

HÁROMSZÖGHÁLÓZATÚ GÖMBI RÁCSSZERKEZETEK

TARNAI TIBOR*

[Beérkezett: 1971. március 28-án]

A dolgozat az egyrétegű, háromszöghálózatú gömbi rácsszerkezetek hálózatának geometriai vizsgálatával foglalkozik. Arra a kérdésre keresi a választ, hogyan lehet a gömbfelületet kevés különböző hosszúságú oldallal a lehető legtöbb gömbháromszögre felosztani úgy, hogy a felosztás lehetőleg egyenletes legyen. A szabályos és félig szabályos testek segítségével a gömbfelületen megközelítően egyenletes háromszög-felosztásokat állít elő, melyekből kiválasztja a legsűrűbb hálózatúakat. Módszert javasol a felosztásra, és a felosztás eredményeként kiadódó alakzatokat összehasonlítja a Fuller-féle felosztásokkal nyert alakzatokkal.

I. Bevezetés

Az elmúlt két évtizedben számos, előregyártott elemekből a helyszínen összeszerelt fémvázás gömbkupolát építettek. A szerkezetek konstruálásánál az a cél vezette a tervezőket, hogy lehetőleg minél több egyforma elemből lehessen a szerkezetet összeállítani.

A minimális számú elemfajta alkalmazásának igényével történő gömbi hálózat szerkesztése FULLERTŐL [9] ered. Az ő találmányai alapján sokféle gömbsátor [5] és gömbkúpola épült [9, 8, 2].

Ezen rácisos gömbszerkezetek hálózatának geometriája azonban csak részben ismeretes előttünk. FULLER a gömb felületét a gömb geodetikus vonalaival, a főkörívvel gömbháromszögekre osztotta. A hálózat-szerkesztési eljárás alapjául egy általa kidolgozott geometriai rendszer (energetic-synergetic geometry) szolgált. FULLER geodetikus hálózatainak két alaptípusát ismerjük [5, 6 és 3]. Ezeknél a felosztás alapalakzataként a szabályos ikozaédert és a szabályos pentagondodekaéder lapjaira állított, szabályos gúlákból kiadódó konvex poliédert, ill. ezek élhálózatának gömbi vetületét alkalmazta.

A rácisos gömbszerkezetek egy speciális fajtáját TUPOLEV [10] is vizsgálta.

A jelen dolgozatban az egyrétegű, rácisos gömbszerkezetek hálózatának geometriai vizsgálatával kívánunk foglalkozni. Célunk, hogy megállapítsuk: létezik-e egy adott gömbhöz olyan háromszöglapokkal határolt, beírt konvex poliéder, ill. neki megfelelő, gömbháromszögekből álló gömbi hálólakzat, melyet a továbbosztás alapjául választhatunk úgy, hogy a hálólakzat gömb-

* Tarnai Tibor Budapest XI., Eszék u 7/b.

háromszögeinek felosztásával sűrűbb hálózatot kapjunk, mint a gömbi ikozaéder, vagy a kiegészített dodekaéder hálózatának sűrítése esetén kapnánk azon kikötés mellett, hogy a felosztással keletkezett poliéderek egymástól különböző él- ill. lapfajtaiknak száma azonos legyen. Célunk továbbá, hogy ha nem követjük szigorúan a fulleri elvet (amely szerint a felosztás alapjául szolgáló gömbi hálózat egy gömbháromszögén belül egy osztóvonal mindig egy olyan főkörív, melynek végpontjai a gömbháromszög két oldalára esnek), egyes esetekben konkrét módszert adjunk a felosztásra.

Az általunk konstruált poliéderek (gömbi hálózatok) adatait végül össze fogjuk hasonlítani FULLER ismert poliédereinek (gömbi hálózatainak) adataival.

2. Jelölések

| | |
|--------|--|
| c | a poliéder összes csúcsainak a száma |
| c_k | a poliéder egymástól különböző szögleiteinek a száma |
| e | a poliéder összes éleinek a száma |
| e_k | a poliéder egymástól különböző éleinek a száma |
| E_i | ($i = 1, 2, \dots, e_k$) a poliéder i -edik különböző éle, ill. a neki megfelelő gömbháromszög oldal |
| l | a poliéder összes lapjainak a száma |
| l_k | a poliéder egymástól különböző lapjainak a száma |
| L_i | ($i = 1, 2, \dots, l_k$) a poliéder i -edik különböző lapja, ill. a neki megfelelő gömbháromszög |
| L'_i | az L_i lapnak, ill. gömbháromszögnek valamely főkör síkjára vonatkozó tükörképe |
| n | a hálózat sűrítési fokozata, amely a legtöbb esetben azt is jelenti, hogy az alapalakzat egy gömbháromszögének oldalát hány részre osztottuk |
| s_k | a poliéder egymástól különböző lapszögeinek a száma |

3. Alapfogalmak¹

A tárgyalás során használni fogunk néhány geometriai fogalmat. Ezek közül a legelemibbek — mint a sokszög; a sokszög oldala, csúcsa, szöge; a poliéder; a poliéder lapja, éle, csúcsa, élszöge, lapszöge; a gömb főköre — értelmezésével e helyen nem foglalkozunk, csupán hivatkozunk [7]-re, ahol e fogalmak pontos definíciói megtalálhatók.

Néhány fontos, részben közismert fogalmat az alábbiak szerint értelmezünk:

3.1. Egy alakzat *konvex*, ha az alakzat bármely két pontját összekötő egyenesszakasz minden pontja az alakzathoz tartozik.

3.2. Egy konvex sokszög *szabályos*, ha minden oldala és szöge egyenlő. A síkban egyetlen olyan pont van, mely a szabályos sokszög csúcsaitól ill. oldalaitól egyenlő távolságra van. Ez a pont a szabályos sokszög *középpontja* (*centruma*).

¹ Az itt következőket részletesen tárgyalja pl.: [7, 1, 4].

3.3. Ha egy sokszögtartomány pontjaihoz egy, a sokszög síkján kívüli eső pontból félegyeneseket indítunk, akkor a félegyenesek egyesítéseként *végtelen gúlát* kapunk. Azt a poliédert, amelyet a végtelen gúlának a sokszög síkjával való elmetszése által állítunk elő, *gúlának* nevezzük. A sokszög a gúla *alaplapja*. A többi lapja háromszög, ezek a gúla *oldallapjai*. Az oldallapok együttesen a gúla *palástját* adják. Az alaplapot határoló élek a gúla *alapélei*, a többi él a gúla *oldaléle*. A származtatásnál szereplő félegyenesek kezdőpontja a gúla *csúcsa*. Az oldallapokon haladó félegyenesek alapélig terjedő szakaszai a gúla *alkotói*.

A gúla *szabályos*, ha a gúla alaplapja szabályos sokszög, és csúcsa az alaplap középpontjában az alaplapra állított merőlegesen van.

3.4. Az olyan végtelen gúlát, amelyet száraik mentén egymáshoz kapcsolódó szögtartományok határolnak, *szögletnek* (*szöglettartománynak*) nevezzük. A határoló szögtartományok a szöglet *oldalai*, csatlakozási félegyenesek a szöglet *élei*, a csatlakozó szögtartományok által alkotott lapszögek a szöglet *szögei*. Az élek közös kezdőpontja a szöglet *csúcsa*. A háromélű konvex szöglettartományt *triédernek* nevezzük.

Egy szöglet *szabályos*, ha oldalai és szögei egyenlők. Ha egy poliéder egyszerűen összefüggő és minden élében csak két lap találkozik, akkor a poliéder minden csúcsához egy szögletet lehet hozzárendelni, melynek csúcsa azonos a poliéder csúcsával, élei tartalmazzák a poliédernek azokat az éleit, amelyek a csúcsban találkoznak, oldalai a poliéder élszögei, szögei pedig a poliéder lapszögei. Ez a szöglet a poliéder *szöglete*.

3.5. Egy konvex poliéder *szabályos test*, ha minden éle, élszöge és lapszöge egyenlő. A térben egyetlen olyan pont van, mely a szabályos test csúcsaitól, ill. lapjaitól egyenlő távolságra van. Ez a pont a szabályos test *középpontja* (*centruma*). A szabályos test lapjai és szögletei szabályosak és egybevágók.

3.6. Ha egy konvex poliéder lapjai szabályosak, a szögletei pedig egybevágók, vagy megfordítva, akkor *félig szabályos testet* kapunk. Hogy ezzel a definícióval a szabályos testeket ne soroljuk be a félig szabályos testek közé, kikötjük, hogy a lapokra és a szögletekre nem teljesülhet egyszerre a szabályosság és az egybevágóság. Eszerint a félig szabályos testek két osztályba sorolhatók:

Az 1. osztályba tartoznak az olyan konvex poliéderek, melyeknek minden lapja szabályos sokszög és minden szöglete egybevágó, de nem szabályos.

A 2. osztályba tartoznak az olyan konvex poliéderek, amelyeknek minden lapja egybevágó, de nem szabályos és minden szöglete szabályos.

Minden 1. osztályba tartozó poliéderhez található a 2. osztályban egy poliéder, melynek ugyanannyi csúcsa ill. lapja van, mint amennyi lapja ill. csúcsa van az 1. osztálybeli poliédernek. Ez a 2. osztálybeli poliéder az 1. osztálybeli poliéder *duálisa*.

Az 1. osztályba tartozó félig szabályos testeket *Archimedes-féle poliédereknek* nevezzük. Egy Archimedes-féle poliéder minden éle egyenlő.

Az Archimedes-féle poliéderek jelölésére [4] alapján egy számcsoportot fogunk használni: (i, j, \dots, m) . A számcsoporthban levő számok jelentése: egy számcsoport annyi számból áll, ahány sokszöglap található egy csúcsban, az i, j, \dots, m számok pedig azt jelentik, hogy az egyes sokszögek i, j, \dots, m -szögűek. Például $(4,6,8)$ azt jelenti, hogy minden csúcsban három sokszög található, amelyek között egy 4-szög, egy 6-szög és egy 8-szög van. Az Archimedes-féle poliédereket az 5–19. ábrákon a vastag vonalak mutatják.

3.7. Egy gömbfelületből egy triéder által kimetszett alakzatot *gömbháromszögnek* nevezünk, ha a triéder csúcsa azonos a gömb középpontjával.

3.8. Ha egy poliéderfelületet, melynek van beírt gömbje (a poliéder minden lapja érint egy gömböt), vagy köré írt gömbje (a poliéder minden csúcsa rajta van egy gömbfelületen), a gömb középpontjából a gömb felületére vetítünk, akkor a poliéder élceinek vetülete a gömbön egy főkörívekből álló vonalrendszer lesz, melyet a poliéder *gömbi élhálózatának* (*hálózatának*) nevezünk. A gömbi hálózat által felosztott gömbfelületet, mely a poliéder gömbi vetülete, *teljes gömbi hálóalakzatnak* (*gömbi hálóalakzatnak*) mondjuk.

3.9. Egy gömbi élhálózat *sűrűségén* a hálózat hosszának és a gömb átmérőjének hányadosát értjük. Ha egy gömbi hálóalakzat olyan, hogy csupa gömbháromszögből áll, és a gömbháromszögek megközelítően egyenlőoldalúak és megközelítően egyformák, akkor a hálózat sűrűségét elég jól jellemzi a gömbháromszög-oldalak (a gömbi alakzatnak megfelelő poliéder-élek) száma, ill. a gömbháromszögek (a megfelelő poliéder-lapok) száma. A gömbi hálóalakzatnak megfelelő poliédert ugyanis háromszöglapok határolják, és ekkor

$$e = \frac{3}{2} l .$$

3.10. Valamely felület két pontját összekötő legrövidebb felületi vonal a *geodetikus vonal*. A gömbfelület geodetikus vonalai a főkörívek. A főkörívekből álló gömbi hálózat alapján megkonstruált gömbkúpokat *geodetikus kúpoknak* nevezik.

4. A gömb közelítő poliéderei

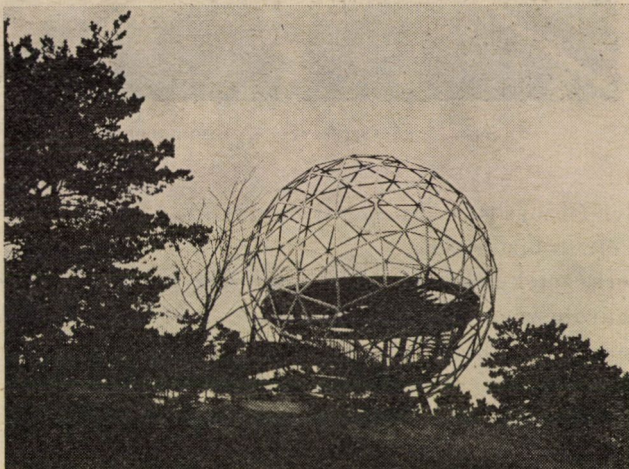
Ha egy gömbszerkezetet — például gömbkúpokat — előregyártott elemekből kívánunk összeszerelni, akkor a gyártás és szerelés szempontjából előnyösnek látszik, hogy azok az elemek, melyeknek hosszúsági illetve hosszúsági és szélességi mérete a többi méretéhez képest nagy, ne rendelkezzenek hosszirányú ill. hossz- és keresztirányú görbülettel, azaz ezek az elemek vagy egyenes rudak vagy sík táblák (lapok) legyenek. Ilyen elemekkel természetesen nem állítható elő a gömbfelület, hanem csak egy közelítő poliédere.

Azt mondjuk, hogy egy r sugarú gömböt egy poliéder ε mértékben közelít, ha a poliéderfelület minden pontja benne van az $r + \varepsilon$, $r - \varepsilon$ sugarú, koncentrikus gömbfelületekkel határolt tartományban.

A közelítő poliéderek köréből célszerű két könnyen kezelhető típust megkülönböztetni aszerint, hogy

- a) a poliéder a gömb beírt konvex poliédere,
- b) a poliéder a gömb köré írt poliédere.

Adott gömb esetén egy beírt, vagy köré írt poliéder egy ugyanolyan típusú másik poliéderhez képest jobban közelíti a gömböt, ha élei és lapjai kisebbek.



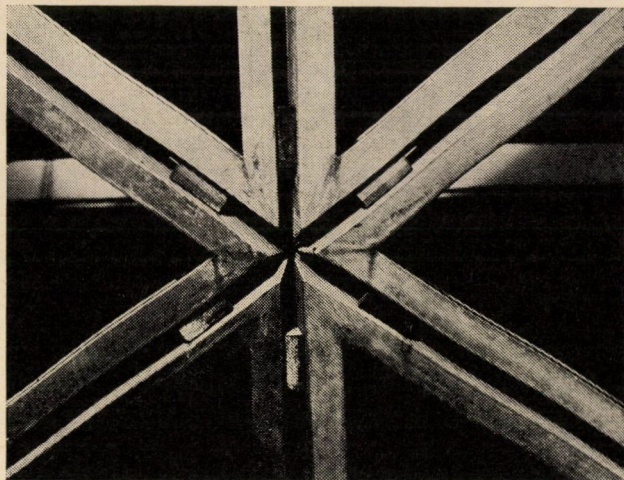
1. ábra. Háromszögű keretből összeszerelt gömbi rácsszerkezet

Bizonyos ε értékekre a szabályos és félig szabályos testek is tekinthetők a gömb közelítő poliédereinek. A szabályos testek mindkét típusba beletartoznak, az Archimedes-féle poliéderek az a), az Archimedes-féle poliéderek duálisai pedig a b) típusba tartoznak.

Ha egy teherhordó szerkezet rudakból és a rudakat egymáshoz kapcsoló csomóponti elemekből áll, *rúdszerkezet*ről beszélünk. Ha egy teherhordó szerkezet sík lapokból és a lapokat egymáshoz kapcsoló élmenti elemekből áll, *lapszerkezet*ről beszélünk.

Poliéder-élhálózatra szerkesztett rúdszerkezetnél a csomóponti elemek biztosítják a poliéder szögleteit, szereléskor a poliéder lapjai a kétfajta elem segítségével automatikusan kialakulnak.

Poliéder-élhálózatra szerkesztett lapszerkezetnél az élmenti elemek biztosítják a poliéder lapszögeit, szereléskor a poliéder szögletei a kétfajta elem segítségével automatikusan kialakulnak.



2. ábra. A rácsszerkezet egy csomópontja

A poliéder élszögeit a csomóponti elemek ill. a lapok a szerkezetek mindkét típusánál eleve biztosítják.

A rúdszerkezetek közismertek. Lapszerkezetre példát az 1. ábra mutat, itt a lapokat háromszögű keretek alkotják. A 2. ábrán láthatjuk a lapok kapcsolatát, a lapszögeket biztosító elemeket és a kialakult csomópontot (szögletet). A szerkezet megszerkesztésének alapjául szolgáló poliéder csúcsai egy 15 m átmérőjű gömbfelületen helyezkednek el, a határoló lapok száma 240. A szerkezetet KÁDÁR István tervezte.

5. A felosztási probléma felvetése

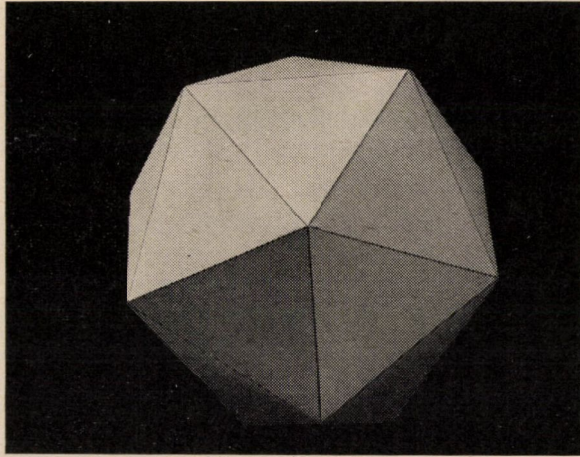
Ha egy adott sugarú gömbi téralakzatot előregyártott egyenes rudakból és csomóponti elemekből álló, egyrétegű rácsszerkezetként kívánunk megépíteni, akkor a következő követelményeknek kell eleget tennünk:

a) A rácsszerkezet alakja minél jobban közelítse meg a gömböt. A rácshálózata egyezzen meg a gömb valamely közelítő poliéderének élhálózatával.

b) A rácshálózata csupa háromszögekből álljon, mert az egyszerűen összefüggő térrészt körülvevő rácsszerkezetek közül csak a háromszöghálózatú rács merev.

c) Az elemek legnagyobb mérete ne lépje túl a szállíthatóság és szerelhetőség korlátait. A rudak kihajlási hossza minél kisebb legyen.

d) Az elemek egyformák legyenek, hogy sorozatgyártásra lehessen berendezkedni, és így az üzemi előállítás gazdaságos legyen, ill. hogy a szerkezet megjelenésében egyöntetű és esztétikus legyen.



3. ábra. Szabályos ikozaéder

Az *a)* feltételt többféleképpen is ki lehet elégíteni. A 4. pontban a lehetőségek közül a két legfontosabbat említettük. *A továbbiakban azzal az esettel foglalkozunk, amikor a közelítő poliéder a gömb beírt konvex poliédere.*

Most nézzük meg, mely poliéderek tesznek eleget az itt felsorolt követelményeknek.

A szabályos testek kielégítik az *a)* és *d)* követelményeket, ugyanis a gömb beírt konvex poliéderei, és minden élük ill. szögletük egyforma. A *b)* követelménynek az ötféle szabályos test közül csak három tesz eleget: a tetraéder ($c = 4$, $e = 6$, $l = 4$, egy csúcsban 3 él találkozik), az oktaéder ($c = 6$, $e = 12$, $l = 8$, egy csúcsában 4 él találkozik) és az ikozaéder ($c = 12$, $e = 30$, $l = 20$, egy csúcsában 5 él találkozik). Rögzítsük a *c)* követelményben előírt méretet, amely megadja az élhossz felső korlátját, és növeljük a gömb sugarát. Tekintsük ekkor sorra a három poliédert. A tetraédernél az élhossz hamar eléri a megadott határt. Vegyük ezután az oktaédert. A gömb sugara tovább növelhető, hogy az élhossz a megadott korlát alatt maradjon. A gömb sugarának további növelésével azonban az oktaéder élhossza is túllépi a határt, és ekkor már csak az ikozaéder (3. ábra) jöhet szóba. Így azt mondhatjuk, hogy mindaddig míg a gömb sugara az előírt korlátnak az $1/1,0515$ -szőrösét nem haladja meg, de nagyobb mint a korlát $1/\sqrt{2}$ -szőröse, a szabályos testek közül egyedül az ikozaéder elégíti ki a *c)* feltételt. Ha azonban a gömb sugara nagy, akkor a beírt ikozaéder élei is nagyok lesznek és túlléphetik a *c)* kikötésben megszabott korlátot. Ezért tehát olyan poliédereket kell keresnünk, amelyeknek élhálózata sűrűbb, és ennek következtében élei rövidebbek.

Ilyen poliédereket találunk a félig szabályos testek között. Például a (3,4,5,4) archimedesi testnek 60 csúcsa, 120 éle és 62 lapja van. Az Archimedes-

féle poliéderek kielégítik az *a)* és *d)* követelményeket, lévén a gömb beírt konvex poliéderei, élük és szögleteik egyformák. A *c)* feltételt is teljesítik olyan nem nagy sugarú gömbökre, melyekre az ikozaéder már nem felel meg. Az Archimedes-féle poliédereket azonban 3-, 4-, 5-, 6-, 8- és 10-szögek határolják, és egy poliédert sem határolnak csupa háromszögek. Ezért ezek a poliéderek a *b)* feltételnek nem tesznek eleget. Azonban az archimedesi poliédereknek azokra a lapjaira, amelyek nem háromszögek, szabályos gúlákat állíthatunk úgy, hogy a gúla alaplapja a poliéder lapja legyen és a gúla csúcsa a poliéder köré írt gömbfelületen legyen.

Ezzel elérjük, hogy az így kiadódó új poliéder valamennyi lapja háromszög lesz, viszont a gúlák oldalélei egy vagy több új élhosszúságot adnak, melyek különböznek a gúlák alapéleit adó Archimedes-féle poliéder éléinek élhosszától. Mivel a gömb beírt konvex poliéderei között az eddig tárgyaltakon kívül nincsenek más poliéderek, melyeknek élhosszai egyenlők lennének, és mivel az Archimedes-féle poliéderek élhálózata nem csupán háromszögekből áll, le kell mondanunk arról az igényről, hogy a poliéder minden éle egyforma legyen.

A *d)* feltétel helyett a következő két, egyidejűleg érvényes szempontot vehetjük:

d.1) A szerkezet sok egyforma, de kevés különböző fajta elemből álljon, hogy az előregyártás gazdaságos legyen.

d.2) Az elemek mérete lehetőleg csak kevésbé térjen el egymástól, hogy az elemek egyformának látszódjának és így a szerkezet megjelenése esztétikus legyen, továbbá hogy a szerkezet mégis azonos gyártási hosszúságú rudakból készülhessen úgy, hogy a hosszdifferenciákat a csomóponti illesztésekkel adjuk meg.

Az eddigiek rúdszerkezetekre vonatkoztak. Hasonló feltételeket mondhatunk ki lapszerkezetekre is rudak helyett lapokat, csomóponti elemek helyett élmenti elemeket véve. Lapszerkezetek esetében a *b)* feltételben háromszögek helyett más sokszöget is választhatnánk. A tömör lapokból álló lapszerkezet tulajdonképpen felületszerkezet, ha azonban a lapoknak csak a peremét vonjuk be a teherviselésbe, akkor a lapszerkezet térbeli keretszerkezetté válik. Ha a kerethálózat háromszögekből áll, rácsszerkezethez jutunk. A továbbiakban, ha lapszerkezetekkel foglalkozunk, akkor csak háromszöghálózatú lapszerkezetekre gondolunk, melyekre a lényegyet tekintve ugyanazokat a kikötéseket tesszük, mint rúdszerkezetekre.

Könnyen belátható, hogy egy gömb beírt, háromszöglapokkal határolt, konvex poliédere kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető a gömbi hálóalakzatának, ha a hálóalakzat minden gömbháromszögére teljesül a következő feltétel (*a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés feltétele*): A gömbháromszöget lefedő azon gömbsüveg, amelynek alapköre átmegy a gömbháromszög minden csúcspontján, nem fed le további csúcspontokat. Ennek előrebocsátásával az

a) feltétel teljesülése esetében a $b-d.2.$ követelményeket így is megfogalmazhatjuk (*felosztási probléma*):

Osszunk fel egy adott sugarú gömböt főkörívvel gömbháromszögekre úgy, hogy

α) a leghosszabb gömbháromszög-oldal is rövidebb legyen egy előre megadott hosszúságnál,

β) lehetőleg minél kevesebb fajta gömbháromszög-oldal és gömbháromszög forduljon elő, lehetőleg minél több legyen az egyenlő gömbháromszög-oldal és az egybevágó gömbháromszög,

γ) a gömbháromszög-oldalak és a gömbháromszögek lehetőleg csak kevéssé térjenek el egymástól, azaz a felosztás lehetőleg egyenletes legyen. Megköveteljük, hogy teljesüljön a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés feltétele.

A felosztási probléma feltételeit kielégítő gömbi hálóalakzathoz tartozik egy poliéder, amely eleget tesz az eredeti probléma kikötéseinek.

Vizsgálatainkat az egységsugarú gömbön végezzük.

A szabályos és félig szabályos testek között vannak olyanok, amelyek változatlan alakban vagy *gúla-kiegészítéssel* a feltételeknek a c), ill. az α) kivételével eleget tesznek. Ahhoz, hogy a c), ill. az α) feltételt is kielégítsük, ezeket a poliédereket ill. gömbi vetületüket tovább fogjuk osztani mindaddig, amíg csak nem kerülnek az élek ill. oldalhosszak a megjelölt korlát alá.

Megvizsgáljuk, hogy $e_k = 1, 2, 3$ (lapszerkezeteknél $l_k = 1, 2$) mellett melyek azok a poliéderek, amelyeknél a leghosszabb és legrövidebb él hosszának hányadosa a legkisebb. Az így kiadódó poliéderek gömbi hálózatát felosztás segítségével be fogjuk sűríteni, és az ily módon nyert hálóalakzatok közül fogjuk majd kiválasztani a legsűrűbb hálózatúakat.

Elvben meg kellene még vizsgálni, hogy a gömbfelület egy bizonyos legsűrűbb háromszög-felosztása valamely korábbi gömbi alakzathból (pl. gömbi ikozaéderből) valamilyen továbbosztás által áll-e elő (a korábbi alakzat minden csúcsa csúcsa lesz a továbbosztott alakzatnak is), de ezzel most itt nem foglalkozunk.

6. A szabályos testek és gúla-kiegészítései

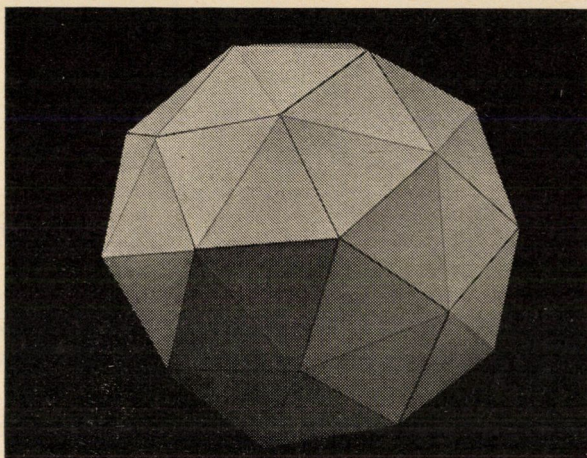
Most tekintsünk el az 5. pont c), ill. α) feltételétől!

Rúdszerkezetek esetében azok a poliéderek, melyekre $e_k = 1$, és a többi feltételnek eleget tesznek, valamilyen szabályos testek. Ezek között, mint láttuk, az ikozaéder elégíti ki a legjobban a feltételeket.

Lapszerkezetek esetében $l_k = 1$ -re a többi feltételt legjobban kielégítő poliéder a következőképpen származtatható.

Tekintsük a gömb beírt szabályos pentagondodekaéderét. A dodekaéder lapjai szabályos ötszögek (egy csúcsban három él találkozik). A lapok közép-

pontját a dodekaéder középpontjából vetítsük a gömbfelületre. Ezeket a vetületi pontokat egyenesszakaszok segítségével kössük össze a megfelelő lapokat határoló élek pontjaival. Ezzel a dodekaéder minden lapjára szabályos gúlát állítottunk, amelynek a csúcsa a gömbfelületen van. A gúlapalástok a gömb egy beírt konvex poliéderét adják (4. ábra), amelyet $(5,5,5)_g$ -vel fogunk jelölni. (Az $(5,5,5)$ jelenti a dodekaédert. Ez a jelölés összhangban van az Archimedes-féle poliéderekre a 3.6. pontban adott jelöléssel. A g index arra utal, hogy a poliéder az $(5,5,5)$ -ből gúla-kiegészítéssel adódott.) Az $(5,5,5)_g$ poliédert 60 egybevágó egyenlőszárú háromszög határolja. A kétfajta él hosszának aránya 1,11. A dimenzió nélküli jellemző adatokat az V. táblázatban $n = 1$ -nél találjuk. Az $(5,5,5)_g$ csúcsaiban öt ill. hat él találkozik.



4. ábra. $(5,5,5)$

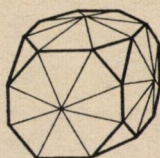
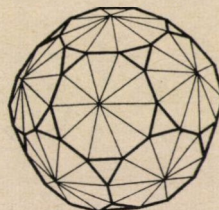
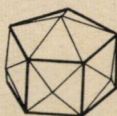
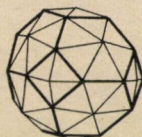
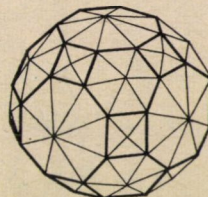
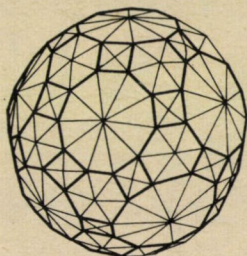
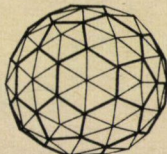
7. Az Archimedes-féle poliéderek és gúla-kiegészítései

Ha a $(4,4,n)$ és a $(3,3,3,n)$ testekből csak az egy rögzített n -hez (pl. $n = 5$ -höz) tartozókat vesszük figyelembe, akkor 15-féle kongruens szögletű félig szabályos testünk van. Ezek a következők:

| | | |
|-------------|-------------|---------------|
| $(3,6,6)$ | $(3,3,3,n)$ | $(3,3,3,3,4)$ |
| $(3,8,8)$ | $(3,4,3,4)$ | $(3,3,3,3,5)$ |
| $(3,10,10)$ | $(3,4,4,4)$ | |
| $(4,4,n)$ | $(3,4,5,4)$ | |
| $(4,6,6)$ | $(3,5,3,5)$ | |
| $(4,6,8)$ | | |
| $(4,6,10)$ | | |
| $(5,6,6)$ | | |

Most vegyük sorra az egységgömbbe beírt 15-féle archimedesi poliédert, és minden háromnál több csúcú sokszöglapra állítsunk szabályos gúlát úgy, ahogy azt a 6. pontban a dodekaéder esetében tettük. Így új poliéderekhez jutunk, melyeket $(i, j, \dots, m)_g$ -vel fogunk jelölni.

A g index ismét arra utal, hogy az új poliédert az (i, j, \dots, m) Archimedes-féle poliéderből gúla-kiegészítéssel kaptuk.

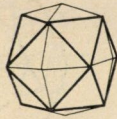
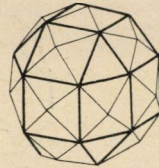
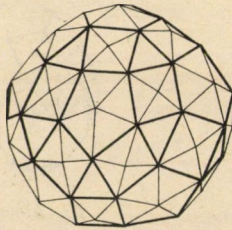
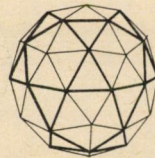
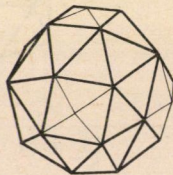
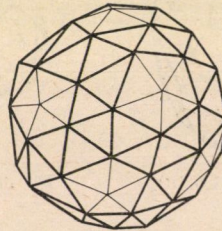
5. ábra. $(3,6,6)_g$ 6. ábra. $(3,8,8)_g$ 7. ábra. $(3,10,10)_g$ 8. ábra. $(4,4,5)_g$ 9. ábra. $(4,6,6)_g$ 10. ábra. $(4,6,8)_g$ 11. ábra. $(4,6,10)_g$ 12. ábra. $(5,6,6)_g$ 13. ábra. $(3,3,3,5)_g$

A kiegészített és most már csak háromszögekkel határolt poliédereket az 5—19. ábrán tüntettük fel. A poliéderek dimenzió nélküli jellemző adatait az I. táblázat tartalmazza. Ezek közül a poliéderek közül szeretnénk kiválasztani különböző e_k -ra azokat a poliédereket, amelyeknek a hálózata a legsűrűbb és amelyek az 5. pont feltételeit a c) ill. α) kivételével kielégítik.

A kiegészített poliéderek között egy poliéder van, amelynél $e_k = 1$. Ez a $(3,3,3,5)_g$ poliéder, amely azonos az ikozaéderrel.

Az e_k magasabb értékeire azonban nem tudjuk eldönteni az I. táblázat adataiból, hogy melyik poliéder elégíti ki a legjobban az 5. pont feltételeit, és

melyik poliéder hálózata sűrűbb, mert előfordul, hogy két poliédernél $c_k, c, e_k, e, l_k, l, s_k$ megegyezik, mint pl. a $(3,10,10)_g$ és $(3,3,3,3,5)_g$ esetében. Ezért meghatározzuk valamennyi poliédernél az élek hosszát, és előállítjuk minden poliédernél a leghosszabb és a legrövidebb él hosszának az arányát. Azokra a poliéderekre, amelyekre ez az arány 1-nél nem sokkal nagyobb, az 5. pont *d.2*) követelményét teljesítettnek tekintjük. Ezeket a poliédereket kiválaszt-

14. ábra. $(3,4,3,4)_g$ 15. ábra. $(3,4,4,4)_g$ 16. ábra. $(3,4,5,4)_g$ 17. ábra. $(3,5,3,5)_g$ 18. ábra. $(3,3,3,3,4)_g$ 19. ábra. $(3,3,3,3,5)_g$

juk és megállapítjuk, hogy közülük melyekre teljesül az 5. pont *d.1*) követelménye. A számítás eredményeit a II. táblázat mutatja. A II. táblázatban k -val az archimedesi poliéder élhosszát, a_1 -gyel, a_2 -vel, a_3 -mal a lapokra állított, különböző szabályos gúla oldálhosszát jelöltük.

Megállapíthatjuk, hogy a 15-féle poliéder közül csak ötre teljesül az, hogy a leghosszabb és a legrövidebb él hosszának aránya 1,2 alatt van. A többi poli-

I. táblázat

Szabályos gúlákkal kiegészített Archimedes-féle poliéderek dimenzió nélküli jellemző adatai

| Poliéder | c_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|------------------------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|
| * $(3,6,6)_g$ | 2 | 16 | 2 | 42 | 2 | 28 | 3 |
| $(3,8,8)_g$ | 2 | 30 | 2 | 84 | 2 | 56 | 3 |
| $(3,10,10)_g$ | 2 | 72 | 2 | 210 | 2 | 140 | 3 |
| $(4,4,n)_g, n = 5$ | 3 | 17 | 3 | 45 | 2 | 30 | 4 |
| $(4,6,6)_g$ | 3 | 32 | 3 | 108 | 2 | 72 | 4 |
| $(4,6,8)_g$ | 4 | 74 | 4 | 216 | 3 | 144 | 6 |
| $(4,6,10)_g$ | (5) | 182 | 4 | 540 | 3 | 360 | 6 |
| * $(5,6,6)_g$ | 3 | 92 | 3 | 270 | 2 | 180 | 4 |
| * $(3,3,3,n)_g, n = 5$ | 1 | 12 | 1 | 30 | 1 | 20 | 1 |
| $(3,4,3,4)_g$ | 2 | 18 | 2 | 48 | 2 | 32 | 2 |
| $(3,4,4,4)_g$ | 2 | 42 | 2 | 120 | 2 | 80 | 3 |
| $(3,4,5,4)_g$ | 3 | 102 | 3 | 300 | 3 | 200 | 4 |
| * $(3,5,3,5)_g$ | 2 | 42 | 2 | 120 | 2 | 80 | 2 |
| $(3,3,3,3,4)_g$ | 2 | 30 | 2 | 84 | 2 | 56 | 3 |
| * $(3,3,3,3,5)_g$ | 2 | 72 | 2 | 210 | 2 | 140 | 3 |

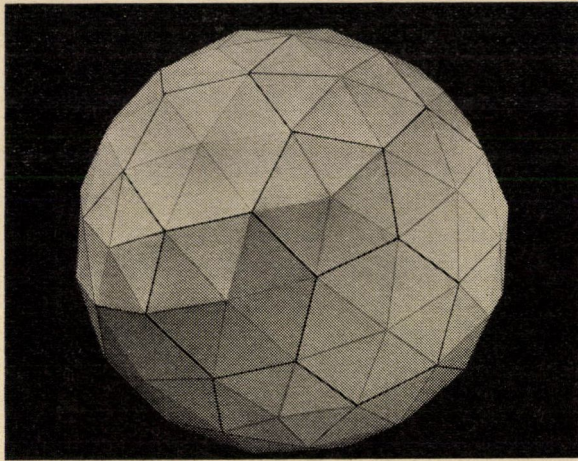
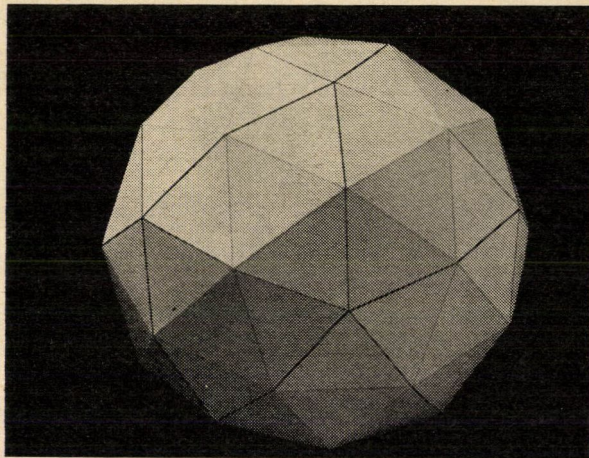
A *-gal jelölt poliéderek eleget tesznek az 5. pont d. 2. követelményének. A zárójelbe tett számok akkor érvényesek, ha két azonos méretű elemet, melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe, különbözőknek tekintünk.

II. táblázat

Egységgömbbe beírt, szabályos gúlákkal kiegészített Archimedes-féle poliéderek élhosszai

| Sor-szám | $(i, j, \dots, m)_g$ | k | a_1 | a_2 | a_3 | $\frac{\max(k, a_1, a_2, a_3)}{\min(k, a_1, a_2, a_3)}$ |
|----------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|---|
| 1 | * $(3,6,6)_g$ | 0,8528 | 0,9775 | — | — | 1,15 |
| 2 | $(3,8,8)_g$ | 0,5622 | 0,8017 | — | — | 1,43 |
| 3 | $(3,10,10)_g$ | 0,3363 | 0,5675 | — | — | 1,69 |
| 4 | $(4,4,5)_g$ | 1,0135 | 0,7778 | 0,9932 | — | 1,30 |
| 5 | $(4,6,6)_g$ | 0,6325 | 0,4595 | 0,6714 | — | 1,46 |
| 6 | $(4,6,8)_g$ | 0,4315 | 0,3088 | 0,4424 | 0,5900 | 1,91 |
| 7 | $(4,6,10)_g$ | 0,2630 | 0,1868 | 0,2653 | 0,4360 | 2,33 |
| 8 | * $(5,6,6)_g$ | 0,4035 | 0,3486 | 0,4124 | — | 1,18 |
| 9 | * $(3,3,3,5)_g$ (ikozaéder) | 1,0515 | 1,0515 | — | — | 1 |
| 10 | $(3,4,3,4)_g$ | 1,0000 | 0,7654 | — | — | 1,31 |
| 11 | $(3,4,4,4)_g$ | 0,7148 | 0,5237 | — | — | 1,36 |
| 12 | $(3,4,5,4)_g$ | 0,4478 | 0,3208 | 0,3883 | — | 1,40 |
| 13 | * $(3,5,3,5)_g$ | 0,6178 | 0,5465 | — | — | 1,13 |
| 14 | $(3,3,3,3,4)_g$ | 0,7724 | 0,5698 | — | — | 1,36 |
| 15 | * $(3,3,3,3,5)_g$ | 0,4638 | 0,4028 | — | — | 1,15 |

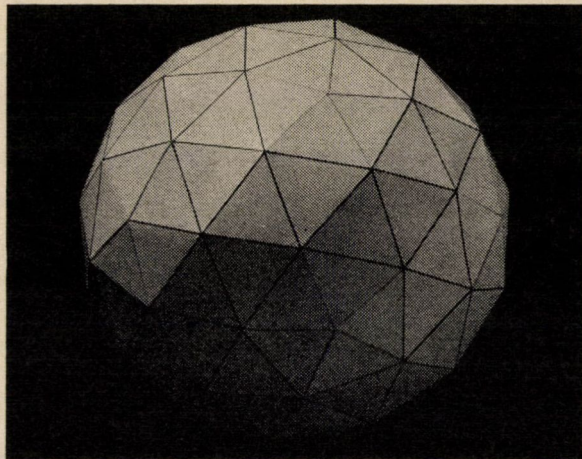
A *-gal jelölt poliéderek eleget tesznek az 5. pont d. 2. követelményének.

20. ábra. $(5,6,6)_g$ 21. ábra. $(3,5,3,5)_g$

édernél ez az arány 1,3 vagy annál nagyobb. Az az öt poliéder, amelyre tehát teljesítettnek tekintjük az 5. pont d.2) követelményét, a következő:

$(3,6,6)_g$ (5. ábra), $(5,6,6)_g$ (12. és 20. ábra), $(3,3,3,5)_g$
 $(3. \text{ és } 13. \text{ ábra}),$ $(3,5,3,5)_g$ (17. és 21. ábra) és $(3,3,3,3,5)_g$
 (19. és 22. ábra).

Ezen poliéderek csúcsaiban öt ill. hat él találkozik. Ebből az öt poliéderből — mivel közöttük már nincs kettő, melynél c, e, l megegyeznék — kiválasztható az $e_k = 2$ és $e_k = 3$ értékekhez tartozó, legtöbb lapból álló poliéder.

22. ábra. $(3,3,3,3,5)_g$

Ezek:

 $e_k = 2$ esetén a $(3,3,3,3,5)_g$, $e_k = 3$ esetén pedig az $(5,6,6)_g$.

A $(3,3,3,3,5)_g$ kétfajta háromszöglapból áll. Az egyik szabályos, a másik egyenlőszárú háromszög. Az $(5,6,6)_g$ kétfajta egyenlőszárú háromszöglapból áll.

8. Hálózatsűrítés és gömbháromszög-felosztási módszerek

A 6. és 7. pontban láttuk, hogy azoknál a poliédereknél, melyekre az 5. pont *d.2)* követelménye teljesül, és amelyeknek több lapjuk van, mint az oktaédereknél, minden csúcsban öt vagy hat él találkozik. Az ikozaédert, az $(5,5,5)_g$ -t, a $(3,3,3,3,5)_g$ -t és az $(5,6,6)_g$ -t a felosztás alapalakzatának fogjuk tekinteni, és gömbi hálózataikat bizonyos elvek szerint sűríteni fogjuk, ügyelve arra, hogy a további felosztással előállított poliédernek is minden csúcsában öt vagy hat él találkozzék.

Az alapalakzatok gömbi hálózatainak sűrítése a határoló gömbháromszögek kisebb gömbháromszögekre való felosztásával történik. Az alábbiakban ismertetünk néhány felosztási eljárást.

8.1. Általános gömbháromszögekre is alkalmazható felosztási módszerek. (Különböző háromszögekből álló hálózat sűrítése)

8.1. 1) Oldalfelezéses eljárás

Kössük össze a gömbháromszög oldalfelező pontjait főkörívvel. Így az eredeti gömbháromszöget négy gömbháromszögre osztottuk. A kiadódó gömbháromszögek oldalfelező pontjait ismét kössük össze főkörívvel és így

tovább. A felosztást tetszőleges sűrűségi fokig folytathatjuk. Ezzel az eljárással az eredeti gömbháromszög oldalainak (2^k számú) egyenlő részekre történő felosztását érjük el.

8.1. 2) *A gömbháromszög köré írható kör középpontjával történő sűrítés*

Tekintsük egy tetszőleges gömbháromszögekből álló gömbi alakzat egy gömbháromszögét. A gömbháromszög köré írható kör középpontját kössük össze főkörívvel a gömbháromszög három csúcsával és a gömbháromszöggel közös oldalú három szomszédos gömbháromszög köré írható körnek a középpontjával. Ezt az eljárást minden gömbháromszögre elvégezve új, az eredetihez képest háromszor sűrűbb hálózatot nyerünk.

8.2. *Egyenlőszárú gömbháromszögek Fuller-féle felosztása*

Az egyenlőszárú gömbháromszögek legkevesebb különböző oldalhosszal járó felosztása FULLERTől ered. Módszerét [3] alapján ismertetjük.

Tekintsünk egy egyenlőszárú, hegyesszögű gömbháromszöget. Ennek gömbi szimmetriavonala merőlegesen felezi az alapot és felezi a gömbháromszög ω szárszögét is. Ezután osszuk fel a szimmetriavonalnak a háromszögbe eső szakaszát n egyenlő hosszúságú ívre (23.a ábra). Az osztópontokban vegyük a szimmetriavonalra merőleges főköríveket. Ezek metszik a gömbháromszög szarait. A gömbháromszög szárszögnél levő csúcsától kiindulva a két száron kapott metszéspontokat rendre kössük össze főkörívvel segítségével a szimmetriavonalon levő minden második osztóponttal. Így csak a szár feléig tudunk eljutni. Ezért forgassuk el az egyenlő részekre felosztott szimmetriavonal-szakaszt a gömbön az alap felezőpontja körül 180° -kal, és az így előálló osztópontokkal folytassuk az eljárást. Ezáltal az eredeti egyenlőszárú gömbháromszöget n^2 darab gömbháromszögre osztottuk. A szimmetriavonal irányában egymás alatt sorra olyan gömbháromszögek állnak, melyek tükrözéssel fedésbe hozhatók. Az eljárás felosztja az eredeti gömbháromszög szarát n különböző hosszúságú főkörívre, az alapot pedig $n/2$ ill. $(n + 1)/2$ különböző hosszúságú főkörívre, attól függően, hogy n páros-e vagy páratlan. Az alap feletti első osztó főköríven $n/2$ ill. $(n - 1)/2$ különböző hosszúságú főkörív keletkezik n páros vagy páratlan voltától függően.

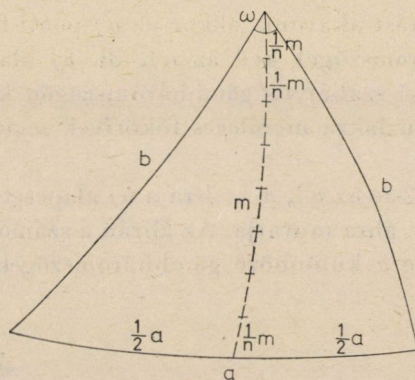
Ez a felosztás tehát egy egyenlőszárú gömbháromszögben

$2n$ különböző oldalhosszat,

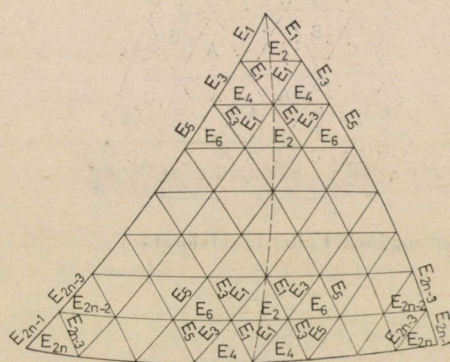
n ill. $2n - 1$ különböző gömbháromszöget (attól függően, hogy két azonos méretű gömbháromszöget, melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe, azonosnak tekintünk-e vagy nem), és

n^2 gömbháromszöget eredményez.

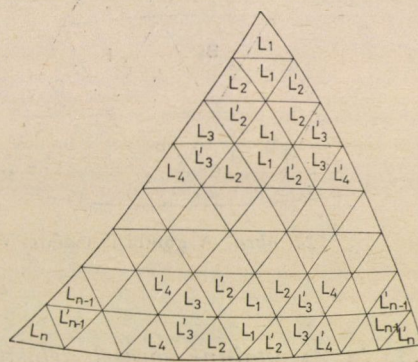
A felosztás eredményét a 23.b és 23.c ábra szemlélteti arra az esetre, midőn n páros.



23/a ábra. Egyenlőszárú gömbháromszög Fuller-féle felosztása



23/b. ábra.



23/c ábra.

8.3. Egyenlőoldalú gömbháromszögek felosztásai

8.3. 1) Egyenlőoldalú gömbháromszögek Fuller-féle felosztása

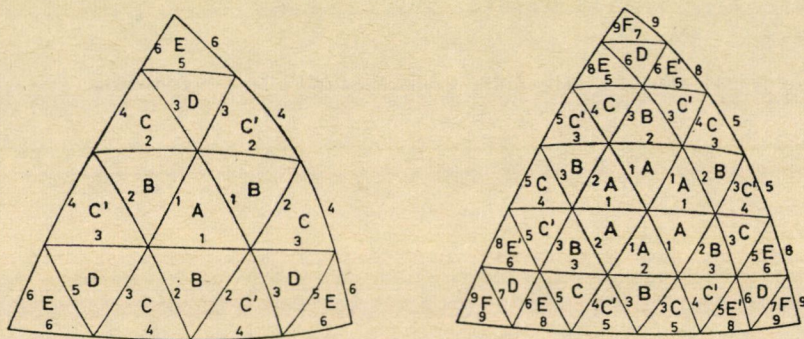
Fuller módszerét [5] és [6] alapján ismertetjük. Az egyenlőoldalú gömbháromszög felosztását lényegében a következő két alapesetre vezeti vissza:

a) Az egyenlőoldalú gömbháromszög oldalfelező pontjait kössük össze főkörívvel. Ezzel úgy osztottuk fel a gömbháromszöget, hogy belsejében egy újabb egyenlőoldalú gömbháromszög keletkezik, amelynek csúcsai az eredeti egyenlőoldalú gömbháromszög oldalfelező pontjai.

b) Az egyenlőoldalú gömbháromszög centrumán keresztül vegyünk fel a szimmetriavonalakra merőleges főköríveket. Ezek az oldalakkal hat metszéspontot határoznak meg. A gömbháromszög csúcsaihoz legközelebb eső két-két metszéspontot főkörívvel összekötve egy olyan felosztáshoz jutunk, mely az eredeti háromszög belsejében szabályos gömbi hatszöget eredményez.

Ha sűrűbb felosztást akarunk, akkor az *a*) ponti felosztásban keletkező egyenlőoldalú gömbháromszöget kell az *a*), ill. *b*) alapeset valamelyikével tovább osztani. A belső szabályos gömbháromszögön kívül keletkező osztópontok a szimmetriavonalakra merőleges főkörívek segítségével egyértelműen kiadódnak.

A felosztást $n = 2$ -re az *a*), $n = 3$ -ra a *b*) alapeset adja, $n = 4$ és $n = 6$ esetére a felosztást a 24. ábra mutatja. Az ábrán a számok a különböző oldalakat, a nagybetűk pedig a különböző gömbháromszögeket jelölik.



24. ábra. A gömbi ikozaéder egy háromszögének Fuller-féle felosztása

8.3. 2) Az általunk javasolt felosztás

Osszuk fel az egyenlőoldalú gömbháromszög mindhárom oldalát n egyenlő hosszú ívre. A gömbháromszög mindegyik csúcsánál a csúcstól számított első osztópontokat kössük össze főkörívvel. Vegyük a háromszög csúcsán áthaladó gömbi magasságvonalat (szimmetriavonalat) és a csúcstól számított második szakaszt a felosztott háromszög-oldalon, valamint e szakasz gömbi felező merőlegesét. Ez utóbbi metszi a háromszög magasságvonalát. A metszéspontot főkörívvel összekötve a csúcstól számított első és második osztóponttal, egyenlőszárú gömbháromszöget kapunk. Állítsunk az eredeti gömbháromszög oldalain minden fennmaradó szakaszra ugyanilyen egyenlőszárú gömbháromszöget. Eddig három különböző oldalhossz adódott. Az egyenlőszárú háromszögek szárszögeinél levő csúcsai az eredeti gömbháromszög egy oldala mentén egymástól egyenlő gömbi távolságokra lesznek, hiszen ezek a csúcsok a gömbön egy, a gömbháromszög oldalának síkjával párhuzamos síkban is benne vannak. Kössük össze főkörívvel ezeket a csúcsokat. Így adódik a negyedik-féle oldalhossz. Ekkor az eredeti gömbháromszög belsejében az eredeti gömbháromszögre emlékeztető alakzatot kapunk, amelynek „oldalai” (ezek most gömbi töröttvonalak) a töréspontok által $n-2$ egyenlő részre vannak felosztva.

Az eljárást addig kell ismételni, míg vagy egy pontban, vagy egy gömbháromszögben végződik az eljárás attól függően, hogy n osztható volt-e hárommal, vagy nem.

Ennél a módszernél a felosztással keletkezett gömbháromszögek vagy mind, vagy egy kivételével egyenlőszárúak (ez az egy a centrális helyzetű szabályos gömbháromszög), attól függően, hogy n osztható-e hárommal, vagy sem.

9. Hálózatsűrítéssel előállított poliéderek

A 8. pontban a 8.1. 2) kivételével arra adtunk néhány fontos eljárást, hogy hogyan lehet egy gömbháromszögekből álló gömbi hálóalakzat egy gömbháromszögét felosztani úgy, hogy a felosztással lehetőleg kevés új oldalhossz adódjék. Most a 8. pontban ismertetett felosztási módszerekkel a gömbi hálóalakzat valamennyi gömbháromszögét felosztjuk. Ezzel sűrűbb hálózatú, gömbháromszögekből álló gömbi hálóalakzathoz jutunk. Ebben a pontban az így előállított gömbi hálóalakzatokhoz tartozó (3.8. és 5. pont) poliéderek tulajdonságait fogjuk vizsgálni.

9.1. A gömbi ikozaéder hálózatának sűrítése

A gömbi ikozaéder 8.1. 1) szerinti felosztása második lépésben — ha első lépésként magát az ikozaédert fogadjuk el — a $(3,5,3,5)_g$ alakzatot szolgáltatja. A hálózatsűrítés néhány első lépését a III. táblázat *a*) pontja tartalmazza.

A 8.1. 2) szerinti hálózatsűrítés második lépéseként az $(5,5,5)_g$ alakzatot nyerjük. Az n további értékeire a keletkező alakzatok adatait a III. táblázatban, a *b*) pontban találjuk meg.

A 8.3. 1) pontban ismertetett felosztást FULLER kifejezetten a gömbi ikozaéderre dolgozta ki. Az ebben a felosztási rendszerben rejlő szabályosság abban is kifejezésre jut, hogy $n = 2$ -re a $(3,5,3,5)_g$, $n = 3$ -ra az $(5,6,6)_g$ alakzat adódik (ezeket korábban az archimedesi poliéderekből származtattuk). FULLER gömbi ikozaéder-felosztása tehát bizonyos n értékekre egyben *kiadja a gömbi $(5,6,6)_g$ alakzat felosztását is.*

Az n magasabb értékeire az előzőknél kedvezőbb felosztást nyújt a 8.3. 2)-ben javasolt eljárás. Ennél az eljárásnál, ha egy oldalt n részre osztottunk fel, akkor

$$\begin{aligned}c_k &= n, \\c &= 10 n^2 + 2, \\e_k &= n, \\e &= 30 n^2, \\l &= 20 n^2.\end{aligned}$$

III. táblázat

Gömbi ikozaéder hálózatának sűrítése

a) oldalfelvezéses eljárással:

| Sorszám n | e_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|----------------|------------|-----|-------|------|-------------------|------|-------|
| 2 | 2 | 42 | 2 | 120 | 2 | 80 | 2 |
| 3 | 4 | 162 | 5 | 480 | 5 | 320 | 5 |
| 4 | 10 (12) | 642 | 15 | 1920 | (6) 15 (22) | 1280 | 20 |

b) a háromszögek köré írható körök középpontjainak segítségével:

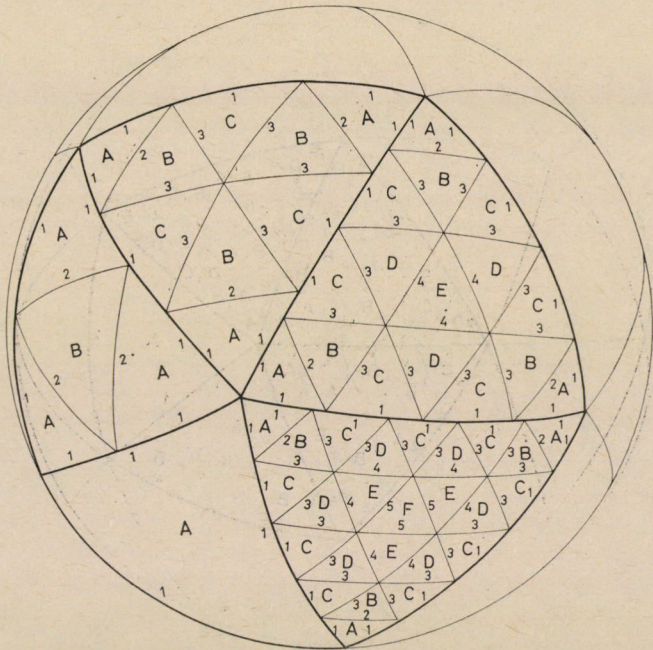
| Sorszám n | e_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|----------------|-------|-----|-------|-----|----------|-----|-------|
| 2 | 2 | 32 | 2 | 90 | 1 | 60 | 2 |
| 3 | 3 | 92 | 3 | 270 | 2 | 180 | 4 |
| 4 | 6 | 272 | 6 | 810 | 4 (5) | 540 | 10 |

c) általunk javasolt felosztással:

| Sorszám n | e_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|----------------|--------------------|------|-------|------|-------|------|-------|
| 1 | 1 | 12 | 1 | 30 | 1 | 20 | 1 |
| 2 | 2 | 42 | 2 | 120 | 2 | 80 | 2 |
| 3 | 3 | 92 | 3 | 270 | 3 | 180 | 4 |
| 4 | 4 | 162 | 4 | 480 | 5 | 320 | 6 |
| 5 | 5 | 252 | 5 | 750 | 6 | 500 | 7 |
| 6 | 6 | 362 | 6 | 1080 | 7 | 720 | 9 |
| 7 | (7) 7 | 492 | 7 | 1470 | 9 | 980 | 11 |
| 8 | (8) 8 | 642 | 8 | 1920 | 10 | 1280 | 12 |
| 9 | (9) 9 | 812 | 9 | 2430 | 11 | 1620 | 14 |
| 10 | (11) 10 (12) | 1002 | 10 | 3000 | 13 | 2000 | 16 |

A zárójelbe tett számok akkor érvényesek, ha két azonos meretű elemet, amelyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe, különbözőknek tekintünk.

Az ezzel a módszerrel történő hálózatsűrítés első öt lépését a 25. ábrán szemléltetjük. A különböző számok a különböző oldalakat, a különböző betűk a különböző gömbháromszögeket jelölik. A keletkező alakzatok adatait a III. táblázat c) pontjába gyűjtöttük össze.



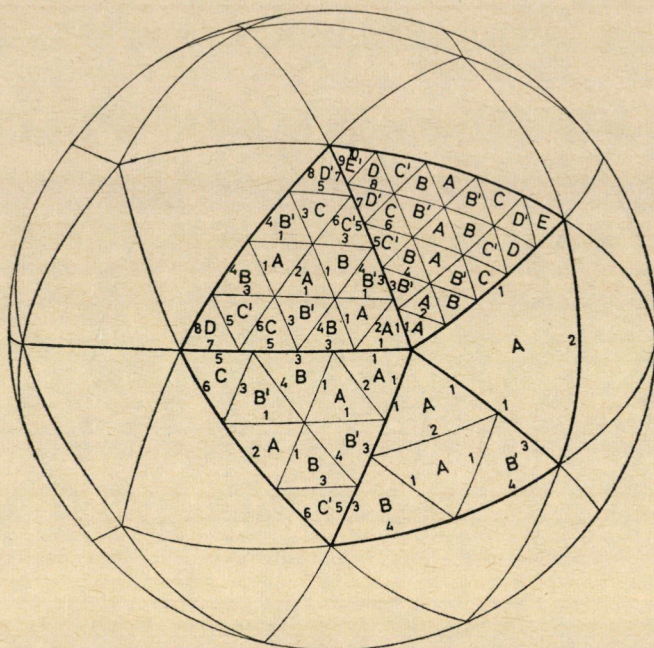
25. ábra. A gömbi ikozaéder hálózatának sűrítése $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén

9.2. A gömbi $(5,5,5)_g$ alakzat hálózatának sűrítése

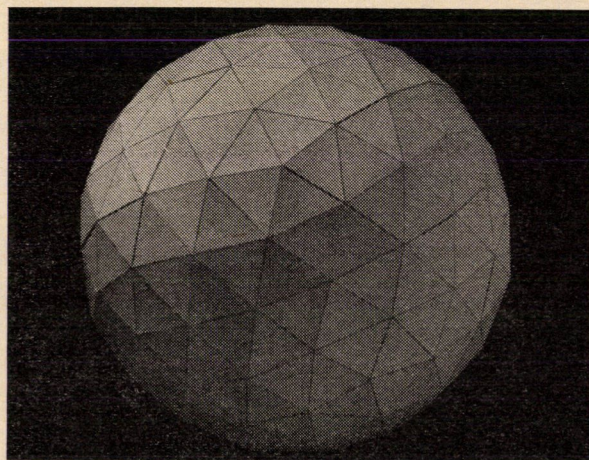
A gömbi $(5,5,5)_g$ alakzat legeredményesebb felosztását a 8.2. pontban leírt módszerrel érhetjük el. Ezt a módszert FULLER lényegében éppen az $(5,5,5)_g$ gömbi hálózatának besűrítésére alkalmazta. Ha egy oldalt n részre osztottunk fel, akkor a keletkező poliéder jellemző, dimenzió nélküli adatai a következők lesznek:

$$\begin{aligned}
 c_k &= 2n, \\
 c &= 30n^2 + 2, \\
 e_k &= 2n, \\
 e &= 90n^2, \\
 l_k &= n(2n - 1, \text{ ha két azonos méretű olyan lapot, amelyek csak} \\
 &\quad \text{tükrözéssel hozhatók fedésbe, különbözőknek tekintünk}), \\
 l &= 60n^2, \\
 s_k &= 3n - 1.
 \end{aligned}$$

A felosztást az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetekre a 26. ábra mutatja. Az $n = 2$ -re kiadódó poliédert az 1. és 27. ábrán láthatjuk. A jellemző adatokat táblázathba is foglaltuk (IV. táblázat).



26. ábra. A gömbi $(5,5,5)_g$ alakzat hálózatának Fuller-féle felosztása $n = 1,2,3,4,5$ esetén



27. ábra. Az $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztása $n = 2$ esetén

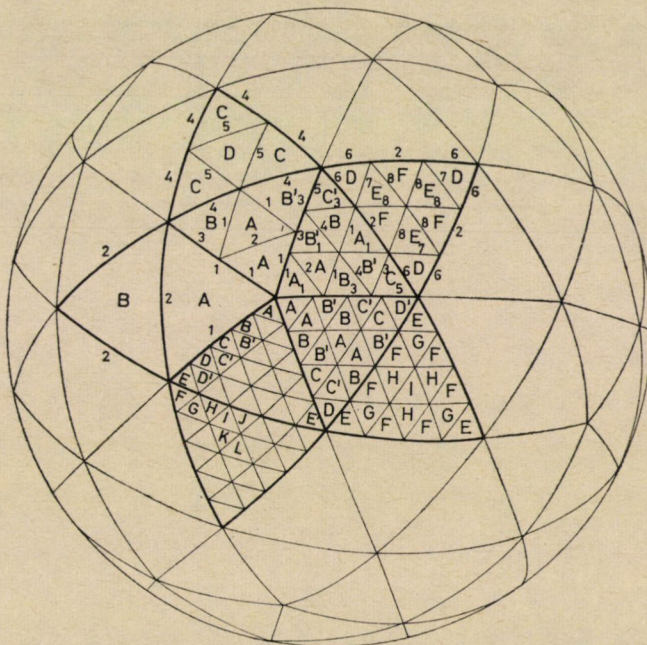
IV. táblázat
Gömbi $(5,5,5)_g$ alakzat Fuller-féle hálózatsűrítése

| Sorszám n | e_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|----------------|-------|-----|-------|------|-----------------|------|-------|
| 1 | 2 | 32 | 2 | 90 | 1 | 60 | 2 |
| 2 | 4 | 122 | 4 | 360 | 2 | 240 | 5 |
| 3 | 6 | 272 | 6 | 810 | (3) 3 | 540 | 8 |
| 4 | 8 | 482 | 8 | 1440 | (5) 4 | 960 | 11 |
| 5 | 10 | 752 | 10 | 2250 | (7) 5 (9) | 1500 | 14 |

A zárójelbe tett számok akkor érvényesek, ha két azonos méretű elemet, melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe, különbözőknek tekintünk.

9.3. A gömbi $(3,3,3,3,5)_g$ alakzat hálózatának sűrítése

A $(3,3,3,3,5)_g$ poliéder gömbi hálózata, mint láttuk, egyenlőszárú és egyenlőoldalú gömbháromszögekből áll. Az egyenlőszárú gömbháromszögek is és az egyenlőoldalú gömbháromszögek is egybevágók. Egy egyenlőszárú gömbháromszöghöz a száraknál ismét egyenlőszárú gömbháromszögek csatlakoznak, az alpnál egyenlőoldalú gömbháromszög kapcsolódik. A hálózatsűrítést a következő módon hajtjuk végre:



28. ábra. A gömbi $(3,3,3,3,5)_g$ alakzat hálózatának sűrítése $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén

Az egyenlőszárú gömbháromszöget osszuk fel a 8.2. pontba foglaltak szerint. Ez a háromszög-felosztás indukál egy szimmetrikus felosztást az egyenlőszárú gömbháromszög alapján. Ugyanezt a felosztást vigyük át az egyenlőoldalú gömbháromszög másik két oldalára is. Ezután alkalmazzuk a 8.3. 2)-ben leírt módszert. Mivel az oldalt nem egyenlő szakaszokra osztottuk fel, és így a szakaszokra nem lehet egybevágó gömbháromszögeket helyezni, a 8.3. 2)-t olyképpen módosítsuk, hogy a szakaszokra állított egyenlőszárú gömbháromszögeknek a szárhossza legyen azonos. A felosztás első lépéseit a 28. ábrán mutatjuk be. Az alakzatokhoz tartozó poliéderek adatait az V. táblázat c) pontja alatt találjuk. Az összehasonlítás kedvéért a 8.1. 1) és 8.1. 2) szerinti felosztást is elvégeztük $n = 2$ -re (V. táblázat a) és b)).

V. táblázat

Gömbi $(3,3,3,3,5)_g$ alakzat hálózatának sűrítése

a) oldalfelzéses eljárással:

| Sorszám n | c_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|----------------|-------|-----|-------|-----|----------|-----|-------|
| 1 | 2 | 72 | 2 | 210 | 2 | 140 | 3 |
| 2 | 5 | 282 | 5 | 840 | 5 (6) | 560 | 7 |

b) a háromszögek köré írható körök középpontjainak segítségével:

| Sorszám n | c_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|----------------|-------|-----|-------|-----|----------|-----|-------|
| 1 | 2 | 72 | 2 | 210 | 2 | 140 | 3 |
| 2 | 5 | 212 | 5 | 630 | 3 (4) | 420 | 7 |

c) Fuller módszerének segítségével:

| Sorszám n | c_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|----------------|-------|------|-------|------|-----------|------|-------|
| 1 | 2 | 72 | 2 | 210 | 2 | 140 | 3 |
| 2 | 5 | 282 | 5 | 840 | 4 (5) | 560 | 7 |
| 3 | 8 | 632 | 8 | 1890 | 6 (8) | 1260 | 13 |
| 4 | 12 | 1122 | 11 | 3360 | 9 (12) | 2240 | 18 |

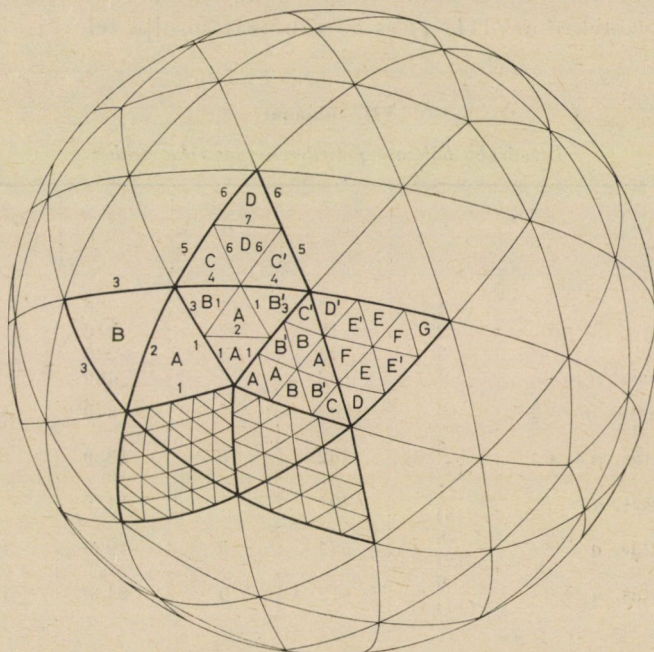
A zárójelbe tett számok akkor érvényesek, ha két azonos méretű elemet, melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe, különbözőeknek tekintünk.

9.4. A gömbi $(5,6,6)_g$ alakzat hálózatának sűrítése

Mint a 9.1-ben láttuk az $(5,6,6)_g$ poliéder gömbi hálózatának geodetikus vonalakkal való felosztása lényegében a gömbi ikozaéder 8.3. 1) szerinti felosztásának következménye.

Az $(5,6,6)_g$ poliéder gömbi hálózata kétfajta egyenlőszárú gömbháromszögből áll. Két különböző gömbháromszög az alapjával csatlakozik egymáshoz. Egyenlőszárú gömbháromszögekről lévén szó, alkalmazhatjuk a 8.2-ben előadott felosztási módszert. Ez $n = 2$ -re minden változtatás nélkül használható. $n > 2$ esetén már módosítani kell az eljárást.

Az egyik fajta egyenlőszárú gömbháromszöget osszuk fel a 8.2. szerint. Ez a háromszög-felosztás az alapon egy szimmetrikus felosztást eredményez. A másik egyenlőszárú gömbháromszöget már úgy kell felosztani, hogy az alapon kiadódó osztópontok azonosak legyenek azokkal az osztópontokkal, melyeket előzőleg kaptunk. Az alap osztópontjainak egyeztetése azt eredményezi, hogy n magasabb értékeire ez az eljárás már előnytelen lesz, e_k és l_k értékei nagyobbak lesznek — ugyanolyan sűrűség mellett — mint az előző módszerrel nyert poliédereknél. Az eljárást és az alakzatok adatait a 29. ábrán és a VI. táblázatban láthatjuk.



29. ábra. A gömbi $(5,6,6)_g$ alakzat hálózatának sűrítése $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén

VI. táblázat

Gömbi $(5,6,6)_g$ alakzat hálózatának sűrítése

| Sorszám n | e_k | c | e_k | e | l_k | l | e_k |
|----------------|-------|-----|-------|------|------------------|------|-------|
| 1 | 3 | 92 | 3 | 270 | 2 | 180 | 4 |
| 2 | 6 | 362 | 7 | 1080 | 4 | 720 | 9 |
| 3 | 10 | 812 | 11 | 2430 | (6) 7 (11) | 1620 | 16 |

A zárójelbe tett számok akkor érvényesek, ha két azonos méretű elemet, melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe, különbözőknek tekintünk.

10. Összehasonlítás és értékelés

Az irodalomból eddig ismert alakzatok mellett (ikozaéder, $(5,5,5)_g$, ezek FULLER-felosztásai, valamint az $(5,6,6)_g$) — részben FULLER eljárását is felhasználva — sikerült az itt közöltek szerint egy sor új alakzatot szerkeszteni. Ezzel mód nyílik arra, hogy az új felosztásokkal kapott, legsűrűbb hálózatú alakzatokat az eddig ismertekkel együtt az 5. pontban felállított követelményeket figyelembe véve e_k ill. l_k növekvő értékei szerint sorozatba állítsuk. A tárgyalat poliéderek közül a legsűrűbb hálózatúakat rúdszerkezetekre a VII. táblázat, lapszerkezetekre a VIII. a) és b) táblázat sorolja fel.

VII. táblázat

Legsűrűbb hálózatú poliéderek rúdszerkezetekhez

| Alakzat | e_k | c | e_k | e | k | l |
|------------------------------------|-----------|-----|-------|------|----------|------|
| ikozaéder | 1 | 12 | 1 | 30 | 1 | 20 |
| $(3,3,3,3,5)_g$ | 2 | 72 | 2 | 210 | 2 | 140 |
| $(5,6,6)_g$ | 3 | 92 | 3 | 270 | 2 | 180 |
| ikozaéder felosztás, $n = 4$ | 4 | 162 | 4 | 480 | 5 | 320 |
| $(3,3,3,3,5)_g$ felosztás, $n = 2$ | 5 | 282 | 5 | 840 | 4 (5) | 560 |
| ikozaéder felosztás, $n = 6$ | 6 (7) | 362 | 6 | 1080 | 7 | 720 |
| ikozaéder felosztás, $n = 7$ | 7 (8) | 492 | 7 | 1470 | 9 | 980 |
| ikozaéder felosztás, $n = 8$ | 8 (9) | 642 | 8 | 1920 | 10 | 1280 |
| ikozaéder felosztás, $n = 9$ | 9 (11) | 812 | 9 | 2430 | 11 | 1620 |

A zárójelbe tett számok akkor érvényesek, ha két azonos méretű elemet, melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe, különbözőknek tekintünk.

VIII. táblázat

Legsűrűbb hálózatú poliéderek lapszerkezetekhez

a) Ha valamely két azonos méretű háromszöglapot — melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe — azonosaknak tekintünk:

| Alakzat | c_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|---------------------------------------|-------|-----|-------|------|-------|------|-------|
| $(5,5,5)_g$ | 2 | 32 | 2 | 90 | 1 | 60 | 2 |
| $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztás, $n = 2$ | 4 | 122 | 4 | 360 | 2 | 240 | 5 |
| $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztás, $n = 3$ | 6 | 272 | 6 | 810 | 3 | 540 | 8 |
| $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztás, $n = 4$ | 8 | 482 | 8 | 1440 | 4 | 960 | 11 |
| $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztás, $n = 5$ | 10 | 752 | 10 | 2250 | 5 | 1500 | 14 |

b) Ha valamely két azonos méretű háromszöglapot — melyek csak tükrözéssel hozhatók fedésbe — különbözőknek tekintünk:

| Alakzat | c_k | c | e_k | e | l_k | l | s_k |
|--|-------|-----|-------|------|-------|------|-------|
| $(5,5,5)_g$ | 2 | 32 | 2 | 90 | 1 | 60 | 2 |
| $(5,6,6)_g$ | 3 | 92 | 3 | 270 | 2 | 180 | 4 |
| $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztás, $n = 2$ | 4 | 122 | 4 | 360 | 3 | 240 | 5 |
| $(3,3,3,3,5)_g$ háromszög köré írható körök középpontjaival sűrítve, $n = 2$ | 5 | 212 | 5 | 630 | 4 | 420 | 7 |
| $(3,3,3,3,5)_g$ felosztás, $n = 2$ | 5 | 282 | 5 | 840 | 5 | 560 | 7 |
| $(5,6,6)_g$ felosztás, $n = 2$ | 6 | 362 | 7 | 1080 | 6 | 720 | 9 |
| $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztás, $n = 4$ | 8 | 482 | 8 | 1440 | 7 | 960 | 11 |
| $(3,3,3,3,5)_g$ felosztás, $n = 3$ | 8 | 632 | 8 | 1890 | 8 | 1260 | 13 |
| $(5,5,5)_g$ Fuller-felosztás, $n = 5$ | 10 | 752 | 10 | 2250 | 9 | 1500 | 14 |

A kapott eredményekből kitűnik, hogy *lapszerkezeteknél*, ha az azonos méretű, de ellentétes körüljárású háromszöglapokat azonosaknak tekintjük, akkor kizárólag az $(5,5,5)_g$ és annak Fuller-féle felosztással (8.2) származtatott poliéderei adják a legsűrűbb élhálózatot. Ha az azonos méretű, de ellentétes körüljárású háromszög-lapokat nem tekintjük azonosaknak, akkor az $(5,5,5)_g$ és annak Fuller-féle poliéderei, valamint az $(5,6,6)_g$, az általunk ismertetett $(3,3,3,3,5)_g$ és az ezek felosztásaival keletkező poliéderek váltakozva lesznek a legsűrűbb élhálózatú poliéderek.

A gyakorlat szempontjából oly fontos *rúdszerkezetek* esetében n növekvő értékeit tekintve az ikozaéder és a két félig szabályos testből származtatott poliéder (a $(3,3,3,3,5)_g$ és az $(5,6,6)_g$) után a legsűrűbb élhálózatot azok a poliéderek adják, amelyek az ikozaéderből az általunk javasolt 8.3. 2) szerinti felosztással keletkeznek. Megállapíthatjuk tehát, hogy a $(3,3,3,3,5)_g$ poliéder és ennek egy továbbosztott poliédere, valamint a gömbi ikozaéder 8.3.2) szerinti felosztásának segítségével előállított poliéderek $n \geq 2$, $n \neq 3$ értékekre minden eddigi poliédernél jobban teljesítik az 5. pontban kitűzött feltételeket.

IRODALOM

1. BRÜCKNER, M.: Vielecke und Vielfache. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1900
2. BURAY Z. és KÁDÁR I.: Teherviselő alumínium mérnöki szerkezetek. ÉM Építésügyi Dokumentációs Iroda, Budapest 1965
3. DOERNACH, R.: Sphärische Raumfachwerke. *Der Stahlbau* 29 (1960), 97—104
4. FEJES TÓTH, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953
5. FULLER, R. B.: Geodesic Tent. United States Patent Office, patent 2,914,074, Nov. 24, 1959
6. FULLER, R. B.: Item „M”. Boston Blue Print Data Archive, év nélkül.
7. HAJÓS GY.: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest 1964
8. MAKOWSKI, Z. S.: Räumliche Tragwerke aus Stahl. Stahleisen-Verlag, Düsseldorf 1963
9. MCHALE, J.: R. Buckminster Fuller. Otto Maier Verlag, Ravensburg 1964
10. TUPOLEV, M. S.: Geometrie spherique et coupoles prefabriquées. *L'Architecture d'Aujourd'hui* No. 141, 1968 dec.—1969. jan., 62—64. o.

Spherical Grids of Triangular Network. The network of single-layered spherical grids consisting of triangles is geometrically analysed. The answer sought for is how a sphere surface might be divided into the greatest possible number of spherical triangles with a small number of different side-lengths in such a way that the division is as uniform as possible. With the aid of regular and semi-regular solids approximately uniform triangular division is produced on the surface of the sphere from which the densest network should be selected. A new method of division is suggested and the resulting configurations are compared to those obtained by Fuller's methods of subdivision.

Sphärische Dreiecksfachwerke. Die Geometrie des Dreiecksnetzes von einschichtigen sphärischen Fachwerken wird untersucht. Auf die Frage: auf welche Weise eine Kugelfläche in soviel sphärische Dreiecke wie möglich mit wenigen unterschiedlichen Seiten aufgeteilt werden kann, daß die Aufteilung möglichst gleichförmig sei, wird eine Antwort gesucht. Mit Hilfe von regelmäßigen und halbregeelmäßigen Körpern wurden auf der Kugelfläche annähernd gleichförmige Dreiecksaufteilungen hergestellt, von denen dieselben von dichtesten Netzen ausgewählt werden können. Es wird eine neue Aufteilungsmethode vorgeschlagen und die durch Anwendung dieser Methode als Ergebnis erhaltene Konfigurationen werden denselben, die durch die Fullerschen Aufteilungen erhalten wurden, entgegengestellt.