpontban zérus. Hasonló a helyzet a többi sarokpontban is.

Természetesen, a választott F függvénynek az (5b) alatti két peremfeltételnek szintén meg kell felelnie.

Az (5b) alatti *első peremfeltétel* teljesített voltáról azonnal meggyőződhetünk, ha figyelembe vesszük, hogy az egyes sokszögoldal mentén az $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ függvények valamelyike mindig eltűnik, és így az F függvény számlálója — az u függvény — valamennyi sokszögoldal mentén zérus értékű. Minthogy ugyanekkor az F függvény nevezője — a v függvény — a sarokpontok kivételével sehol sem zérus, a számláló zérus volta azt jelenti, hogy bármely két szomszédos sarokpont közti peremszakaszon az (5b) alatti *első peremfeltétel*, vagyis az

$$F = 0$$

követelmény valóban teljesítve van.

Egyszerűen igazolhatjuk azt is, hogy a (8) alatti F függvény az (5b) alatti *második peremfeltételnek* is megfelel. Vegyük evégett szemügyre pl. az $x_1 = a_1$ sokszögoldal, és állapítsuk meg ezen sokszögoldal mentén az F függvény gradiensének az értékét. Az x_1 szerinti deriválást vessző indexszel jelölve, és figyelembe véve, hogy az $x_1 = a_1$ helyen $u = 0$, a szóban forgó gradienst így fejezhetjük ki:

$$F' \Big|_{x_1=a_1} = \frac{vu' - uv'}{v^2} \Big|_{x_1=a_1} = \frac{vu'}{v^2} \Big|_{x_1=a_1} = \frac{u'}{v} \Big|_{x_1=a_1}. \quad (10)$$

Ámde az $x_1 = a_1$ helyen $f_1 = 0$, úgyhogy

$$\begin{aligned} u' \Big|_{x_1=a_1} &= (f_1' f_2 f_3 \cdots f_m) + (f_1 f_2' f_3 + \cdots + f_m) + \\ &+ (f_1 f_2 f_3' \cdots f_m) + \cdots + (f_1 f_2 f_3 \cdots f_m') = \\ &= f_1' f_2 f_3 \cdots f_m, \end{aligned}$$

és

$$v \Big|_{x_1=a_1} = c_1 f_2 f_3 \cdots f_m.$$

Ezeknek az összefüggéseknek a figyelembevételével a (10) képlet a következőképpen alakul:

$$F' \Big|_{x_1=a_1} = \frac{f_1' f_2 f_3 \cdots f_m}{c_1 f_2 f_3 \cdots f_m} \Big|_{x_1=a_1} = \frac{1}{c_1} f_1' \Big|_{x_1=a_1}.$$

Mint hogy f_1 csak az x_1 változótól függ, az f' derivált az $x_1 = a_1$ helyen állandó, és így nyilvánvaló, hogy

$$F_1' \Big|_{x_1=a_1} = \text{konst},$$

vagyis az (5b) alatti második peremfeltétel a szóban forgó sokszögoldal mentén szintén teljesítve van. Hasonlóképpen igazolható a többi sokszögoldal mentén is, hogy az F függvény valóban megfelel a második peremfeltételnek.

3.2. A peremvonalak

A héj alakfüggvényének meghatározásához meg kell állapítani a héj peremvonalainak az alakját. Annak bemutatására, hogy ez a művelet miként hajtható végre, vegyük szemügyre az alaprajzi sokszög egyik oldalát, illetve e sokszögoldal feletti héjperemet. Ha a vizsgálandó sokszögoldal mentén a normális irányt n -nel, az érintőleges irányt t -vel jelöljük (1. ábra), az (1) differenciálegyenlet helyett ezt írhatjuk:

$$z_{nn} F_{tt} - 2z_{nt} F_{nt} + z_{tt} F_{nn} + \bar{p} = 0. \quad (11)$$

Ámde a szóban forgó sokszögoldal mentén a (4) alattiak szerint

$$F_{tt} = 0 \quad \text{és} \quad F_{nt} = 0,$$

és ezért ott a (11) differenciálegyenlet ekként egyszerűsödik [7]:

$$z_{tt} F_{nn} + \bar{p} = 0.$$

Innen

$$z_{tt} = -\frac{\bar{p}}{F_{nn}},$$

és ennek megfelelően az említett sokszögoldal feletti peremvonal egyenlete:

$$z = -\iint \frac{\bar{p}}{F_{nn}} dt \cdot dt. \quad (12)$$

3.3. Az alakfüggvény

A z függvény értékét az egyes sokszögoldaluk mentén ismerve, a héj alakját leíró alakfüggvényt az (1) differenciálegyenletnek megfelelő véges differenciaegyenletek segítségével lehet előállítani. Ez a művelet általában csak közelítő pontosságú megoldást tesz lehetővé, de az eljárás pontossága elvileg tetszőlegesen fokozható.

Felmerülhet az a kérdés, vajon a feladat differenciálegyenlete minden esetben megoldható-e, és ha igen, létezik-e egyértelmű megoldás. E kérdést illetően tudnunk kell, hogy a feladat differenciálegyenlete a sokszögoldaluk sarokpontok közötti szakaszain parabolikus, a sokszögoldalukon belül pedig a felvett F függvénytől függően elliptikus, hiperbolikus, vagy vegyes típusú. Az elliptikus esetben nyilvánvaló, hogy a feladat egyértelműen megoldható. Hasonló a helyzet akkor is, ha a differenciálegyenlet vegyes típusú ugyan, de hiperbolikus szakaszok csak a héjsarkok környezetében alakulnak ki. A parabolikus peremvonalszakaszokon ui. maga a peremvonal a karakterisztika, és így a hiperbolikus részek karakterisztikái csak a sarokpontoktól indulhatnak el és nem vezethetnek egyéb perempontokba.

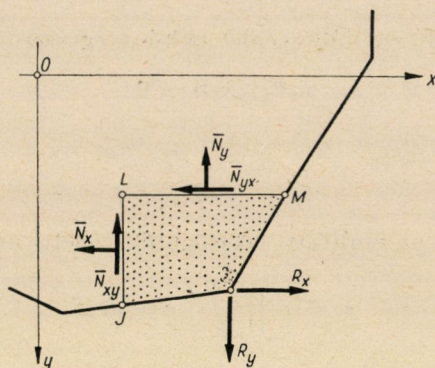
3.4. A támaszerők

A feladat teljes megoldásához meg kell még állapítanunk a héjsarkokban működő támaszerők x, y, z irányú R_x, R_y, R_z alkotóit is. Evégett egyensúlyi vizsgálatot kell végeznünk a héj alkalmasan elhatárolt olyan sarok részein, amelyek mindegyike csupán egyetlenegy sarokpontot tartalmaz. Egy ilyen JLM sarokrészletet a 3. ábrán tüntettünk fel. Itt az x irányú erőalkotókra vonatkozó egyensúlyi feltételt az

$$R_x - \int_L^J \bar{N}_x dy - \int_L^M \bar{N}_{yx} dx = 0$$

egyenlet fejezi ki. Innen a (2) összefüggések figyelembevételével a támaszerő x irányú összetevője:

$$R_x = \int_L^J F_{yy} dy - \int_L^M F_{xy} dx = F_y \Big|_L^J - F_y \Big|_L^M = F_y \Big|_M^J. \quad (13)$$



3. ábra. A héjből kimetszett sarokrész

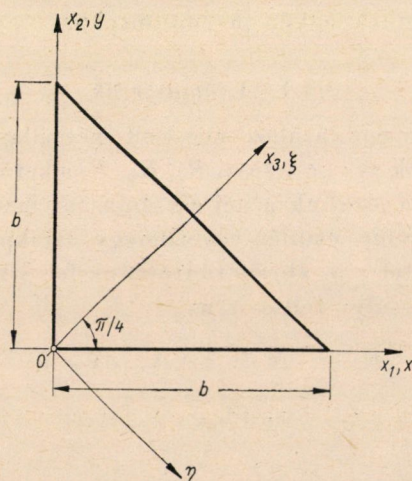
Teljesen hasonló módon számítva, az R_y támaszerő

$$R_y = \int_L^M F_{xx} dx - \int_L^J F_{xy} dy = F_x \Big|_L^M - F_x \Big|_L^J = F_x \Big|_J^M. \quad (14)$$

A támaszerő z irányú R_z összetevője a függőleges erőalkotókra vonatkozó egyensúlyi feltétel segítségével határozható meg.

4. A héj alaprajzi idoma egyenlőszárú derékszögű háromszög

Alkalmazzuk az előzőekben vázolt eljárást a 4. ábrán alaprajzban feltüntetett osztóborda nélküli, szabad peremű olyan héjra, amely csupán a három sarokpontján van megtámasztva és az alaprajz területén egyenletesen



4. ábra. A példaként tárgyalt szabad peremű héj alaprajza

megoszló

$$\bar{p} = \bar{p}_0 = \text{konst.}$$

függőleges teherrel van terhelve.

Válasszuk f_1, f_2, f_3 függvényekül az

$$f_1(x_1) = x_1,$$

$$f_2(x_2) = x_2,$$

$$f_3(x_3) = (b/\sqrt{2}) - x_3$$

kifejezéseket, és térjünk át az x_1, x_2, x_3 koordinátasugarakról az x, y derékszögű koordinátákra:

$$f_1 = x,$$

$$f_2 = y,$$

$$f_3 = b - x - y.$$

Ebben az esetben a (9) képlet szerint az u és v függvényekre az

$$u = x y (b - x - y),$$

$$v = c_0 x y (b - x - y) + c_1 y (b - x - y) + \\ + c_2 x (b - x - y) + c_3 x y$$

kifejezéseket kapjuk, az F függvényt pedig a (8) képlet szerint így szerkeszthetjük meg:

$$F = \frac{x y (b - x - y)}{(c_0 x y + c_1 y + c_2 x) (b - x - y) + c_3 x y}. \quad (15)$$

A következőkben az általánosabb esetet mellőzve csak azokkal az esetekkel óhajtunk foglalkozni, amelyekben

$$c_0 = \frac{\alpha}{K}, \quad c_1 = \frac{b}{K}, \quad c_2 = \frac{b}{K}, \quad c_3 = \frac{b}{K}. \quad (16)$$

Ezekben a képletekben α nevezetlen szám, K dimenziója pedig erő \times hosszúság. Ezekkel az értékekkel a feszültségfüggvény (15) jelű képlete így alakul:

$$F = K \frac{x y (b - x - y)}{\alpha x y (b - x - y) - b(x^2 + x y + y^2 - b x - b y)}. \quad (17)$$

A (17) képletben az α tényező nem vehető fel tetszőlegesen. Ahhoz ui., hogy a héj feszítőerői a sarokpontoktól eltekintve a héj egész terjedelmében

végések legyenek, és a héj egyetlen pontján se legyen mindhárom feszültségalkotó egyidejűleg zérus, az szükséges, hogy

$$\alpha > -4 \quad (18)$$

legyen.

4.1. *A feladat megoldása, ha $\alpha = 0$*

A szóban forgó különleges esetben a feszültségfüggvény (17) jelű képlete a következőképpen egyszerűsödik:

$$F = -\frac{K}{b} \cdot \frac{xy(b-x-y)}{x^2 + xy + y^2 - bx - by} \quad (19)$$

Ennek az F függvénynek megfelelő „feszültségfelület” a héj egész terjedelmében elliptikus.

A peremvonalak. Az $x = 0$ befogó feletti peremvonal alakja a (12) alattiak alapján felírható

$$z \Big|_{x=0} = -\bar{p}_0 \iint \frac{1}{F_{xx} \Big|_{x=0}} dy \cdot dy$$

képlet segítségével határozható meg. A szóban forgó esetben

$$F_{xx} \Big|_{x=0} = \frac{2Ky^2}{b} \cdot \frac{(-by + b^2)(b-y)}{(y^2 - by)^3} = -2K \frac{1}{y(b-y)},$$

és így

$$z \Big|_{x=0} = \bar{p}_0 \frac{1}{2K} \iint y(b-y) dy \cdot dy.$$

Az integrálást elvégezve, az $x = 0$ peremvonal egyenleteként az alábbi kifejezést kapjuk:

$$z \Big|_{x=0} = -\frac{\bar{p}_0}{24K} (y^4 - 2by^3 + b^3y). \quad (20)$$

A szóban forgó peremvonal az $y = b/2$ függőlegesre nézve szimmetrikus és ordinátája a nyílás közepén

$$z \Big|_{\substack{x=0 \\ y=b/2}} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{p_0 b^4}{K}. \quad (21)$$

Az $y = 0$ befogó feletti peremvonal a fennforgó szimmetria miatt ugyanolyan alakú, mint az $x = 0$ peremvonal.

Az $x + y = b$ átfogó feletti peremvonal alakjának meghatározásához a (19) egyenletben az x, y változók helyett

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$$

helyettesítéssel a ξ, η változókat vezetjük be. Ezekkel az új változókkal a feladat feszültségfüggvénye így fejezhető ki:

$$F = -\frac{K}{\sqrt{2}b} \cdot \frac{(\xi^2 - \eta^2)(\sqrt{2}b - 2\xi)}{3\xi^2 + \eta^2 - 2\sqrt{2}b\xi}. \quad (22)$$

Ebben az esetben

$$F_{\xi\xi} \Big|_{\xi=b/\sqrt{2}} = -16K \frac{1}{b^2 - 2\eta^2},$$

és a peremvonal alakját meghatározó összefüggés:

$$z \Big|_{\xi=b/\sqrt{2}} = - \iint \frac{\bar{P}_0}{F_{\xi\xi} \Big|_{\xi=b/\sqrt{2}}} d\eta \cdot d\eta = \frac{\bar{P}_0}{16K} \iint (b^2 - 2\eta^2) d\eta \cdot d\eta.$$

Az integrálást elvégezve, a peremvonal egyenlete:

$$z \Big|_{\xi=b/\sqrt{2}} = -\frac{\bar{P}_0}{16K} \left(\frac{\eta^4}{6} - \frac{b^2\eta^2}{2} + \frac{5}{24} b^4 \right). \quad (23)$$

A nyílás közepén

$$z \Big|_{\substack{\xi=b/\sqrt{2} \\ \eta=0}} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{\bar{P}_0 b^4}{K}. \quad (24)$$

Ez az érték a (21) alatti értékkel megegyezik, tehát a hégperem az alaprajzi háromszög mindhárom oldala felett azonos ívmagasságú.

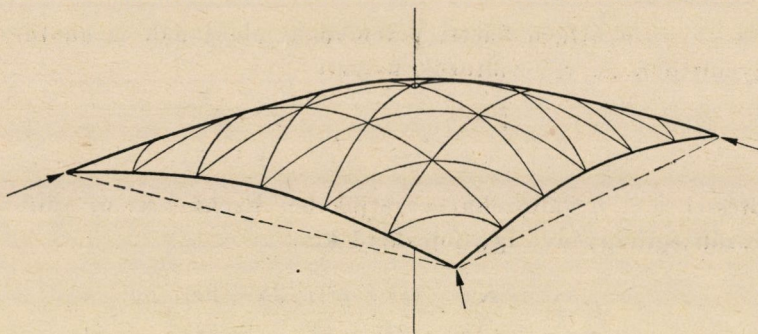
Az alakfüggvény. A hég feszültségfüggvényének a képletében a K állandóra nézve eddig semmi kikötést sem tettünk. Ennek az állandónak alkalmas felvételével a hég magassági viszonyait tudjuk szabályozni. Ha pl. azt akarjuk elérni, hogy a hég peremvonalainak ívmagassága h legyen, akkor a (21) képlet figyelembevételével K tényezőül a

$$K = \frac{5}{384} \frac{\bar{P}_0 b^4}{h} \quad (25)$$

értéket kell választanunk.

A K tényező birtokában a hég alakfüggvényének z ordinátáit a peremvonalak mentén a (20) és (23) képletek segítségével lehet megállapítani, a hég belső pontjaiban pedig az (1) differenciálegyenletet helyettesítő véges differenciaegyenletek segítségével lehet — közelítőleg — meghatározni.

Feladatunk esetében az elvégzett számítás az 5. ábrán feltüntetett hég-alakot eredményezte.



5. ábra. Egyenlőszárú derékszögű háromszög alaprajzú szabad peremű héj ($\alpha = 0$)

A támaszerők. A héjra ható terhek eredője

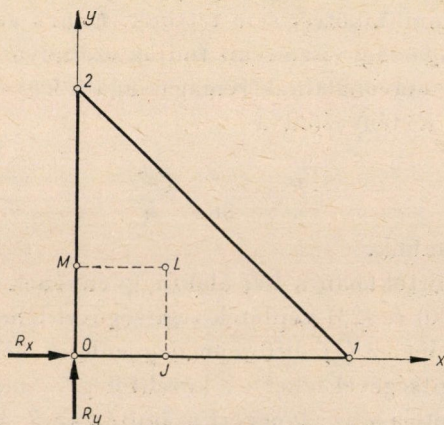
$$Q = \frac{\bar{p}_0 b^2}{2}$$

nagyságú függőleges olyan erő, amelynek hatásvonalja az alaprajzi idom súlypontján átmenő függőleges egyenes. A három támaszerő a Q eredő hatásvonalán metsződik, függőleges alkotóik nagysága egyensúlyi okokból

$$R_z = \frac{Q}{3} = \bar{p}_0 \frac{b^2}{6}. \quad (26)$$

A támaszerők x , illetve y irányú alkotója a (13), illetve (14) képletek segítségével határozható meg. Pl. az O pontbeli támaszerő x irányú alkotója a (13) képlet szerint (6. ábra)

$$R_x = F_y|_M^J = F_y|_J - F_y|_M = F_y|_J. \quad (27)$$



6. ábra. Az O pontbeli támaszerő R_x , R_y összetevői

Mint ahogy

$$F_y = \frac{Kx^2}{b} \cdot \frac{2xy + x^2 - 2bx - 2by + b^2}{(x^2 + xy - y^2 - bx - by)^2},$$

így

$$F_y|_M = \frac{Kx^2}{b} \cdot \frac{x^2 - 2bx + b^2}{(x^2 - bx)^2} = \frac{K}{b}.$$

Ezt az értéket a (27) képletbe betéve, azt találjuk, hogy

$$R_x = R_y = \frac{K}{b},$$

illetve a (25) alattiak figyelembevételével arra az eredményre jutunk, hogy

$$R_x = R_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{\bar{p}_0 b^3}{h}. \quad (28)$$

A három támaszerő metszéspontjának a $z = 0$ síktól mért h_s távolsága az

$$R_x \sqrt{2} : R_z = \frac{b}{3} \sqrt{2} : h_s$$

aránylatból határozható meg:

$$h_s = \frac{R_z b}{3R_x}.$$

Innen a (26) és (28) alattiak figyelembevételével

$$h_s = \frac{64}{15} h. \quad (29)$$

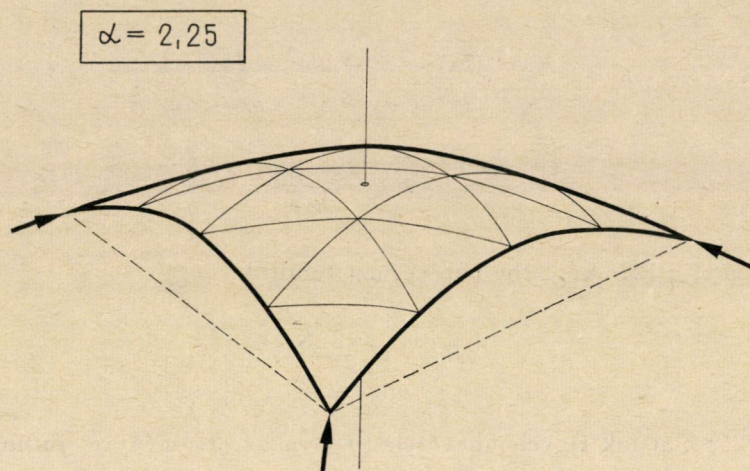
4.2. A feladat megoldása, ha $\alpha = -2,25$

Ebben az esetben a feladat feszültségfüggvénye a (17) képlet figyelembevételével így alakul:

$$F = -4K \frac{xy(b-x-y)}{9x^2y + 9xy^2 - 4bx^2 - 13bxy - 4by^2 + 4b^2x + 4b^2y}.$$

Most a feszültségfüggvény jellemezte felület vegyes típusú: a héj közepén elliptikus, a héjsarkok környezetében hiperbolikus.

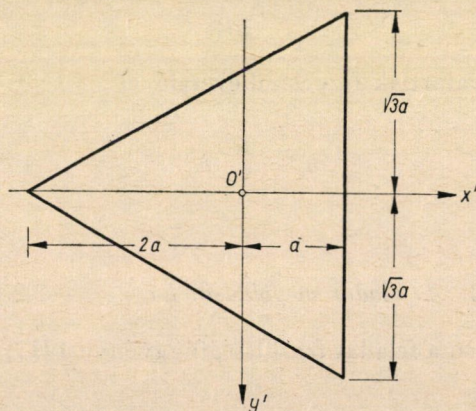
A szóban forgó példában a héj alakját a 7. ábra tünteti fel.



7. ábra. Egyenlőszárú derékszögű háromszög alaprajzú szabad peremű héj ($\alpha = -2,25$)

5. Megjegyzés

Az egyenlőszárú derékszögű háromszög alaprajz fölé szerkesztett szabad peremű héjak problémája szoros kapcsolatba hozható a hasonló módon terhelt és megtámasztott szabályos háromszög alaprajzú héjak problémájával.



8. ábra. Egyenlő oldalú háromszög alakú szabad peremű héj alaprajza

E kétféle héjfeladat feszültségfüggvénye közt ui. affin kapcsolat áll fenn, úgyhogy, ha az egyik feladat megoldása ismeretes, a másik feladat megoldása ebből affin transzformáció segítségével már egyszerűen lezármasztatható.

Szabályos háromszög alaprajz fölé szerkesztett héjak esetében a 8. ábrán feltüntetett $O'(x', y')$ koordinátarendszert célszerű bevezetni. Ebben a koordinátarendszerben a 4.1. alatt tárgyalt héjjal affin szabályos háromszög alaprajzú héjak feszültségfüggvénye

$$F = K_1 \frac{x^3 - 3xy^2 + 3ax^2 + 3ay^2 - 4a^3}{ax^2 + ay^2 - 4a^3}, \quad K_1 = \text{konst.}$$

a 4.2. alatti héjjal affin szabályos háromszög alaprajzú héjak feszültségfüggvénye pedig:

$$F = K_2 \frac{x^3 - 3xy^2 + 3ax^2 + 3ay^2 - 4a^3}{x^3 - 3xy^2 - ax^2 - ay^2 + 12a^3}, \quad K_2 = \text{konst.}$$

IRODALOM

1. PUCHER, A.: Lehrbuch des Stahlbetons. Grundlagen und Anwendungen im Hoch- und Brückenbau. Springer Verlag, Wien 1949
2. ISLER, H.: Schalen für Repräsentativ und Industriebauten. (Schalen in Beton und Kunststoff, Entwurf, Bemessung, Ausführung). Bauverlag GmbH. Wiesbaden und Berlin 1970, 97–129
3. CSONKA, P.: Special Boundary Conditions in Membrane Shells, *Concrete and Constructional Engineering* 59 (1964), 327–331, 375–377
4. CSONKA, P.: Apse-like Formed Paraboloid Shells of Revolution, *Acta Techn. Hung.* 32 (1961), 39–52
5. CSONKA, P.: Membrane Shells with Perfectly Free Edges. *Acta Techn. Hung.* 40 (1962), 151–167
6. CSONKA, P.: Composite Sectorial Shells with Cantilevered Front Side. *IASS Bulletin* No. 28. (1967), 25–36.
7. KORDA, J.: Ribless Membrane Shells with Point Supports at the Corners. Paper presented at the *International Symposium on Shell Structures in Engineering Practice*, Budapest, Hungary, 31st Aug. to 3rd Sept. 1965, Vol. I.: Design, pp. 174–190
8. PUCHER, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen. *Beton und Eisen* 33 (1934), 298–304
9. CSONKA, P.: Membranschalen, Bauingenieur-Praxis, Heft 16. Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München 1966
10. CSONKA, P.: Membrane Shells with Point Supports. *Proceedings of the IASS Pacific Symposium-Part I., Honolulu, Hawaii, October 11–15, 1971* (Sajtó alatt).

Membrane Shells with Point Supports. Paper presents a method for the designing of point supported shells enclosing an arbitrary (regular or irregular) polygonal base. The treated shells have neither ribs nor edge members (edge arches) and are only submitted to permanent loads acting in vertical direction. The problem is dealt with by using the assumptions of the so-called membrane theory. It starts out from a stress state with singularities at the corner points and considers the function describing the shape of the shell as unknown. The application of the suggested method is explained by taking as examples right angled isosceles triangular shells only supported at their corner points.

Membranschalen auf Einzelstützen. Der Aufsatz gibt ein Verfahren für die Konstruktion von Schalen bekannt, die auf Einzelstützen aufliegen und keine Rand- und Zwischenrippen besitzen. Der Grundriß der Schalen ist ein beliebiges (regelmäßiges oder unregelmäßiges) Vieleck. Als Belastung werden nur ständige, verteilte vertikale Kräfte in Rechnung gestellt. Das Problem wird im Rahmen der Membrantheorie behandelt. Verfasser geht von einem den Randbedingungen entsprechenden, in den Schalenecken Singularität aufweisenden Spannungszustand aus und betrachtet die Schalenform beschreibende Funktion als unbekannt. Die Anwendung des Verfahrens wird anhand Schalen über einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckgrundriß vorgeführt.