

KÉTRÉTEGŰ, ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖG HÁLÓZATÚ RÁCSSZERKEZET MEGOLDÁSA FOLYTONOS SZÁMÍTÁSI MODELLAL

KOLLÁR LAJOS*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

és

HEGEDŰS ISTVÁN**

(Beérkezett: 1971. június 11-én)

A dolgozat két, párhuzamos övsíkból és az őket összekötő rudakból álló olyan térbeli rácsszerkezeteket vizsgál, amelyeknek két övsíkja azonos és általános háromszög-hálózatból áll. Bemutatja a térbeli rácsszerkezet egyenértékű helyettesítő kontinuumának (síklemezének) meghatározására szolgáló módszert, megállapítja, mik a feltételei annak, hogy ez a lemez ortotróp, ill. izotróp tulajdonságú legyen, és levezeti azokat a képleteket, amelyeknek segítségével a kontinuum metszeterőiből kiszámíthatjuk a rácsszerkezet rúderőit.

1. A számítási modell megválasztásáról

A mérnöki számítások a méretezendő szerkezet sajátosságain alapuló *számítási modellen* végzett vizsgálatok. A vizsgálatok használhatósága első-sorban attól függ, hogy a felvett számítási modell mennyire pontosan tartalmazza a méretezendő szerkezet meghatározó tulajdonságait. Pontosabb és általában bonyolultabb számítási modellel több meghatározó tulajdonság hatását vehetjük figyelembe, de a méretezési munka számítási része is egyre hosszadalmasabb és összetettebb lesz.

Gyakran előfordul, hogy a számítás egyszerűsítése, esetleg a számítás elvégezhetősége érdekében tudatosan veszünk fel olyan számítási modellt, mely már alapfeltevéseiben is durvább közelítéseket tartalmaz más lehetséges számítási modelleknél. Ennek magyarázata az, hogy a közelítő alapfeltevések olyan egyszerű matematikai megoldásokat tesznek lehetővé, melyekkel a méretezés gyorsan, áttekinthetően és mérnöki szempontból elfogadható pontossággal elvégezhető. Tanulmányunk is egy ilyen számítási modell alkalmazásának kérdéseivel foglalkozik.

A mérnöki szerkezetek a méretezés során alkalmazott számítási modell jellege szerint két csoportra oszthatók.

Az egyik csoportba tartoznak a *finit számítási modell* alapján tárgyalható szerkezetek. Ezeket pontosan követhető erőjátékú elemekből összeállított szerkezeteknek tekintjük, a külső terhelés hatására a csatlakozási pontokban fellépő igénybevételek egyensúlyából illetve az elmozdulások össze-

* Kollár Lajos, Karap u. 9., 1122 Budapest.

** Hegedűs István, Bartók Béla út 82., 1113 Budapest.

férhetőségéből tudjuk kiszámítani az egész szerkezet erőjátékát, az összefüggéseket leíró lineáris egyenletrendszer megoldásával. Tipikus példái a finit számítási modellű szerkezeteknek a rácsostartók és a keretek.

A másik csoportba tartoznak a *folytonos számítási modell* alapján méretezendő szerkezetek. Ezeknél a külső és belső erők egyensúlyát, az alakváltozási elemek összeférhetőségét a folytonos szerkezetből képzeletben kivágott differenciális méretű elemen elégtjük ki. Az összefüggéseket így differenciálegyenletek írják le. Az erőjátékot a differenciálegyenlet pontos vagy közelítő megoldása szolgáltatja. Tipikus példái a folytonos számítási modellű szerkezeteknek a lemezek, a tárcsák és a héjak.

Különleges helyet foglalnak el a csoportosításban a rácsos felületek, mert mindkét alapelv szerint tárgyalhatók. Bár a rácsos tartók jellegzetesen finit számítási modellhez alkalmas szerkezetek lennének, a számításban szereplő ismeretlen statikai mennyiségek száma — a szerkezetet alkotó finit elemek nagy száma miatt — olyan nagy, hogy a finit számítási modell alkalmazásával a méretezés számítási része — terjedelmessége miatt — gyakorlatilag elvégezhetetlenné válik.

Régóta ismeretes azonban [14], hogy a sok ismétlődő elemből összeállított szerkezetek a mérnöki pontosság igényeit kielégítő módon számíthatók folytonos számítási modell segítségével is.

A folytonos számítási modell használatának alapvető követelménye, hogy ismerjük a kontinuum anyagtörvényét, azaz a feszültségek és az alakváltozások közötti összefüggést leíró egyenletrendszert (merevségi mátrixot). Az izotróp rugalmas anyagokra ez az általános Hooke-törvény alakjában írható fel. A rácsos felületek helyettesítő kontinuumja nem feltétlenül izotróp, így az anyagtörvény meghatározása a Hooke-törvényénél jóval bonyolultabb összefüggések felírását jelenti.

2. A feladat kitűzése

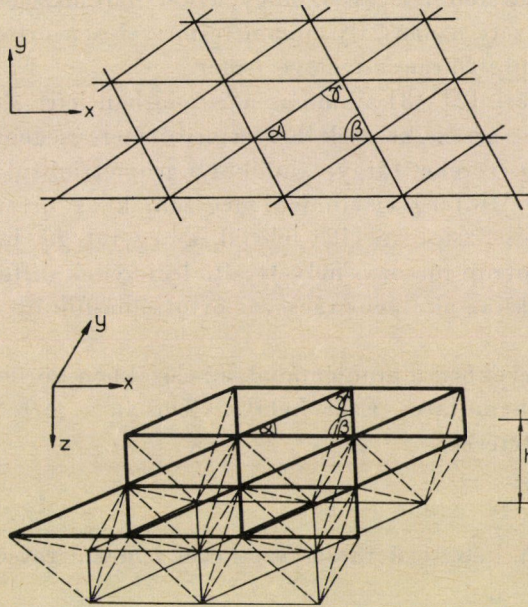
A következőkben kétrétegű rácsszerkezetek számításával fogunk foglalkozni. Így nevezzük azt a térbeli alakzatot, amelynek övrúdjai két, egymással párhuzamos ún. övfelületen helyezkednek el, s az e két felületen levő csomópontokat ferde rácsrudak kapcsolják egymáshoz. A csomópontokat csuklósnak tételezzük föl, így a rudak csak tengelyirányú erőt tudnak felvenni.

Vizsgálatainkhoz kikötjük, hogy

- a) a két övsík hálózata és rúdszelvényei azonosak legyenek,
- b) az övsíkok hálózata álljon egybevágó de általános háromszögekből, azaz az övrudak három adott iránnyal párhuzamosan fussanak, egymástól — irányonként — egyenlő távolságban,

c) az egy-egy irányban futó övrudak keresztmetszeti területe azonos legyen,

d) a két övsíkot ferde rácsrudak kössék össze oly módon, hogy az alsó hálózat egy-egy háromszögének három csúcspontjából a rácsrudak fussanak össze a felső hálózat egy-egy csúcspontjába. Így végül is minden csomópontban hat övrúd és három rácsrúd találkozik (1. ábra):



1. ábra. a) alaprajz; b) perspektív kép

Ezek a feltételek biztosítják egyrészt azt, hogy a szerkezet merev legyen, másrészt pedig, hogy az egész szerkezet hajlítási és csavarási igénybevételeiből csupán övrúderők ébredjenek. Teljesül továbbá az is, hogy az egész szerkezetre ható hajlítási igénybevételek a középfelületben nem okoznak nyúlást, a membrán-igénybevételek pedig nem okoznak hajlítási alakváltozást, végül pedig hogy a nyírási alakváltozás csupán a rácsrudak merevségétől függ.

Feladatunk az lesz, hogy meghatározzuk e szerkezet nyúlási (membrán-) merevségeit, hajlítási-csavarási (lemez-) merevségeit, és ennek alapján megállapítsuk: milyen tömör lemez lesz statikai szempontból egyenértékű a kétrétegű rácsszerkezettel. Ezen belül azt is tisztázzuk, hogy az egyenértékű lemez mikor izotróp, mikor ortotróp és mikor általánosan anizotróp (aeolotróp).

3. Az irodalom ismertetése

A kétrétegű rácsszerkezet kontinuummal való helyettesítését először WRIGHT írta le [15], mégpedig egyenlő oldalú háromszögekből álló övsíkok és mindhárom övrúdirányban azonos keresztmetszetű rudak esetére. Szabályos tetraéderekből összeállítható hálózaton mutatja be a helyettesítő — izotróp — nak tekinthető — tömör lemez merevségeinek meghatározását.

OPRAVIL [9] egyrétegű, egyenlőszárú háromszögekből álló hálózattal foglalkozott azzal a feltételezéssel, hogy a két háromszögszárnak megfelelő rudak keresztmetszete azonos. Ily módon természetesen ortotróp szerkezethez jut, és az ortotrópia főirányait eleve ismeri.

HEKI módszere [2], [3] alkalmas a 2. pontban leírt általános rácsozású egy- és kétrétegű rácsszerkezetek helyettesítő merevségeinek meghatározására, de csak olyan eseteket tárgyal, amikor a geometriai tulajdonságok (szimmetrikus rácsozás stb.) egyértelműen megszabják az ortotrópia főirányait.

RÓZSA [11] és SZMODITS [12] felírják az egyrétegű, hajlításra is merev rudakból álló aeolotróp rácsozás helyettesítő lemezének differenciálegyenletét, de ők sem térnek ki az általános rácsozás ortotrópia-főirányainak meghatározására.

Mi a következőkben a problémának az előzőkben körülírt általános megoldását kívánjuk bemutatni. Ezen belül elsősorban az ortotrópia feltételével foglalkozunk részletesen.

4. A kétrétegű rácisos szerkezet lemezmerevségei

Ismeretes [4], [5], hogy a lemezek Kirchoff-féle úgynevezett klasszikus hajlításelméletében csak a középfelülettel párhuzamos síkbeli feszültségek és alakváltozások összefüggését megadó rugalmas állandók szerepelnek. Tömör, vékony lemezek vizsgálatánál ez megengedhető, mert az elhanyagolás során végtelen nagynak feltételezett rugalmas állandók szerepe kicsiny; pontos figyelembevételük csak kis eltérést adna a klasszikus elmélet eredményeihez képest. Rácisos szerkezeteknél a helyzet nem ennyire kedvező. Egyrészt ugyanis a szerkezet helyettesítő lemezének merevségi arányai meglehetősen távol is állhatnak a vékony lemezek merevségi arányaitól, másrészt pedig bizonyos rácsozási rendszerek esetén (pl. eltérő alsó és felső övrácsozás, nem alaktartó övrácsozások stb.) a különböző igénybevételek hatására létrejövő deformációk a klasszikus lemezelméletben, sőt a tömör lemezek pontos elméletében sem szereplő új merevségi jellemzők bevezetését kívánják meg [3].

A 2. pontban leírt rácsozási rendszerünkben a síkbeli anizotrópia mellett csak a klasszikus elmélet szerint elhanyagolt nyírási alakváltozásoknak a tömör lemezekénél valamivel nagyobb volta jelenthet eltérést a Kirchoff-

féle lemezelmélethez képest, de ennek pontos figyelembevételére általában nincs szükség, mert az ilyen jellegű nyírási alakváltozások a gyakorlatban majdnem mindig teljesülő feltételek mellett a nyomatéki alakváltozástól függetlenül vizsgálhatók [10]. Elegendő tehát a Kirchoff-féle hajlításelméletben szereplő és esetünkben az összekötő rácsozástól független rugalmas állandókat („lemezerevségeket”) meghatároznunk.

4.1. Összefüggés az övfelületek nyúlási merevségei és a teljes rácsszerkezet hajlítási merevségei között

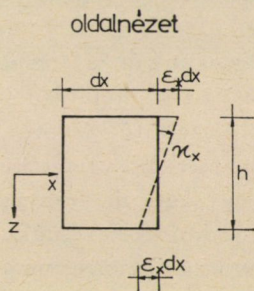
Jelölje a teljes rácsszerkezetnek megfelelő lemez hajlítási alakváltozásait jellemző értékhármast a κ vektor, a nyomatéki igénybevételeket pedig az \mathbf{m} vektor:

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}$$

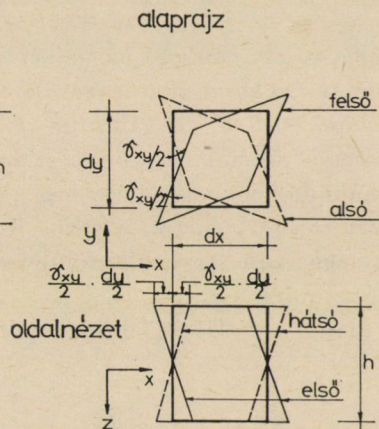
Itt $\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ és $\kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ az x ill. y irányú görbületváltozást (2a. ábra),

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \text{ az elcsavarodást,}$$

m_x és m_y az x ill. y irányú fajlagos hajlítónyomatékot,
 m_{xy} a fajlagos csavarónyomatékot jelenti;
 w pedig a középfelület lehajlása.



2/a ábra. Oldalnézet.



2/b. ábra. Alaprajz

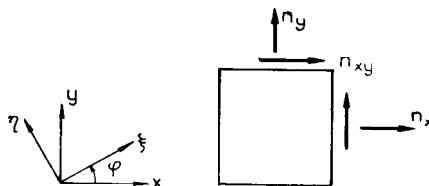
Az alakváltozások és a nyomatékok közti kapcsolatot leíró legáltalánosabb összefüggés a következő:

$$\mathbf{m} = -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\kappa} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Az egyik övfelület helyettesítő tárcsájának fajlagos alakváltozásait és metszeterőit tartalmazó vektorok közti összefüggés a legáltalánosabb esetben (1)-hez hasonló alakú lesz:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ahol ϵ_x, ϵ_y az x ill. y irányú megnyúlások,
 γ_{xy} az övsíkba eső szögtorzulás,
 n_x, n_y az x ill. y irányú derékerők az övsíkban,
 n_{xy} pedig az övsíkban ható (membrán-) nyíróerő (3. ábra).



3. ábra

Az egyenletekben szereplő \mathbf{A} ill. \mathbf{B} szimmetrikus mátrixok az övsíkok nyúlási merevségeinek, ill. a rácsszerkezet helyettesítő hajlítási merevségeinek mátrixa.

Egyszerűen megteremthető az összefüggés a két mátrix között.

Mivel merevségek meghatározásához tiszta hajlítási (ill. csavarási) alakváltozás-állapotot kell vizsgálnunk, az összekötő rácsozat a 2. pontban leírt feltételezéseink szerint igénybevétel-mentes. A nyomatékokat így a két övfelületben működő, egymással egyenlő nagyságú, ill. irányú, de ellentétes értelmű metszeterőkből tehetjük össze. Korábbi feltevésünk szerint a két övfelület merevsége azonos, így az övfelületek nyúlásai is egymással egyenlők, de ellentétes értelműek lesznek.

Vegyük alapul a felső övfelület nyúlásait és metszeterőit. Így (a 2a. ábra szerint):

$$\kappa_x = \frac{[\epsilon_x - (-\epsilon_x)] dx}{h \cdot dx} = \frac{2\epsilon_x}{h}; \quad \kappa_y = \frac{2\epsilon_y}{h},$$

illetve (2b. ábra szerint):

$$2\kappa_{xy} = 2 \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \frac{dy}{2}}{h/2} \cdot \frac{2}{dy/2} = \frac{2}{h} \cdot \gamma_{xy}.$$

Az egyenletekben h a rácsszerkezet övsíkjainak távolsága.

Az alakváltozások közti összefüggéshez hasonló az igénybevételek közti összefüggés: ha a felső övfelület membrán-metszeterőit ($-h$ -val szorozzuk, éppen a hajlító- ill. csavarónyomatékokat kapjuk meg.

Végső soron tehát:

$$\kappa = \frac{2}{h} \cdot \epsilon \quad (3a)$$

és

$$m = -hn, \quad (3b)$$

és ha (3a, b)-t (2)-be helyettesítjük és összevetjük (1)-gyel, kitűnik, hogy

$$B = \frac{h^2}{2} A. \quad (4)$$

Elegendő tehát egy övfelület A nyúlási merevségi mátrixát meghatározunk, mert (4) értelmében ez meghatározza a B hajlítási merevségi mátrixot is.

4.2. Egy övfelület merevségi viszonyai; síkbeli anizotrópiák

A nyúlási merevségek A mátrixa a (2) alakban felírva az általános (síkbeli) anizotrópia — aeolotrópia — esetének felel meg. Ebben a legáltalánosabb esetben is — az idegen munkák egyenlőségére vonatkozó reciprocitási tétel következtében — *szimmetrikus a merevségi mátrix:*

$$A^* = A,$$

mégpedig tetszőleges helyzetű koordinátarendszerben. Az egymástól különböző mátrixelemek száma így maximum 6. A későbbiekben látni fogjuk, hogy bizonyos esetekben az egymástól függetlenül felvehető elemek száma jóval kevesebb, esetleg csak egyetlenegy. Az anyagtörvényt leíró mátrix struktúrájából egyébként elég nehéz közvetlen következtetéseket levonni az anyagtörvény milyenségére, mert a mátrix-elemek — az izotrópia esetét kivéve — az alapul vett koordinátarendszer irányától függően változnak.

A síkbeli *aeolotrópia* esetében is találhatunk olyan, egymásra nem merőleges ξ, η, \dots irányokat, melyek egyikével párhuzamosan felvett x vagy y koordinátarendszerben $A_{13} = 0$ vagy $A_{23} = 0$ adódik. Ezeket az irányokat kitüntetett merevségi mátrixuk miatt merevségi főirányoknak is tekinthetjük.

Az anizotrópia speciális esete az *ortotrópia*, amikor ξ és η egymásra merőleges irányok. Ilyenkor a megfelelő helyzetű koordinátarendszerben felírt A

mátrix A_{13} és A_{23} eleme egyszerre válik zérussá. Az ortotrópia feltétele tehát az, hogy $\xi \perp \eta$ és $x \parallel \xi, y \parallel \eta$ esetén $A_{13} = A_{23} = 0$ legyen [1], [6], [7], [13].

Végül az *izotrópia* feltétele az, hogy az $A_{13} = A_{31}$ és $A_{23} = A_{32}$ mátrix-elemek a koordinátarendszer felvételétől függetlenül zérussal legyenek egyenlők. Ehhez az szükséges, hogy az A mátrix invariáns legyen az alapul vett derékszögű koordinátarendszer elforgatásával szemben [1].

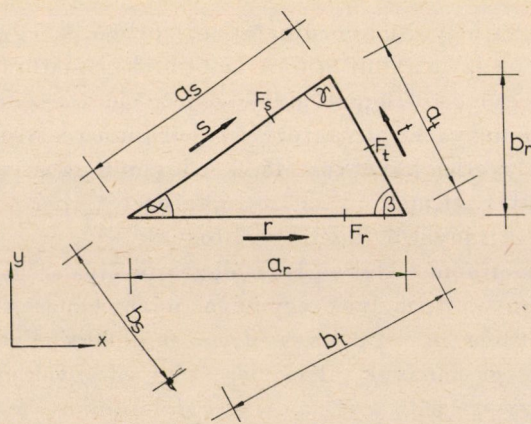
Az anizotrópia általános a kristályos szerkezetek körében, az ortotrópia a magasabb kristálytani osztályokba sorolt anyagok sajátossága. Az amorf vagy mikroszkópicusan rendezetlen anyagok izotrópnak tekinthetők.

A merevségi mátrix felírása, majd különböző irányú koordináta-rendszerekbe történő átírása útján meghatározhatjuk tehát a főirányok relatív helyzetének, ill. a főirányú koordináta-rendszerben felírt mátrix elemeinek vizsgálata alapján a kontinuum szilárdsági jellemzőit és az izotrópia vagy az ortotrópia feltételeinek teljesülését.

4.3. Az övsíkok helyettesítő kontinuum (tárcsája)

A helyettesítés elve legyen a következő: Hozzunk létre az övsík peremein a csomópontokra ható erőrendszerrel egy homogén rúd-erőjátékot (amikor is minden egyirányú rúdban ugyanakkora rúderő ébred). A rudak hosszváltozásával megváltozik a csomópontok távolsága, és valamilyen szabályosság szerint eltorzul az eredeti háromszög-rendszer. A helyettesítő folytonos tárcsa az lesz, amelyre az előzővel egyenértékű megoszló erőrendszert működtetve a kialakuló homogén feszültségállapot következtében létrejövő alakváltozások a lemezre felrajzolt rácsrendszernek az eredeti rácsrendszerével megegyező eltorzulását okozzák.

A 4. ábra szerinti r, s és t irányú rudak fajlagos megnyúlásának tehát meg kell egyeznie a helyettesítő kontinuum $\varepsilon_r, \varepsilon_s$ és ε_t megnyúlásaival, az r, s és



4. ábra

t irányú rudak S_r , S_s és S_t rúderőinek eredője pedig minden metszett felületen egyenértékű kell legyen a helyettesítő kontinuum megfelelő metszett felületén működő belső erők eredőjével.

Mivel az anyagtörvényt a leggyakrabban egy derékszögű koordináta-rendszerben értelmezett n_x , n_y és n_{xy} belső erőrendszer és az ugyanebben a rendszerben értelmezett ε_x , ε_y és γ_{xy} alakváltozási rendszer elemei között fennálló összefüggés formájában adjuk meg, az S_r , S_s és S_t rúderők és az ε_r , ε_s és ε_t megnyúlások közötti összefüggések nem jellemzik szemléletes módon a helyettesítő kontinuum szilárdsági tulajdonságait, de ezekből kell kiindulnunk:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{S_r}{EF_r} \\ \varepsilon_s &= \frac{S_s}{EF_s} \\ \varepsilon_t &= \frac{S_t}{EF_t} \end{aligned} \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_A = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{s}$$

A mátrix-összefüggés formájában felírt (5) egyenletrendszerből ($\boldsymbol{\varepsilon}_A$ a rúdirányú nyúlásokat, \mathbf{s} a rúderőket felsoroló vektor, \mathbf{R}_1 a rúdmerevségeket tartalmazó diagonál-mátrix) az $\boldsymbol{\varepsilon}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_A$ ill. \mathbf{n} és \mathbf{s} vektorok közti összefüggést leíró mátrix-egyenletek segítségével előállíthatjuk az anyagtörvény megszokott formáját.

Teremtsük meg először a kapcsolatot az $\boldsymbol{\varepsilon}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_A$ vektorok között. Válaszszuk az x irányt r -rel párhuzamosnak (4. ábra). Ekkor

$$\boldsymbol{\varepsilon}_A = \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -\cos \beta \cdot \sin \beta \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6)$$

A (6) összefüggés helyességét a síkbeli alakváltozások közti törvényszerűségek alapján azonnal beláthatjuk.

A második összefüggés felírásához helyettesítsük a rúderőket a rudak irányába eső három lineáris feszültségállapottal (vö. a 4. ábrával):

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{s} = \begin{bmatrix} b_r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b_s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & b_t^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{s}. \quad (7)$$

A helyettesítő feszültségállapot \mathbf{e} három lineáris feszültségállapot egymáshalmozásával állítható elő:

$$\mathbf{n} = \mathbf{L}_2 \mathbf{n}_A = \begin{bmatrix} 1 & \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta \\ 0 & \sin^2 \alpha & \sin^2 \beta \\ 0 & \cos \alpha \cdot \sin \alpha & -\cos \beta \cdot \sin \beta \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}_A. \quad (8a)$$

Bizonyos rúdszelvény-arányok esetén az anyagtörvény teljesíti az ortotropia feltételeit. Ilyenkor az x, y koordinátarendszerről áttérve a vele φ szöget bezáró, az ortotropia-főirányokba eső ξ, η koordinátarendszerre (3. ábra), az ebben értelmezett $\tilde{\mathbf{A}}$ merevségi mátrix $\tilde{\mathbf{A}}_{13}$ és $\tilde{\mathbf{A}}_{23}$ eleme zérusra kell adódjék. Az elforgatott koordinátarendszer irányainak megfelelő $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixot a következőképpen állíthatjuk elő az xy koordinátarendszerben felírt \mathbf{A} mátrixból: \mathbf{A} (2) összefüggésnek a $\xi\eta$ koordinátarendszerben az

$$\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (11a)$$

egyenlet felel meg. A síkbeli alakváltozás- és feszültségállapot elméletéből ismeretes, hogy

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\epsilon} \quad (11b)$$

és

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{G}\mathbf{n} \quad (11c)$$

ahol

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \cos\varphi \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\cos\varphi \sin\varphi \\ -2\cos\varphi \sin\varphi & 2\cos\varphi \sin\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix} \quad (12a)$$

az *alakváltozások forgatómátrixa*, \mathbf{G} pedig a *feszültségek forgatómátrixa*, amely \mathbf{F} transzponáltjának inverze:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{F}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 2\cos\varphi \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -2\cos\varphi \sin\varphi \\ -\cos\varphi \sin\varphi & \cos\varphi \sin\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix}. \quad (12b)$$

Behelyettesítve már most (2)-be $\boldsymbol{\epsilon}$ -nak, ill. \mathbf{n} -nek (11b)-ből, ill. (11c)-ből kifejezett értékét, és felhasználva (12b)-t, az elforgatott merevségi mátrixra az

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G}^* \quad (13)$$

kifejezést kapjuk.

Ha az áttérést \mathbf{A} bázisfaktoros alakjának felhasználásával végezzük el, akkor

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{G}\mathbf{L}^*\mathbf{R}\mathbf{L}\mathbf{G}^* = \tilde{\mathbf{L}}^*\mathbf{R}\tilde{\mathbf{L}}, \quad (14)$$

ahol

$$\tilde{\mathbf{L}}(\varphi) = \mathbf{L}\mathbf{G}^* = (\varphi) = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & 0 & 0 \\ \cos^2(\alpha - \varphi) & \sin^2(\alpha - \varphi) & \cos(\alpha - \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi) \\ \cos^2(\beta + \varphi) & \sin^2(\beta + \varphi) & -\cos(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta + \varphi) \end{bmatrix} \quad (15)$$

A tetszőlegesen felvett derékszögű $\xi\eta$ koordinátarendszerben az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix $\tilde{\mathbf{L}}(\varphi)$ felhasználásával \mathbf{A} -hoz hasonló bázisfaktoros alakra hozható, illetve a mátrix-elemek \mathbf{A} elemeihez hasonló kifejezéseként adódnak. Az $\tilde{A}_{12} = \tilde{A}_{33}$ egyenlőség a felírás alapján ellenőrizhető. A merevségi főirányok φ szögét az

$$\tilde{A}(\varphi)_{13} = 0 \quad (16a)$$

vagy az

$$\tilde{A}(\varphi)_{23} = 0 \quad (16b)$$

egyenletek szolgáltatják, az ortotrópia feltételét pedig (16a) és (16b) egyidejű teljesülése:

$$\begin{aligned} -r \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi + s \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \cos^3(\alpha - \varphi) + \\ + t \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \cos^3(\beta + \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} -r \cdot \sin^3 \varphi \cdot \cos \varphi + s \cdot \sin^3(\alpha - \varphi) \cdot \cos(\alpha - \varphi) + \\ + t \cdot \sin^3(\beta + \varphi) \cdot \cos(\beta + \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (16d)$$

vagy rövidebb formában, (16c) és (16d) kombinálásával:

$$-r \cdot \sin 2\varphi + s \cdot \sin 2(\alpha - \varphi) + t \cdot \sin 2(\beta + \varphi) = 0, \quad (16e)$$

$$-r \cdot \sin 4\varphi + s \cdot \sin 4(\alpha - \varphi) + t \cdot \sin 4(\beta + \varphi) = 0. \quad (16f)$$

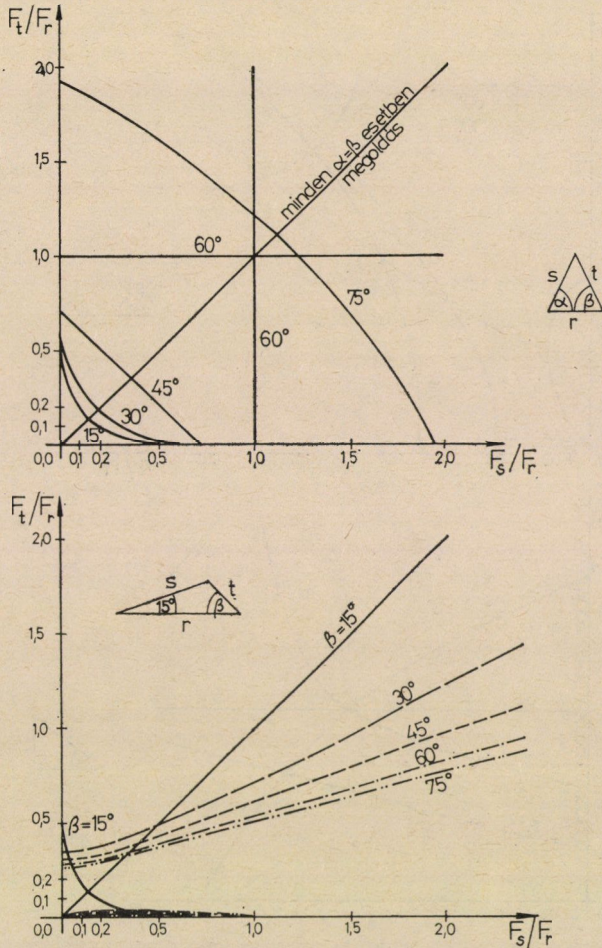
Az ortotrópia feltételeit megadhatjuk \mathbf{A} elemeinek felhasználásával egyszerűbb, algebrai egyenletekként is:

$$\tilde{A}_{13} = [\cos^2 \varphi, \sin^2 \varphi, 2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi] \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} -\cos \varphi \cdot \sin \varphi \\ \cos \varphi \cdot \sin \varphi \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} = 0. \quad (17a)$$

$$\tilde{A}_{23} = [\sin^2 \varphi, \cos^2 \varphi, -2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi] \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} -\cos \varphi \cdot \sin \varphi \\ \cos \varphi \cdot \sin \varphi \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} = 0. \quad (17b)$$

E két egyenletről meghatározható a feltételezett ortotrópia főirányainak φ hajlásszöge (3. ábra):

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(A_{13} + A_{23})}{A_{11} - A_{22}}, \quad (18)$$



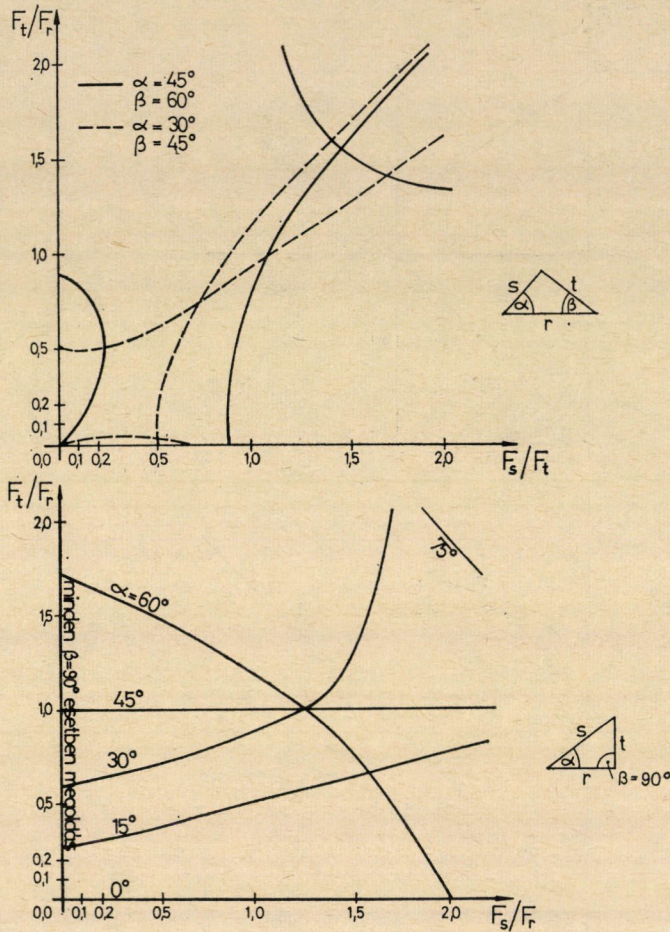
5. ábra. 5/a ábra. a) Egyenlőszárú háromszögrácsok $\alpha = \beta$; b) Általános háromszögrácsok $\alpha = 15^\circ$

majd (18)-at a (17a) vagy (17b) egyenletbe helyettesítve, az ortotrópia feltétele az alábbi alakot ölti:

$$6A_{12} - (A_{11} + A_{22}) + (A_{13} - A_{23}) \left[\frac{A_{11} - A_{22}}{A_{13} + A_{23}} - 4 \frac{A_{13} + A_{23}}{A_{11} - A_{22}} \right] = 0. \quad (16)$$

Mivel a lemezelmélet legtöbb problémáját izotróp és ortotróp lemezekre dolgozták ki, célszerű a rácsok ortotrópia-feltételeinek számításra alkalmasabb formáját meghatározni. A (18) és (19) egyenletekbe visszahelyettesítve a rácsrendszer kiinduló adatait, a következő kifejezésekre jutunk:

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{F_s \cdot \sin \beta \cdot \sin 2\alpha - F_t \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\beta}{F_r \cdot \sin \gamma + F_s \cdot \sin \beta \cdot \cos 2\alpha + F_t \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\beta}. \quad (20)$$



5/c–5/d ábrák c) általános háromszögrácsok; d) derékszögű háromszögrácsok

A feltételezett ortotrópia főiránya, az ortotrópia feltétele pedig:

$$\begin{aligned} & \frac{F_r \cdot \sin 2\alpha}{2F_t \cdot \sin \beta} - \frac{F_r \cdot \sin 2\beta}{2F_s \cdot \sin \alpha} + \frac{F_s \cdot \sin 2\gamma}{2F_r \cdot \sin \alpha} - \frac{F_s \cdot \sin 2\alpha}{2F_t \cdot \sin \gamma} + \\ & + \frac{F_t \cdot \sin 2\beta}{2F_s \cdot \sin \gamma} - \frac{F_t \cdot \sin 2\gamma}{2F_r \cdot \sin \beta} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Ez a képlet alkalmas adott geometriai rendszerű rácsozás esetén az ortotrópiát biztosító rúdkeresztmetszet-arányok meghatározására. Láthatjuk, hogy egy adott geometria (α, β, γ) esetén végtelen sok összetartozó F_s/F_r és F_t/F_r értékpár ad ortotrópiát, sőt — mivel a (21) egyenlet nem lineáris — egy F_s/F_r arányhoz esetleg több F_t/F_r arány is tartozik. A könnyebb tájékozódás céljából né-

hány geometriai elrendezésre az 5. ábrán adjuk meg az ortotrópiát biztosító összetartozó F_s/F_r és F_t/F_r értékpárokot ábrázoló görbéknek a 0 és 2,0 felületarányok közé eső szakaszait. Az ortotrópia feltételi egyenletének negatív és képzetes felületarány-gyökei is vannak, de a diagramokon csupán a valós, pozitív felületarányokat ábrázoltuk.

A leggyakrabban előforduló — triviálisan ortotróp — rácsozás az egyenlőszárú háromszögekből $\alpha = \beta$ és $F_s = F_t$ feltétellel összeállított hálózat. (α, β, γ és F_r, F_s, F_t ciklikus cseréjével hasonló ortotrópia adódik). Ilyenkor a főirányok a háromszögek szimmetriatengelyébe, ill. a rá merőleges rúdírányba esnek.

Az ortotrópia feltételét kielégíti az általános háromszögekből álló hálózat is, ha teljesül az

$$\frac{F_r}{\cos \gamma} = \frac{F_s}{\cos \beta} = \frac{F_t}{\cos \alpha} \quad (22)$$

arány. Ilyenkor azonban az ortotrópia főirányai nem adhatók meg szemlélet alapján.

Az *izotrópia* azt jelenti, hogy a szilárdsági tulajdonságok függetlenek a koordinátarendszer irányától. Ebből következik, hogy φ értékétől függetlenül ki kell elégülniük a (16a, e) egyenleteknek, az összes elemekre pedig az $\tilde{A}_i = A_i$ egyenlőségnek.

Az előzőekben kimutatott $A_{12} = A_{33}$ egyenlőség következménye, hogy az izotróp helyettesítő kontinuum harántkontrakciós állandója mindig

$$\frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{A_{33}}{A_{11}} = \frac{1}{3}, \quad (23)$$

tehát az izotróp rácsozás merevségi tulajdonságait csupán egyetlen adat jellemzi.

Mivel az r, s ill. t irányú húzások esetében a harántkontrakció csupán a rácsozás geometriájától függ, ezért szükséges feltétele az izotrópiának, hogy a rácsozásban a csatlakozó rúdírányok minden rúdhoz azonos szög alatt fussanak. Ilyen csak a teljesen szabályos (egyenlőoldalú) háromszögrácsozás lehet, ahol $\alpha = \beta = \pi - (\alpha + \beta) = \pi/3 = 60^\circ$. Ugyancsak az r, s ill. t irányú húzások vizsgálata mutatja meg, hogy az F_r, F_s és F_t rúdkeresztmetszeteknek is egyezniük kell. Mivel az $\alpha = \beta = \pi/3$ és az $F_r = F_s = F_t$ feltételekkel ki tudjuk elégíteni a (16) és (20) egyenleteket, kimondhatjuk, hogy a háromszögrácsozás helyettesítő kontinuum egy és csakis egy esetben lehet izotróp: az egyforma húzási merevségű rudakból összeállított egyenlő oldalú, szabályos háromszögrácsozás esetén.

4.5. A kétrétegű rácsszerkezet merevségei

Áttérve már most a teljes rácsszerkezet helyettesítő lemezének merevségi tulajdonságaira, az övfelületek \mathbf{A} ill. a rácsszerkezet \mathbf{B} mátrixa közötti (4)

összefüggés alapján megállapíthatjuk, hogy csak akkor helyettesíthetjük a rácsszerkezetet izotróp lemezzel, ha az övsíkokat alkotó rácsozat egyenlő húzási merevségű rudakból álló, egyenlő oldalú háromszögrács. Az összekötő rudaknak nincs hatása az izotrópiára, mivel — mint a 2. pontban mondtuk — a hajlítási és a nyírési alakváltozások egymástól függetlenül tárgyalhatók. Ilyen értelemben, de csakis ilyen értelemben nevezhetők izotrópnak az egyenlő oldalú háromszögrácsoszerű övsíkokkal kialakított kétrétegű rácok, ill. helyettesítő tömör lemezek.

Az *ortotrópiának* a teljes rácsozásra vonatkozó értelmezése teljesen analóg az *izotrópiáéval*.

A *nyírési merevségek* vizsgálata alapján meg lehet határozni az alsó és a felső övrácsoszás csomópontjainak relatív helyzete által megszabott izotróp, ill. az ortotróp övrácsoszás merevségi főirányaival egybeeső, tetszőleges merevségi arányú ortotróp nyírómerevségű összekötő rácsozás elrendezését és szelvényarányait. Ezzel azonban most nem foglalkozunk részletesen.

5. A rúderők meghatározása

Hátra van még a rácsozás övrúderőinek és rácsrúderőinek meghatározása a kontinuum-modell alapján számított igénybevételekből.

Egyszerűbb az *övrúderők* meghatározása. A helyettesítő lemez szilárd-sági tulajdonságainak megfelelő izotróp, ortotróp vagy aeolotróp lemezegyenlet megoldása, majd a nyomatékok meghatározása után a nyomatékok h -val történő osztásával (3b) megkapjuk az alsó vagy felső övsík membránjellegű igénybevételeit. Így valamennyi csomópontban meghatározhatjuk az n vektor komponenseit. *Homogén feszültségállapotban*, állandó merevség esetén pontos összefüggést ad az invertált (8b) kifejezés:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{L}^* \mathbf{R}_2)^{-1} \mathbf{n} = \mathbf{R}_2^{-1} (\mathbf{L}^*)^{-1} \mathbf{n}. \quad (24)$$

A képletben szereplő \mathbf{R}_2^{-1} diagonálmátrix-inverz meghatározása nem jelent problémát, $(\mathbf{L}^*)^{-1}$ pedig,

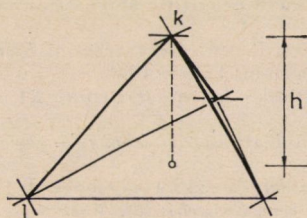
$$(\mathbf{L}^*)^{-1} \mathbf{L}^* = \mathbf{E}$$

alapján ellenőrizhetően:

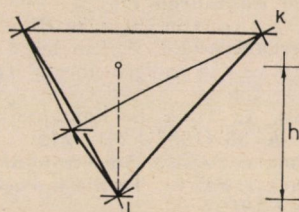
$$(\mathbf{L}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} & -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \\ 0 & \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} & \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} \\ 0 & \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} & -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

(25) alapján a (24) egyenlet skaláris formában a következő lesz:

$$\begin{aligned} S_r &= b_r \left[n_x - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} n_y - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} n_{xy} \right], \\ S_s &= b_s \left[\frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} n_y + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} n_{xy} \right], \\ S_t &= b_t \left[\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} n_y - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} n_{xy} \right]. \end{aligned} \quad (26a-c)$$



6/a. ábra



6/b. ábra

Ha pedig változnak a rácsszerkezet, ill. a helyettesítő lemez igénybevételei, sőt esetleg a hálózata is, akkor — feltéve, hogy ez a változás nem túlságosan gyors — minden csomópontban felírhatjuk, hogy

$$s_i \approx \mathbf{R}_{2i}^{-1} \cdot (\mathbf{L}^*)^{-1} \cdot \mathbf{n}_i, \quad (27)$$

ahol i a vizsgált pont jele. E kifejezés alapján minden csomópontra, így minden rúd két végére is — változó igénybevétel (ill. kismértékben változó rácsoszás) esetében — egymástól eltérő rúderők adódnak. i -vel és j -vel jelölve valamelyik ij övrúd két végpontját, a méretezéshez felhasználható rúderőértéket számtani közepeléssel a

$$S_{ij} \approx \frac{(S_{ij})_i + (S_{ij})_j}{2} \quad (28)$$

képlet alapján vehetjük fel.

Az alsó és a felső övsík rúderőinek ismeretében térhetünk rá az összekötő rácsozat rúderőinek meghatározására. Megvizsgálva egy kl összekötő rúd k jelű felső ill. l jelű alsó csomópontjának egyensúlyát, azt találjuk, hogy a k csomópontba csatlakozó három rácsrúd — köztük kl — igénybevétele a csomópontban ható ismert övrúderők és az ugyanitt ható külső teher segítségével statikailag határozott módon kiszámítható (6a. ábra). Ugyancsak statikailag határozott az l pontban összefutó rácsrudak alkotta „háromlábú bakállvány” (6b. ábra). Így a kl rúd rúdereje meghatározható az l csomópont egyensúlya

alapján is. A méretezéshez — a változó igénybevétel miatt — ismét a két eredmény számtani közepét használhatjuk:

$$S_{kl} \approx \frac{(S_{kl})_k + (S_{kl})_l}{2}. \quad (29)$$

IRODALOM

1. FLÜGGE, S.: Handbuch der Physik, Bd. VI. Elastizität und Plastizität. Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958
2. HEKI, K.—FUJITANI, Y.: The Stress Analysis of Grids under the Action of Bending and Shear. *Space Structures*. (Ed. R. M. Davies.) Blackwell Scientific Publications Oxford and Edinburgh 1967
3. HEKI, K.: On the Effective Rigidities of Lattice Plates. Recent Researches of Structural Mechanics. (Ed. H. Tanaka, S. Kawamata.) Uno Shoten, Tokyo 1968
4. KROMM, A.: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik. *Ingenieur-Archiv*, **21** (1953), 266—286
5. KROMM, A.: Über die Randquerkräfte bei gestützten Platten. *Zeitschr. f. angew. Math. Mech.* **35** (1955), 231—242
6. LEHNICKIJ, Sz. G.: Anizotropnue plasztinki. *Gosztehizdat*, Moszkva—Leningrad 1947
7. LEHNICKIJ, Sz. G.: Teorija uprugoszti anizotropnogo tela. *Gosztehizdat*, Moszkva—Leningrad 1950
8. LOVASS-NAGY V.: Matrixszámítás. Műszaki Matematikai Gyakorlatok C. IV. Tankönyvkiadó, Budapest 1956
9. OPRAVIL, V.: Adalékok diszkrét, lapos körhengerhéjak véges alakváltozásának elméletéhez. A II. Könnyűszerkezeti Konferencia előadásai. (Székesfehérvár, 1970. aug. 3—8.) II. köt., 231. o. METESZ, Gépipari Tud. Egyesület kiadása, 1970
10. PLANTEMA, F. J.: Sandwich Construction. The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates and Shells. John Wiley & Sons, Inc. New York—London—Sydney 1966
11. RÓZSA M.: A hajlított tartórácsok differenciálegyenletei. *MTA Műsz. Tud. Közl.* **13** (1954), 41—57
Équations différentielles des grillages fléchis. *Acta Techn. Hung.* **8** (1954) 277—293
12. SZMODITS K.: Könnyű térbeli acélszerkezetek. *ÉTI Tudományos Közlemények* 75. sz. Budapest 1969
13. TIMOSHENKO, S.—WOJNOWSKI-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York—Toronto—London 1959.
Lemezek és héjak elmélete. Műszaki Kiadó, Budapest 1966
14. TORROJA, E.: Réalisations de voûtes minces en Espagne. Résultats obtenus et possibilités futures. *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*. Série: Béton, Béton armé, No. 14. (1950)
15. WRIGHT, D. T.: A Continuum Analysis for Double Layer Space Frame Shells. *Publ. Int. Assoc. Bridge Struct. Eng.* Zurich, **26** (1966).

Solution of Double-layer Space Trusses of General Triangular Grid by the Equivalent Continuum Method. Space trusses consisting of two parallel, identical chord planes of general triangle mesh and of connecting space diagonals are analysed. A method for determining the equivalent substituting continuum (plane plate) of the space truss is presented, together with the conditions of orthotropy or isotropy for this plate, and formulae are deduced for the determination of bar forces in the space truss from the internal forces of the continuum.

Anwendung des Verfahrens des gleichwertigen Ersatzkontinuums für zweischichtige Raumbachwerke mit allgemeinem Dreiecknetz. Raumbachwerke mit zwei parallelen, identischen Gurtebenen aus allgemeinem Dreiecknetz und räumlichen Verbindungsstäben werden untersucht. Eine Methode wird dargelegt für die Bestimmung des gleichwertigen Ersatzkontinuums (ebene Platte) des Raumbachwerkes, die Bedingungen für die Orthotropie bzw. Isotropie der Platte werden angegeben, und Formeln werden abgeleitet für die Berechnung der Stabkräfte im Raumbachwerk aus den Schnittkräften des Kontinuums.