

KÉTRÉTEGŰ, ALAPRAJZBAN ÁTLÓS-NÉGYZETES TÉRRÁCSOK SZÁMÍTÁSA A KONTINUUM-MÓDSZERREL

KOLLÁR LAJOS*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
[Beérkezett: 1971. június 11-én]

A dolgozat olyan kétrétegű térbeli rácsszerkezetet vizsgál, amelynek mindkét övsíkja négyzethálós, de egymáshoz képest 45° -kal el vannak forgatva. Megállapítja a merevséghez szükséges megtámasztásmódot, ill. a statikai határozatlanság fokát. Meghatározza a rácsszerkezettel egyenértékű kontinuum differenciálegyenlet-rendszerét és a kontinuum metszeterőiből a rácsszerkezet rúderőinek kiszámítására szolgáló összefüggéseket.

1. A kétrétegű rácsszerkezetekről általában

Kétrétegű rácsszerkezetnek hívjuk azokat a rácsos tartókat, amelyek két, egymással párhuzamos síkban fekvő hálózatból (övsíkból) állnak, s ezeket rácsrudak kötik össze.

Ha e két övsík *három* irányban futó rudakból áll, akkor található a szerkezethez egy egyenértékű lemez, amelynek csavarási és hajlítási merevségei megegyeznek a rácsszerkezetéivel, tehát igénybevételeik is megegyeznek. Az igénybevételek meghatározása szempontjából tehát ez a szerkezet belsőleg határozatlan. Egyenlőoldalú háromszögekből és azonos keresztmetszetű rudakból álló övsíkok esetében ez a helyettesítő lemez izotróp lesz [8], minden más esetben ortotróp vagy aeolotróp [4]. Jellegzetessége még e három irányú rudak alkotta övsíkokból álló rácsszerkezetnek, hogy az övrúderők pusztán statikai (egyensúlyi) egyenletekből határozhatók meg az igénybevételekből, az alakváltozások vizsgálata nélkül, mégpedig három-három egyenlethől álló rendszerekből. A rúderő-meghatározás tehát *statikailag határozott* feladat.

Ha az övsíkokban levő rudak *háromnál több* iránnyal párhuzamosak, akkor a merevségek szempontjából ugyanúgy található egy helyettesítő lemez mint a három irányú hálózat esetén, de a rúderőket az igénybevételekből már csak az alakváltozások vizsgálatának segítségével lehet meghatározni [2]. Ez tehát most *statikailag határozatlan* feladat.

Ha végül az övsíkokban levő rudak *háromnál kevesebb* iránnyal párhuzamosak, akkor a rácszásnak csökken az igénybevételek meghatározása szempontjából szerephez jutó belső határozatlansága, mivel bizonyos merevségei

* Kollár Lajos, 1122 Budapest, Karap u. 9.

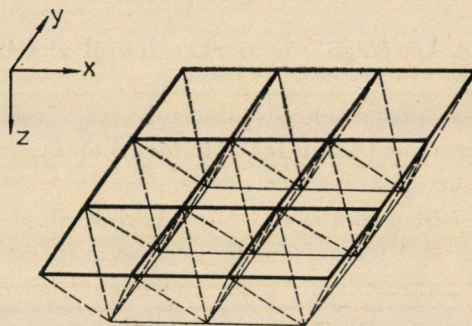
megszűnnek. Így pl. ha az övsíkok mindegyike csak két ($x \perp y$) iránnyal párhuzamos rudakból áll (1. ábra), akkor egyik övsík sem képes n_{xy} nyíróerőt felvenni, és ennek folytán az egész szerkezet is lágy lesz az m_{xy} csavarónyomatékokkal szemben. A helyettesítő lemeznek tehát zérus lesz a csavarási merevsége, és így az igénybevételeket (izotróp szerkezet esetében) a közönséges tömör lemez

$$w^{IV} + 2w''' + w'' = \frac{P}{B} \quad (1a)$$

egyenlete helyett az egyszerűbb

$$w^{IV} + w'' = \frac{P}{B} \quad (1b)$$

egyenletből kell meghatározni [7].

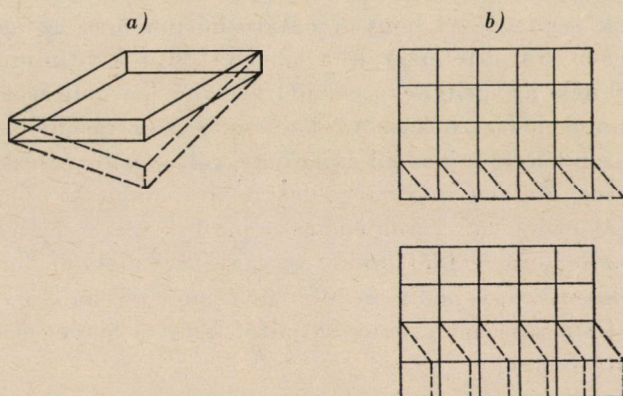


1. ábra

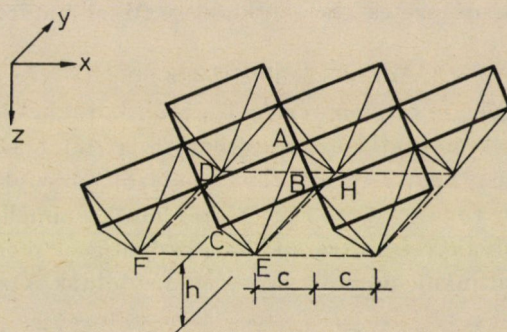
A rácsszerkezet azonban — éppen a csavarási merevség hiánya miatt — nem lesz minden igénybevételre merev. Ha a két öv alaprajzban az 1. ábrának megfelelően el van egymáshoz képest tolva és térben ferde rácsrudak kötik őket össze, akkor csak a rácszatra mint egészre ható csavarónyomatéokra lesz lágy, tehát a 2a. ábrának megfelelően ellenállás nélkül deformálódik. Így legalább négy olyan pontján alá kell támasztani, amelyek a 2a. ábrán vázolt elcsavarodás során megváltoztatnák relatív magassági helyzetüket (pl. a négy sarokpontján). Ha pedig a két övsík rúdjai egymás fölött helyezkednek el és kétirányú függőleges síkú rácszás köti őket össze, akkor még alaprajzban is deformálódhat a 2b. ábra szerint. A megtámasztásnak tehát ezt is meg kell akadályoznia.

Ha mármost úgy szerkesztjük meg a rácszást, hogy a felső övsíkrúd-jainak két iránya 45° -ot zárjon be az alsó öv rúdirányaival („átlós-négyzetes” rácszás) (3. ábra), akkor olyan szerkezethez jutunk, amelynek önmagában (a megtámasztások nélkül) nincs sem hajlítási, sem csavarási merevsége, nincs

tehát a szokásos értelemben vett egyenértékű lemezszerű kontinuuma sem. A felső öv ugyanis önmagában csak n_{xy} nyírőerőt képes felvenni, az alsó viszont csak n_x és n_y derékerőt, ez utóbbiak azonban nem „párjai” a felső öv n_{xy} -ának és így nem alkotnak velük nyomatékot. A hálózat tehát csak a meg-támasztásokkal együtt lehet képes hajlítónyomatékok felvételére.



2. ábra



3. ábra

A továbbiakban kikötjük, hogy az alsó és a felső övsíkot összekötő két rácsozás függőleges síkban helyezkedjék el, és az alsó övsík rúdjaival fusson párhuzamosan (3. ábra). Így a szerkezetet csúcsokra állított gúlákból összerakottnak is tekinthetjük. A felső övrudak hossza az alsókénak $1/\sqrt{2}$ -szöröse lesz.

E szerkezetnek az az előnye, hogy egyrészt a felső, nyomott övrudak kihajlási hossza $\sqrt{2}$ -ször kisebb az alsó, húzott övrudakénál, másrészt pedig, hogy gúlánként előnyösen lehet előregyártani és a helyszínen összeszerelni.

Az átlós-négyzetes térrács erőjátékát kontinuum-szerűen először KATO, TAKANASHI, TSUSHIMA és HIRATA [3] vizsgálták közelítően. Pontos megoldást közölt SOARE két cikkében [5], [6], de nem kontinuum-alapon, hanem határo-

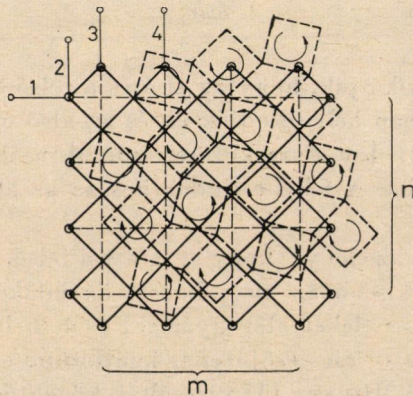
zatlan rácsos szerkezetként, illetve egy speciális esetre differenciámódszerrel számítva.

Mi a következőkben részletesen fogunk foglalkozni az átlós-négyzetes rácsszerkezettel, mégpedig először a merevséghez szükséges megtámasztás-módot állapítjuk meg, utána a statikai határozottság feltételét ill. a határozatlanság fokát tisztázzuk, majd pedig bemutatjuk, hogy a rácsozás különleges tulajdonságainak segítségével hogyan határozhatjuk meg az igénybevételeit kontinuum-szerűen, és értelmezzük a „helyettesítő kontinuum” fogalmát. Végül a rúderőknek az igénybevételekből történő kiszámítását ismertetjük.

A kontinuum-módszernek az az előnye más számításmódokkal szemben, hogy egyrészt szemléletes képet ad az erőjátékról, ami tervezéskor igen hasznos, ezenkívül sok esetben már megoldott lemezfeladatokra vezet vissza a problémát, végül pedig ha a problémára a változó merevség vagy egyéb ok miatt nincs kész lemezmegoldás, akkor is vagy zárt alakban lehet előállítani az igénybevételeket, vagy pedig a differencia-módszer háló-osztását függetlenül vehetjük fel a rácsokat csomópontjaitól, amivel lényegesen lecsökkenthetjük a számítási munkát.

2. Az átlós-négyzetes rácsszerkezet statikai határozottsága

Támasszuk meg a 3. ábrán vázolt átlós-négyzetes térrácsot a felső övsík perempontjain függőleges értelemben (a 4. ábrán körökkel jelölve). Ezenkívül a vízszintes mozgások meggátolására a statika ismert tétele szerint még szükség van három (egymást nem egy pontban metsző) vízszintes támasztórúdra (4. ábra: 1, 2, 3. sz. rudak). A szerkezet azonban szemelláthatóan még így is képes lesz egy olyan vízszintes síkban bekövetkező mozgásra, amikor az egyes gúlán — alakjukat megtartva — elmozdulnak vízszintes irányban,



4. ábra

ill. függőleges tengely körül el is fordulnak, a köztük levő üres négyzetek pedig rombuszá torzulnak (4. ábra). Ennek meggátlása céljából még egy negyedik támasztórudat is kell alkalmaznunk.

Nézzük meg most már, hogy az ilymódon — a perempontjain függőleges rudakkal és négy vízszintes rúddal — megtámasztott szerkezet határozott, ill. határozatlan-e statikailag.

A statikai határozatlanság fokát, X -et, mint ismeretes, a következő kifejezés szolgáltatja:

$$X = S + R - 3C, \quad (2)$$

ahol S a rudak száma,

R a reakciókomponensek (megtámasztórudak) száma,

C a csuklók száma.

A rudak száma, ha m -mel ill. n -nel jelöljük a gúlának számát x , ill. y irányban (4. ábra):

a felső övsíkban	$4mn$
az alsó övsíkban	$(m-1)n + m(n-1)$
a rácsozásban	$4mn$
összesen tehát	<hr/> $S = 10mn - m - n$

A megtámasztórudak száma:

függőleges	$2m + 2n$
vízszintes	4
összesen:	<hr/> $R = 2m + 2n + 4$

A csomópontok száma pedig:

a felső övsíkban	$(m+1)n + m(n+1)$
az alsó övsíkban	mn
összesen tehát:	<hr/> $C = 3mn + m + n$

Ennek alapján a statikai határozatlanság foka:

$$X = mn + 4 - 2(m + n) \quad (3)$$

A számértékeket az I. táblázatban foglaljuk össze:

I. táblázat

n \ m	2	3	4	5	6	7
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	2	3	4	5
4	0	2	4	6	8	10
5	0	3	6	9	12	15
6	0	4	8	12	16	20
7	0	5	10	15	20	25

Nem tüntettük fel a táblázatban az $m = 1$ ill. $n = 1$ eseteket, mivel ilyenkor a merevség biztosítására szükséges vízszintes megtámasztórudak számát külön megfontolással kell megállapítani. Ezekkel az esetekkel azonban amúgy sem kívánunk foglalkozni.

A táblázat azt mutatja, hogy az $m = 2$ ill. $n = 2$ esetben a szerkezet statikailag határozott, egyébként határozatlan. A határozatlanság foka meg-
egyezik a „belső” gúláknak számával.

3. Az átlós-négyzetes rácsszerkezet erőjátéka

3.1. Az erőjáték általános tulajdonságai

A következőkben egyelőre eltekintünk a megtámasztások hatásától és a rácsszerkezetet csak *önmagában* vizsgáljuk.

Tárgyalásunkban az egyöntetűség kedvéért olyan rácsszerkezetekre szorítkozunk, amelyeknek összes alsó ill. összes felső rúdjának keresztmetszeti területe egymás között egyenlő. Ekkor ugyanis a helyettesítő kontinuum állandó merevségű lesz.

A szerkezetről először is azt állapíthatjuk meg, hogy (a felvett x, y koordinátarendszerben) *zérus a csavarási merevsége*. Az alsó övsík ugyanis — átlós rudak híján — nem képes n_{xy} nyíróerőt felvenni, és ezenkívül a rácsosítás síkja is függőleges, így a csavarási nyírófolyam alul nem tud „záródni”. Ennek folytán a lemezegyenlet az egyszerű (1b) alakot ölti.

Ezenkívül a *felső övsíkban működő erőkomponensek között olyan összefüggésnek kell fennállnia, hogy ne torzítsák rombusszá* a gúláknak felső négyzet-alaplapjait, mert ebben az esetben a felső övsík nem is tudná felvenni a benne keletkező erőket.

A négyzet-rudazat merevségét (állékonyságát) az a feltétel biztosítja, hogy a csúcspontjaira ható erők ne végezzenek munkát a négyzetnek rombusszá torzulása közben. E rombusszá torzulás során az alaplap bármely pontját helybenmaradónak tekinthetjük, így az 5. ábrán vázolt esetnek megfelelően a négyzet O középpontját is, mivel más pontot választva fixnek, a megfelelő elmozdulás az 5. ábrán vázoltból egy merevtest-szerű elmozdulás hozzáadásával kapható meg, ez utóbbinak a során pedig az egyensúlyi egyenletek biztosítják a zérus munkavégzést.

A munkavégzés zérus voltát (azaz a négyzet merevségének feltételét) tehát az

$$(N_y^A - N_x^B + N_y^C - N_x^D) \Delta = 0,$$

azaz az

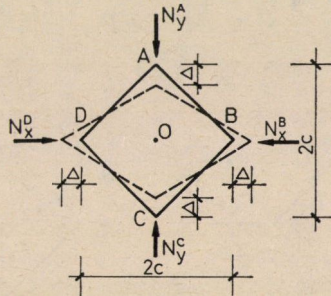
$$N_x^B + N_x^D = N_y^A + N_y^C \quad (4a)$$

egyenlet fejezi ki. Mivel pedig (a rácsszerkezetnek kontinuummal való helyettesítése során szokásos közelítéssel)

$$\frac{N_x^B + N_x^D}{2} = N_x^0 = 2cn_x^0 = \frac{N_y^A + N_y^C}{2} = N_y^0 = 2cn_y^0,$$

ezért a (4a) egyenletet így is írhatjuk:

$$n_n = n_y. \quad (4b)$$



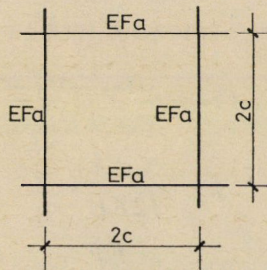
5. ábra

A most elmondottakból az is következik, hogy a felső övsík ellenállás nélkül tud az $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ összefüggésnek megfelelő alakváltozást végezni. Az n_x, n_y derékerők tehát csak a két irányú nyúlás átlagértékével, $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$ -vel lesznek egyértelmű kapcsolatban.

3.2. A rácsszerkezet merevségei

Az alsó övsíknak a két övrúd irányában van A_a húzási merevsége (6. ábra). Az egységnyi szélességre vonatkozó húzási merevség a rúdszelvények egyenlősége folytán mindkét irányban a következő lesz:

$$A_a = \frac{EF_a}{2c}. \quad (5)$$



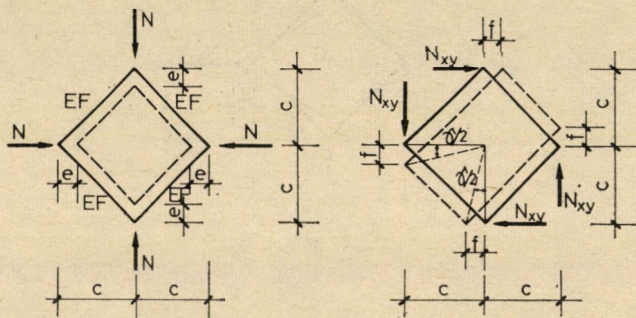
6. ábra

A felső övnek csak az x és y irányokban egyforma nagy nyomásra van összenyomódási merevsége (A). Ez a 7a. ábra alapján

$$A = \frac{n}{\varepsilon} = \frac{N/(2c)}{2e/(2c)} \quad (6a)$$

alakban kapható. Az e értéket a legegyszerűbben a munkatétellel kaphatjuk meg (a rúderők nagysága: $S = N/\sqrt{2}$):

$$4Ne = 4 \frac{(N^2/2) \cdot \sqrt{2}c}{EF},$$



7. ábra

azaz

$$e = \frac{Nc}{\sqrt{2EF}},$$

és ezzel

$$A = \frac{Nc}{\sqrt{2}c}. \quad (6b)$$

A felső öv nyírási merevsége (A_{xy}) a 7b. ábra alapján:

$$A_{xy} = \frac{n_{xy}}{\gamma} = \frac{N_{xy}/(2c)}{2f/c}. \quad (7a)$$

f értékét ismét munkatétellel kaphatjuk meg ($S = \pm N_{xy}/\sqrt{2}$):

$$4N_{xy}f = 4 \frac{(N_{xy}^2/2) \cdot \sqrt{2}c}{EF},$$

$$f = \frac{N_{xy} \cdot c}{\sqrt{2EF}},$$

$$A_{xy} = \frac{EF}{2\sqrt{2}c}. \quad (7b)$$

A szerkezet alsó és felső övsíkjának merevségi jellemzői tehát különböznek, mégpedig nemcsak mennyiségileg, hanem minőségileg is. Éppen ezért, bár a statikai határozatlanság foka kisebb más térrácsokénál, a számítása mégis bonyolultabb lesz. Az erőjáték bizonyos mértékben hasonlít az egyik oldalán kétirányban bordázott lemezéhez [1].

3.3. *A kontinuumnak tekintett, állandó merevségű rácsszerkezet alakváltozás-állapota és egyenletei*

A rácsszerkezet alakváltozás-állapotát szemléletesen a következő két részre bontva írhatjuk le:

Tekintsünk el először a felső övsíknak attól a képességétől, hogy erő nélkül is tud $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$ -szerű alakváltozást végezni (azaz képzeljük merevnek az övsíkot az $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$ típusú alakváltozással szemben is), ezenkívül tételezzük fel, hogy csak olyan merevségei vannak, mint az alsó övsíknak (tehát a jelen esetben csupán x és y irányú nyúlási merevsége), és legyenek a felső övsík merevségei az alsóéinak k -szorosai, azaz a jelen esetben mind x , mind y irányban kA_a húzási merevség. E k arányossági tényezőt tetszőlegesen választhatjuk meg, mivel a levezetés során kiesik és így nincs befolyása a végeredményre. Csupán azért szükséges bevezetnünk a felső övsíknak a *hajlítási erőjátékban résztvevő merevségét*, kA_a -t, hogy ezáltal szemléletesen, két részben írassuk fel az erőjátékot.

Ezek után definiálhatjuk a *teljes rácsszerkezet B hajlítási merevségét*, amely, mivel a tetszőleges k -tól függ, szintén határozatlan számítási segédmennyiség lesz:

$$B = h^2 A_a \frac{k}{1+k}, \quad (8a)$$

valamint a hajlítási semleges tengelyének a felső illetve az alsó övsíktól mért távolságát is (8. ábra), amely a két övsík merevségének súlypontjában lesz:

$$h_f = h \frac{k}{1+k}, \quad (6a)$$

$$h_a = h \frac{1}{1+k}. \quad (9b)$$

Ha $k = 1$, akkor

$$h_f = h_a = \frac{h}{2} \quad (9c)$$

és

$$B = \frac{h^2}{2} A_a. \quad (8b)$$

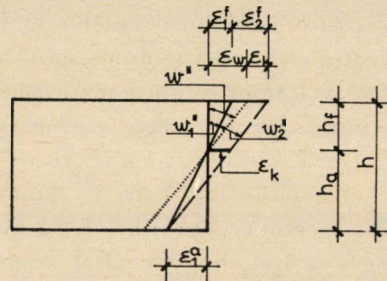
Ha így átalakítjuk a felső övsík merevségeit, akkor — mivel a kétrétegű rácsszerkezetre általában nem hat a középsíkjával párhuzamos külső erő — a deformáció csupán hajlítási alakváltozából áll, mely a w_1 „hajlítási” lehajlásfüggvénnyel jellemezhető. E hajlítási alakváltozás a két övsíkban ε_1^f ill. ε_1^a nyúlásokat, valamint γ_1^f ill. γ_1^a szögtorzulást okoz (lásd a 8. ábra folytonosan kihúzott ferde vonalát), a következő ismert összefüggések szerint [4]:

$$\varepsilon_{1x}^f = h_f \cdot w_1'', \quad (10a)$$

$$\varepsilon_{1y}^f = h_f \cdot w_1', \quad (10b)$$

$$\gamma_1^f = h_f \cdot 2w_1', \quad (10c)$$

(az alsó övsíkban f helyett a -indexekkel)



8. ábra

Hangsúlyoznunk kell, hogy w_1 a végleges alakváltozásnak a tiszta hajlításból keletkező része, nem pedig a módosított merevségű rácsszerkezet egyensúlyából számítható olyan alakváltozás, amit később még korrigálnunk kellene, amikor figyelembe vesszük a tényleges merevségi viszonyokat.

A felső (és az alsó) övsíkban ilymódon létrejövő alakváltozás-állapot összeférhető (mivel egyetlen w_1 „alakváltozás-függvényből” származik), de a felső övsíkban még egy kiegészítő síkbeli alakváltozásnak kell létrejönnie a következő okokból:

a) Nem vettük eddig figyelembe a felső övsík nyírási merevségét (mert az alsónak sincs). A (10c) képlet szerint létrejövő szögtorzulás az alsó övsíkban nem okoz n_{1xy} nyíróerőt, de a felsőben igen. Ez a síkbeli egyensúlyi egyenletek értelmében csak az n_{1x} és n_{1y} erők saját irányú növekményeivel tarthatna egyensúlyt. A hajlításból származó n_{1x} és n_{1y} erők növekményeit azonban az x ill. y irányban futó ráccsozásokban ébredő hajlítási nyíróerők egyensúlyozzák, így n_{1xy} -et nincs mi egyensúlyozza. (Az alsó övben nincs ilyen probléma, mivel ott a valóságnak megfelelően vettük fel a merevségeket).

b) A felső övsík x és y irányban csak egyenlő nagy nyomóerőket tud felvenni, azaz teljesülnie kell az $n_x = n_y$ egyenletnek, amit az alsó öv tulajdonságai alapján előállított w_1 hajlítási alakváltozás nem biztosít.

c) Végül a felső övsíknak nincs x és y irányban kA_a húzási merevsége, hanem csupán a két irányban keletkező *nyúlások átlagáról* tudjuk, hogy arányos $n_x = n_y$ -nal, a (6) összenyomódási merevség közvetítésével. Ezen felül azonban anélkül végezhet a felső övsík $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$ típusú *alakváltozást*, hogy benne erő keletkeznék.

E három ellentmondást kell kiküszöbölnie a kiegészítő síkbeli alakváltozásnak, melynek komponenseit 2-es indexszel jelöljük. A két övsíkot összekötő rácsozás biztosítja, hogy ez nem okoz deformációt az alsó övsíkban, ezért a 8. ábrán szaggatott vonallal megrajzolt keresztmetszet-elfordulás (ill. elcsavarodás) keletkezik belőle:

$$w_2'' = \frac{\varepsilon_{2x}^f}{h}, \quad (11a)$$

$$w_2'' = \frac{\varepsilon_{2y}^f}{h}, \quad (11b)$$

$$2w_2' = \frac{\gamma_2^f}{h}. \quad (11c)$$

Így — jóllehet „síkbeli”-nek hívjuk — a 2. kiegészítő alakváltozás hajlítási deformációt is okoz. A teljes hajlítási lehajlás a két rész-lehajlás (w_1 és w_2) összege lesz:

$$w = w_1 + w_2. \quad (12)$$

Ezt a két alakváltozás-részt csak egyszerre tudjuk meghatározni. Ehhez először is fel kell írunk a felső övsík metszeterőit w_1 -ből és a 2. jelű síkbeli alakváltozásból.

A korábban mondottak szerint a felső övsík húzási merevségét kA_a -val, nyírási merevségét A_{xy} -nal jelölve és elhagyva az f indexet, a w_1 hajlítási alakváltozásból az

$$n_{1x} = kA_a \varepsilon_{1x}, \quad (13a)$$

$$n_{1y} = kA_a \varepsilon_{1y} \quad (13b)$$

és

$$n_{1xy} = A_{xy} \gamma_1 \quad (13c)$$

membránerők, valamint az

$$m_x = -Bw_1'' \quad (14a)$$

és

$$m_y = -Bw_1'' \quad (14b)$$

hajlítónyomatékok keletkeznek. A negatív előjel azért szükséges, mert a nyomatékot akkor tekintjük pozitívnak, ha az alsó övsíkban okoz húzást.

A (8a), (9a), (10a—b), (13a—b) és (14a—b) képletek alapján felírhatjuk hogy

$$n_{1x} = -\frac{m_x}{h} \quad (14c)$$

és

$$n_{1y} = -\frac{m_y}{h}, \quad (14d)$$

ami egyébként n_{1x} és n_{1y} definíciójából is következik.

A kiegészítő síkbeli alakváltozásból csak a membránnyíróerőt lehet egyszerűen felírni:

$$n_{2xy} = A_{xy}\gamma_2. \quad (15a)$$

Az n_{2x} és n_{2y} erők most nincsenek közvetlen kapcsolatban az ε_{2x} és ε_{2y} nyúlásokkal, hanem csak az n_{1x} és n_{1y} erőkkel alkotott *összegükről* tudjuk egyrészt azt, hogy a két irányban azonos:

$$n_{1x} + n_{2x} = n_{1y} + n_{2y}, \quad (15b)$$

másrészt hogy a két irányú teljes megnyúlás átlagával arányos:

$$n_{1x} + n_{2x} = A \frac{(\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{2x}) + (\varepsilon_{1y} + \varepsilon_{2y})}{2}. \quad (15c)$$

Ezzel mindent előkészítettünk az erőjátékot megszabó egyenletek felállításához.

Egyrészt felírhatjuk, hogy a függőleges p terhet a két irányban működő hajlítónyomaték egyensúlyozza:

$$m_x'' + m_y'' = -p. \quad (16)$$

Ezen m_x és m_y nyomatékok csupán a w_1 alakváltozásból származnak (8a—b), mert a 2. jelű kiegészítő alakváltozás metszeterőinek egyrészt nincs párja az alsó övsíkban, másrészt pedig — bár a rácsszerkezet semleges tengelyéhez képest külpontosan működnek — nem függőleges (hajlítási) nyíróerőkkel érik el e külpontosságból származó nyomaték megváltozását, hanem vízszintes (membrán-) nyíróerőkkel, ezek pedig nem képesek függőleges terhet egyensúlyozni.

A kiegészítő síkbeli alakváltozás egyensúlyi egyenleteibe bele kell vennünk a w_1 alakváltozásból származó n_{1xy} membrán-nyíróerőket is, mivel a 2. indexű erők részben éppen ezeknek az egyensúlyozására jöttek létre:

$$n_{2x}' + (n_{1xy} + n_{2xy})' = 0, \quad (17a)$$

$$(n_{1xy} + n_{2xy})' + n_{2y}' = 0. \quad (17b)$$

Ezek után a (16) és (17a—b) egyenletekben szereplő valamennyi változót ki lehetne fejezni w_1 -gyel és w_2 -vel a (14a—b), valamint a (11a—c), (13a—c) és (15a—c) egyenletek segítségével. Nem célszerű azonban a w_1 és w_2 részle-hajlásokat külön kezelni, mivel a peremfeltételeket csak a teljes $w = w_1 + w_2$ lehajlásra tudjuk meghatározni. Át fogjuk tehát írni a (16) és (17a—b) egyenleteket úgy, hogy csak a teljes w lehajlás és egy Φ feszültségfüggvény szerepeljen bennük. Ez utóbbit a szokásos módon definiáljuk:

$$\Phi' = n_{2x}, \quad (18a)$$

$$\Phi'' = n_{2y}, \quad (18b)$$

$$\Phi' = -(n_{1xy} + n_{2xy}). \quad (18c)$$

Ily módon Φ -vel automatikusan kielégítettük a (17a—b) egyensúlyi egyenleteket, de még biztosítani kell, hogy a megfelelő alakváltozások összeférhetők legyenek.

A w_1 -ből a felső övsíkban keletkező alakváltozások — mint már mondtuk — kompatibilisak, így elég lenne a 2. alakváltozás komponenseit belevenni az összeférhetőségi egyenletbe. Ezt azonban a (18c) kifejezés miatt nem tehetjük meg, mert ebben már szerepel n_{1xy} . Így a két ε nyúláskomponensbe is bele kell vennünk a w_1 -ből származó nyúlásokat. A kompatibilitási egyenletet tehát a teljes alakváltozásra kell felírunk:

$$(\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{2x})' + (\varepsilon_{1y} + \varepsilon_{2y})'' - (\gamma_1 + \gamma_2)' = 0. \quad (19)$$

Az új változókra való áttéréshez vegyük ismét szemügyre a 8. ábrát. A teljes w lehajlásból keletkező elfordulást a (szaggatott vonallal párhuzamosan meghúzott) pontozott vonal mutatja. Ehhez az alakváltozáshoz tulajdonképpen a semleges sík alakváltozását ($\varepsilon_{xk}, \varepsilon_{yk}, \gamma_k/2$) kellene még hozzáadnunk, helyette azonban h/h_f -szeresét, azaz a felső övsík 2. jelű alakváltozását fogjuk használni, mert ezt ki tudjuk fejezni Φ -vel.

Fejezzük most már ki az 1. jelű alakváltozás-komponenseket w -vel és a 2. jelű alakváltozásokkal.

(10a—c)-ből (12) és (11a—c) alapján:

$$\varepsilon_{1x} = h_f(w'' - w_2'') = h_f \left(w'' - \frac{\varepsilon_{2x}}{h} \right), \quad (20a)$$

$$\varepsilon_{1y} = h_f \left(w'' - \frac{\varepsilon_{2y}}{h} \right), \quad (20b)$$

$$\gamma_1 = h_f \left(2w'' - \frac{\gamma_2}{h} \right), \quad (20c)$$

és hasonlóan írhatjuk át (14a—b)-t is:

$$m_x = -B \left(w'' - \frac{\varepsilon_{2x}}{h} \right), \quad (21a)$$

$$m_y = -B \left(w'' - \frac{\varepsilon_{2y}}{h} \right). \quad (21b)$$

Most még a 2. jelű alakváltozásokat kell kifejeznünk Φ -vel. Ehhez rendelkezésünkre állnak a (15b—c) egyenletek, amelyekbe először is behelyettesítjük n_{1x} -nek és n_{1y} -nek (13a—b)-vel kifejezett értékét, majd (20a—b) segítségével kiküszöböljük belőlük ε_{1x} -et és ε_{1y} -t:

$$n_{2x} = -kA_a h_f \left(w'' - \frac{\varepsilon_{2x}}{h} \right) + A \frac{h_f \left(w'' + w'' - \frac{\varepsilon_{2x} + \varepsilon_{2y}}{h} \right) + \varepsilon_{2x} + \varepsilon_{2y}}{2} \quad (22a)$$

$$n_{2y} = -kA_a h_f \left(w'' - \frac{\varepsilon_{2y}}{h} \right) + A \frac{h_f \left(w'' + w'' - \frac{\varepsilon_{2x} + \varepsilon_{2y}}{h} \right) + \varepsilon_{2x} + \varepsilon_{2y}}{2}. \quad (22b)$$

Ezekből, felhasználva (18a—b)-t, kifejezzük ε_{2x} -et és ε_{2y} -t:

$$\varepsilon_{2x} = \frac{\left(\frac{A}{2} + A_a \right) \cdot \left[\Phi'' - \frac{A}{2} h_f w'' - \left(\frac{A}{2} - kA_a \right) h_f w'' \right]}{\frac{kA_a(A + A_a)}{1 + k}} - \frac{\frac{A}{2} \cdot \left[\Phi'' - \left(\frac{A}{2} - kA_a \right) h_f w'' - \frac{A}{2} h_f w'' \right]}{\frac{kA_a(A + A_a)}{1 + k}}, \quad (23a)$$

$$\varepsilon_{2y} = \frac{-\frac{A}{2} \cdot \left[\Phi'' - \frac{A}{2} h_f w'' - \left(\frac{A}{2} - kA_a \right) h_f w'' \right]}{\frac{kA_a(A + A_a)}{k + k}} + \frac{+\left(\frac{A}{2} + A_a \right) \cdot \left[\Phi'' - \left(\frac{A}{2} - kA_a \right) h_f w'' - \frac{A}{2} h_f w'' \right]}{\frac{kA_a(A + A_a)}{1 + k}}. \quad (23b)$$

A (13c), (15a) és (18c) egyenletek segítségével pedig felírhatjuk a teljes szögtorzulást Φ -vel kifejezve:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{-\Phi''}{A_{xy}}. \quad (24)$$

Most már ki tudunk fejezni minden változót w -vel és Φ -vel a (16) és (19) alapegyenletekben. Ezek a következő alakot öltik:

(21a—b)-t és (23a—b)-t behelyettesítve (16)-ba:

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{2} \frac{AA_a}{A + A_a} (w^{IV} + 2w'''' + w'') + \\ & + \frac{h}{2} \frac{A}{A + A_a} \left(\Phi^{IV} - 2 \frac{A + 2A_a}{A} \cdot \Phi'''' + \Phi'' \right) = p, \end{aligned} \quad (25)$$

és (20a—b)-t, valamint (23a—b)-t és (24)-et behelyettesítve (19)-be:

$$\begin{aligned} & - \frac{h}{2} \frac{A}{A + A_a} \left(w^{IV} - 2 \frac{A + 2A_a}{A} w'''' + w'' \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{A + 2A_a}{A_a(A + A_a)} \left(\Phi^{IV} - 2 \frac{A}{A + 2A_a} \Phi'''' + \Phi'' \right) + \frac{\Phi''''}{A_{xy}} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Amint látjuk, az egyenletekből kiesett a k arányossági tényező. Nincs tehát jelentősége annak, hogy mekkorára vettük fel a felső öv képzelt merevségét a hajlítási erőjátékhoz, mivel a további lépésekben amúgyis oly módon korrigáltuk ezt a részt, hogy a szerkezet valódi erőjátékához jussunk. Úgy is mondhatjuk, hogy közömbös, hogyan daraboljuk ketté az erőjátékot, feltéve, hogy a két rész összege a valódi erőjátékot szolgáltatja.

A (25) és (26) egyenletekből kell tehát meghatároznunk w -t és Φ -t.

Ha az alsó övrudak keresztmetszeti területe a felsőkének $\sqrt{2}$ -szörösei ($F_a = \sqrt{2}F$), akkor $A_a = A$, és a (25)—(26) egyenletek a következő alakúra egyszerűsödnek:

$$\frac{h^2}{4} A (w^{IV} + 2w'''' + w'') + \frac{h}{4} (\Phi^{IV} - 6\Phi'''' + \Phi'') = p, \quad (27)$$

$$- \frac{h}{4} (w^{IV} - 6w'''' + w'') + \frac{1}{4A} (3\Phi^{IV} - 2\Phi'''' + 3\Phi'') + \frac{\Phi''''}{A_{xy}} = 0, \quad (28)$$

3.4. A peremfeltételek

A (25)—(26) differenciálegyenletek peremfeltételei a 2. pontban leírt megtámasztás (a peremeken szabad támaszkodás) esetében a következőképpen alakulnak:

Az x tengellyel párhuzamos peremeken:

zérus a lehajlás:

$$w = 0, \quad (29a)$$

zérus a peremre merőleges hajlítónyomaték: $m_y = 0$, (29b)

a felső övsíkban zérus a peremre merőleges vízszintes (membrán-) erő: $n_y = n_{1y} + n_{2y} = 0$, (29c)

a felső övsíkban zérus a (membrán-) nyíróerő, azaz (18c)-vel: $\Phi' = 0$. (29d)

A (29b) és (29c) feltételeket w -vel és Φ -vel kell kifejeznünk. (29b)-ből (14d) segítségével azt kapjuk, hogy $n_{1y} = 0$, így (29c)-ből (18b) figyelembevételével

$$\Phi'' = 0 \quad (29c)^*$$

következik.

(29b)-ből pedig (21b) és (23b) segítségével, valamint figyelembevéve, hogy az x irányú perem mentén $w'' = 0$, és (29c) miatt $\Phi'' = 0$, azt kapjuk, hogy

$$w'' + \frac{1}{A_d h} \Phi'' = 0. \quad (29b)^*$$

Az y tengellyel párhuzamos peremeken az x és y szerinti differenciálás szerepet cserél.

A (29d) és (29b)* feltételek miatt derékszögű négyszög alaprajz esetén sem tudjuk szinuszos formájában megadni a megoldást, hanem a konkrét esetekben a numerikus módszerek valamelyikével kell célhoz érni.

3.5. A rácsszerkezet rúderői és az egyenértékű kontinuum metszeterői közötti kapcsolat

Ha meghatároztuk a (25)–(26) differenciálegyenletrendszerből w -t és Φ -t, akkor ezekből egyszerűen megkaphatjuk a kontinuum metszeterőit. A fajlagos hajlítónyomatékokat a (21) és (23) képletek szolgáltatják. A fajlagos (hajlítási) nyíróerőkhöz a (21) képletek deriválásával juthatunk el:

$$t_x = m'_x = -B \left(w'''' + \frac{\varepsilon'_{2x}}{h} \right), \quad (30a)$$

$$t_y = m'_y = -B \left(w'''' - \frac{\varepsilon'_{2y}}{h} \right). \quad (30b)$$

A nyíróerő pozitív értelmezését a 9. ábra mutatja. Végül a Φ feszültségfüggvényből a (18) képletekkel kaphatjuk meg a felső övsík kiegészítő (membrán-) metszeterőit.

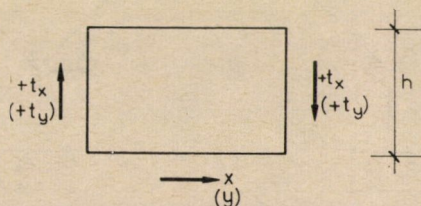
A rácsszerkezet rúderőinek meghatározásához meg kell állapítanunk: hogyan függenek össze az egyes rúderők a kontinuum metszeterőivel. Ezt a legegyszerűbben az alsó övrudakra tisztázhatjuk, mivel a bennük ébredő rúd-

erők a rácszat h magasságával szorozva a $2c$ szélességre ható hajlítónyomaté-
kot szolgáltatják. (Ez a 3.3. pont elején leírt gondolatmenetből következik:
az alsó övsíkban csak n_{1x} és n_{1y} metszeterő ébred). Így tehát a 3. ábra jelölé-
seivel:

$$S_{EF} = \frac{2cm_x^D}{h}, \quad (31a)$$

és

$$S_{EH} = \frac{2cm_y^A}{h}. \quad (31b)$$



9. ábra

A rácsrudak erői a hajlítási nyírőerőkből származnak. A vetületi tétellel
azt kapjuk, hogy az x irányban:

$$S_{DE} = 2ct_x^{DE} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h}, \quad (32a)$$

$$S_{EB} = -2ct_x^{EB} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h}, \quad (32b)$$

az y irányban pedig:

$$S_{CE} = 2ct_y^{CE} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h}. \quad (32c)$$

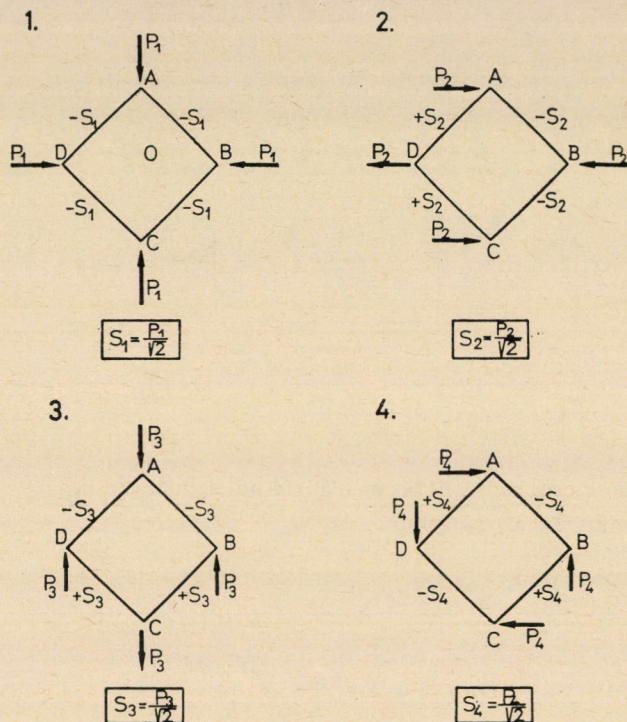
$$S_{EA} = -2ct_y^{EA} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h}. \quad (32d)$$

Az egyes rácsrúderőket a rúd közepén átmenő függőleges keresztmetszet-
ben érvényes t nyírőerőből kell számítani.

A felső övrúderők számítása már valamivel bonyolultabb. A szemléletes-
ség kedvéért a 10. ábrán feltüntettük azt a négy lehetséges erőrendszert, amely
kielégíti a (4a) merevségi feltételt, és így egyensúlyi erőrendszerként működ-
het a gúlák felső négyzetalaplappjainak csúcspontjaira. A felső övrúderők meg-
határozásához célszerű az egy-egy négyzet sarokpontjaira ható erőket felbon-
tani e négy erőrendszerre a következőképpen:

Az 1. erőrendszer tulajdonképpen a négyzet O középpontjában számítható $n_x = n_y$ erőknél felel meg. A (21), (23) és (18) képletek alapján:

$$P_1 = 2c \left(\frac{m_x^0}{h} - \Phi'' \right) = 2c \left(\frac{m_y^0}{h} - \Phi'' \right). \quad (33a)$$



10. ábra

A 2. erőrendszert a legegyszerűbben az y irányú n_{xy} -növekményből kaphatjuk meg. A (18c) kifejezést felhasználva

$$P_2 = 2c \frac{n_{xy}^A - n_{xy}^C}{2} = c(\Phi'_C - \Phi'_A), \quad (33b)$$

és hasonlóképpen az x irányú n_{xy} -növekményből

$$P_3 = c(\Phi'_D - \Phi'_B). \quad (33c)$$

A 4. erőrendszer pedig a négy sarokpontra ható n_{xy} -ok átlagából kapható:

$$P_4 = -c(\Phi'_A + \Phi'_C) = -c(\Phi'_B + \Phi'_D). \quad (33d)$$

Az e négy erőrendszerből származó felső övrüderőket a 10. ábrán tüntettük fel.

IRODALOM

1. GIENCKE, E.: Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. *Der Stahlbau* **24** (1955), 128–129
2. HEGEDŰS I.: Négy vagy több irányú rudazatból álló hálózat számítása folytonos számítási modellal. (Megjelenés alatt)
3. KATO, B.—TAKANASHI, K.—TSUSHIMA, Y.—HIRATA, Y.: The Analysis of a Space Truss Composed of Square Pyramid Units. *Space Structures* (R. N. Davies Editor), Oxford and Edinburgh, Blackwell Scientific Publications 1967. 201–212
4. KOLLÁR L.—HEGEDŰS I.: Kétrétegű, általános háromszög hálózatú rácsszerkezet megoldása folytonos számítási modellal. *Műszaki Tudomány* **46** (1973), 65–82.
5. SOARE, M.: Cylindrical Bending of Double-layer Diagonal Square Mesh Grids. *Acta Techn. Hung.* **69** (1971) 433–466
6. SOARE, M.: Contribuții la studiul rețelelor spațiale planar pătrate diagonale. *Construcții și materiale de construcții*. (1970) 423–440
7. TIMOSHENKO, S.—WOJNOWSKI-KRIEGER, S.: Lemezek és héjak elmélete. *Műszaki Kiadó*, Budapest 1966
8. WRIGHT, D. T.: A Continuum Analysis for Double Layer Space Frame Shells. *Publ. Int. Ass. Bridge Struct. Eng.* Zurich, **26** (1966)

Analysis of Double-Layer Space Trusses with Diagonally Square Mesh by the Continuum Method. A double-layer space truss is examined with both chord planes being of square mesh but at 45° to each other. Mode of supporting to provide rigidity, and number of redundancies are determined. Differential equation system of the substituting continuum as well as relationships for the calculation of the truss bar forces from continuum internal forces are established.

Berechnung zweischichtiger, im Grundriß diagonal-viereckiger Raumschwerwerke mit dem Kontinuumverfahren. Ein zweischichtiges Raumschwerwerk mit beiden Gurtebenen aus Vierecknetz aber zu 45° zueinander wird untersucht. Es werden die Steifigkeit gewährleistende Stützungsart bzw. der Grad der statischen Unbestimmtheit festgestellt. Das Differentialgleichungssystem des mit dem Raumschwerwerk gleichwertigen Kontinuums und die Zusammenhänge für die Berechnung der Fachwerk-Stabkräfte werden aus den Schnittkräften des Kontinuums ermittelt.