

HAJLÍTOTT HÉJAK SZÁMÍTÁSA TARTÓRÁCSMODELL SEGÍTSÉGÉVEL

BÉRES ELEK*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1972. február 17-én]

A dolgozat a hajlított héjak egy, az elsőrendű elméleten nyugvó számítási módszerét ismerteti. A héjfelületnek adott hálózattal történt részekre bontása után az egyensúlyi egyenletek ezekre a felületelemekre, a folytonossági feltételek viszont magára a hálózatra, mint tartórácsra írhatók fel. A feltételek alapján olyan lineáris egyenletrendszer adódik, amelynek együtthatói határozott integrálok segítségével számíthatók. A tartórács gerendáinak csavaró merevsége a hajlítómerevség $(1 + \nu)$ -vel osztott értéke. Ezt szerző abból a feltételből vezeti le, hogy az egységnyi szélességű gerendának a fajlagos csavaró nyomaték hatására bekövetkező elcsavarodása ugyanakkora legyen, mint magában a háborítatlan héjban. Közli a héjból kimetszett sávok, mint görbe tengelyű rudak alakváltozásának a számítására szolgáló képleteket.

1. Bevezetés

A dolgozat a hajlított héjak számításának egy olyan módszerét ismerteti, amely a megoszló erővel terhelt, vagy ilyenekkel közelíthető teher hatására keletkező igénybevételeket tetszőleges alakú héj esetében is aránylag nagy pontossággal szolgáltatja. A módszer a lineáris elméleten nyugszik. Feltételezései a következők:

1. A héj anyaga ideálisan rugalmas, azaz követi a Hooke-féle törvényt.
2. A héj vastagsága többi méretéhez viszonyítva kicsi.
3. Az elmozdulások a héjvastagsághoz képest kicsinyek.
4. A héj minden pontja az alakváltozás után is a középfelületnek ugyanahhoz a pontjához tartozó normálisán marad, mint amelyiken az alakváltozás előtti állapotban volt.
5. A középfelületre merőleges feszültségek a többi feszültséghez viszonyítva elhanyagolhatóan kicsinyek.
6. A héjban keletkező igénybevételek legalább szakaszonként folytonos és differenciálható függvényekkel jól közelíthetők.

Az eljárásnak alapvetően új gondolata az, hogy a felületnek egy hálózat segítségével történt elemekre bontása után csak az egyensúlyi feltételeket írja fel ezekre a felületelemekre, a folytonossági feltételeket pedig magára a hálózatra, mint tartórácsra írja fel.

Az igénybevételek függvényeit polinomokkal közelítve a feltételi egyenletek lineáris egyenletként jelentkeznek. Az egyenletrendszer együtthatói

* Dr. Béres Elek, 1011 Budapest Hunyadi János u. 11.

határozott integrálok segítségével számíthatók, még hozzá kivétel nélkül egyszeres integrálokkal. Kettősintegrál csak az egyensúlyi egyenletek jobb oldalát alkotó állandók számításában szerepel. Differenciálás pedig csak annyiban fordul elő, hogy a tartórács gerendájának a felület normálisa körüli elfordulását előidéző nyomatékot a normálerő változásából számítjuk.

Az eljárás másik alappillére a tartórács gerendái hajlító és csavaró merevsége viszonyának a meghatározása. Az egységnyi szélességű gerenda alkalmazása is új az eddigi kísérletekkel szemben, amelyek során a tartórács rúdjaire a héj megfelelő részeinek a merevségét igyekeztek átvinni. Itt nincs szó helyettesítő rúdról és helyettesítő merevségről. Itt a gerenda hajlító merevsége a héjból kimetszett egységnyi szélességű sáv hajlító merevsége. Csavaró merevségének a vizsgálata során pedig a rudat a héj háborítatlan elemeként kezeltük. Ily módon egy jól definiált kapcsolatot (arányosságot) állapítottunk meg a rúd hajlító és csavaró merevsége között. A csavaró merevséget abból a feltételből határoztuk meg, hogy a héjban uralkodó fajlagos csavaró nyomaték hatására a gerenda fajlagos elcsavarodása ugyanakkora legyen, mint volt akkor, amidőn a gerenda a héj háborítatlan részét képezte.

Ha csupán a hálózat csomópontjaiban keletkező igénybevételeket vesszük fel az ismeretlenek közé, akkor az egyenletek száma meghaladja az ismeretlenek számát. A dolgozat az ismeretlenek számának az egyenletek számával való egyenlővé tételére is megad egy módszert. Ezáltal lehetővé válik a reguláris egyenletrendszerként való kezelés. Természetesen fennáll a túlhatározott egyenletrendszerként való kezelés lehetősége is. Ebben az esetben az eltérések négyzetösszegének minimummá tétele is feltétel.

A hálózatra, ill. a hálózati vonalak metszési szögére megkötés nem tehető a peremre vonatkozó megkötések nélkül. Ez pedig ellentétes volna az általános alkalmazhatóságra való törekvéssel. Ezért vált szükségessé a különböző metszetekben keletkező igénybevételek közötti kapcsolat felírása, ill. egyes igénybevételi értékeknek az ismeretlenként felvett igénybevételi értékekkel való kifejezése. A hálózati vonalakra merőleges irányokhoz tartozó igénybevételek képleteinek a felírása és e képletek első fokú voltából származó hibáknak az elemzése is megtörtént.

A dolgozat a szélesebb körben is alkalmazható módszert csak a héjakban keletkező igénybevételek számítására alkalmazza. Egyéb területen, mint például a héjak stabilitásának a vizsgálatára, vagy a tömör testekben keletkező igénybevételek és alakváltozások számítására való alkalmazására más alkalmakkal kívánunk rátérni.

2. A tartórács-modell

A műszaki feladatok megoldása során gyakran találkozunk olyan módszerekkel, amelyek a probléma elméletileg pontos (vagy annak elfogadott) összefüggései alapján felírt differenciálegyenletek közelítő megoldásán nyugszanak.

Hajlított héjak differenciálegyenletei a héjelemre felírt egyensúlyi és folytonossági egyenleteknek megfelelően rendezett alakjai, tehát szinte magától kínálkozik az a gondolat, hogy elhagyva a differenciálegyenletek felírását, majd pedig ezeknek a véges méretű és véges sokaságú elemekre történő közelítő átírását, közvetlenül a véges nagyságú elemekre írjunk fel egyensúlyi és folytonossági egyenleteket. Ez a gondolat az alapja a széles körben alkalmazott véges elemek módszerének is. Ott azonban az egyensúlyi és a folytonossági feltételek egyaránt a hálózat által a héjból kimetszett elemekre vonatkoznak, ami az elemek alakja szempontjából megkötést jelent és általában a számítani kívánt héjfelületnek a megfelelő felülettel való közelítését is maga után vonja.

Könnyen megvalósítható a felület pontos alakjával történő számítás, ha csupán az egyensúlyi egyenleteket írjuk fel a felületelemekre, a folytonossági feltételeket pedig azzal a tartórácscsal kapcsolatban írjuk fel, amelynek tengelyvonalai a felületelemek határoló vonalai. Ekkor ugyanis egyenleteinkben a felületelemekre vonatkozó kettős integrál a külső teherre korlátozódik, az ismeretlen belső erőkkel kapcsolatos integrálok pedig kivétel nélkül egyszeres integrálok lesznek. A tartórács-modell alapján történő számítás tehát azt jelenti, hogy az egyensúlyi egyenleteket a tartórács gerendái által kimetszett felületelemekre, a folytonossági feltételeket pedig a felületből kimetszettnek képzelt tartórácsra írjuk fel.

Maga a számításban szereplő tartórács a héjból való kimetszéssel keletkezik.

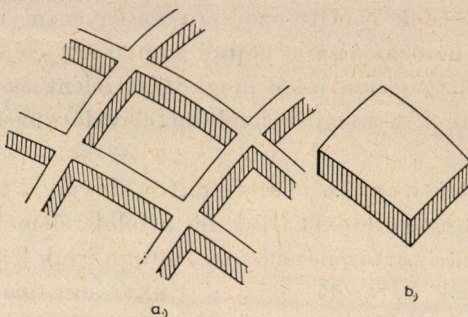
A héj középfelületén felveszünk egy hálózatot, melyet két vonalsereg alkot. Egy-egy vonalsereg görbéi egymást nem metszik, csak a másik vonalsereg görbéit. Ezek a görbék és a héj határvonala alkotják a tartórács gerendáinak a tengelyeit. A gerendák magassága a héj vastagsága, szélessége pedig egységnyi. Ezt a szélességet jelentő egységet a levezetésekben végtelenül kicsinek célszerű tekinteni. Feltételezve ugyanis, hogy a héjat megoszló erők terhelik, az így kialakított tartórácsot a külső erők nem terhelik közvetlenül. Teherként csupán a tartórács belső erői és az anyag folytonosságát helyettesítő metszeti erők tekinthetők.

Azokat a metszeteket, amelyek mentén ezek az erők hatnak, az 1/a ábrán vonalkázással jelöltük meg. Ezek a metszett felületeken azonban éppen azok a héjban keletkező igénybevételek hatnak, melyeket a számítás keresett ismeretlenjeinek választunk, meghatározásuk pedig a következő feltételek alapján lehetséges:

a) A tartórács gerendái által kimetszett és az 1/b ábrán külön is feltüntetett héjelemek ezen erők és a rájuk ható külső erők hatására egyensúlyban vannak.

b) A tartórács közös csomópontba csatlakozó rúdvégeinek az elmozdulása a rudakban keletkező igénybevételek hatására egyenlő.

A számítás ismeretlencinek az adott hálózat adott pontjaiban a hálózat által kijelölt irányokhoz tartozó igénybevételeket tekintjük. Ezekkel kifejezve az igénybevételek közelítő polinomjait, majd pedig azok segítségével felírva a jelzett egyensúlyi és folytonossági egyenleteket, olyan lineáris egyenletrendszerre jutunk, melyből a keresett ismeretlenek kiszámíthatók.



1. ábra.

Az eddigiekben egy olyan alapgondolatot ismertettünk, melynek alapján nagy pontossággal végezhető a tetszőleges alakú és terhelésű* hajlított héjak számítása, és főbb vonalaiban ismertettük azt a tartórácsot, amelyre a számítás egyes összefüggéseit építjük. Ahhoz azonban, hogy a gyakorlat számára is előnyösen alkalmazható módszerről beszélhessünk, még több részletet alapos elemzésnek kell alávetnünk és az összefüggéseket zárt alakban is fel kell írunk.

3. Az ismeretlenek és az egyenletek száma

A tárgyalás egyszerűbbé tétele, továbbá a szokásos jelölések alkalmazhatósága érdekében a felület egészére vonatkozó x_1, x_2, x_3 tengelyekkel rendelkező derékszögű koordinátarendszeren kívül bevezetjük a hálózat egyes csomópontjaihoz rendelt koordinátarendszereket. Egy-egy ilyen koordinátarendszernek a kezdőpontja legyen a szóban forgó csomópont, ξ tengelye a tartórács egyik, η tengelye a másik gerendájának tengelyével essék egybe, ζ tengelye pedig legyen a középfelület e pontbeli normálisa.

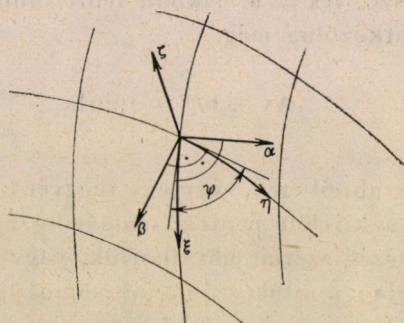
Vezessünk be továbbá olyan, a felületet érintő α , ill. β egyenest, amely a ξ , ill. az η tengelyre merőleges (2. ábra). Ily módon a fajlagos metszeti erők és erőpárok a szokásnak megfelelően jelölhetők. A héjnak a (ξ, ζ) , ill. az (η, ζ) koordinátafelületek által kivágott metszetében ható N_α , ill. N_β fajlagos nor-

* A külső teherről csak annyit tételezünk fel, hogy megoszló, vagy legalább is megoszló erővel jól közelíthető.

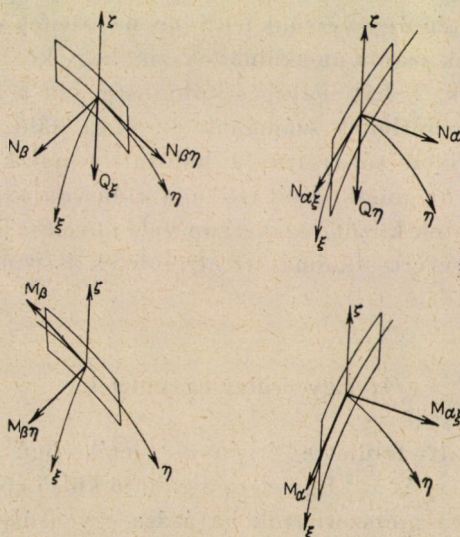
málerők, $N_{\alpha\xi}$, ill. $N_{\beta\eta}$ és Q_ξ , ill. Q_η nyíróerők, továbbá M_α , ill. M_β hajlító és $M_{\alpha\xi}$, ill. $M_{\beta\eta}$ fajlagos csavaró nyomatékok pozitív értelmét a 3. ábrán feltüntetett módon vettük fel. A ζ tengely körül forgató nyomatékokat az N erők változása magában foglalja.

Egy-egy pontban tehát összesen 10 ismeretlen igénybevétel vehető fel.

Adott felülethez hozzárendelve egy hálózatot, az a hálózat által kimetszett felületelemekre vonatkozó egyensúlyi, és a hálózatra, mint tartóácsra vonatkozó folytonossági egyenletek számát egyértelműen meghatározza. Az igénybevételeknek, mint ismeretleneknek a számáról ugyanez nem mondható el, ugyanis az igénybevételeknek egy-egy vonal mentén polinommal való közelítése lehetővé teszi, hogy a számításban szereplő ismeretlenek, azaz a polinomokat meghatározó függvényértékek számát szükség szerint növeljük, vagy csökkentjük.



2. ábra



3. ábra

Szükségesnek látszik ennek kihangsúlyozása, mert egyrészt az ismeretlenek és az egyenletek számának az egyezése nem következik be automatikusan, másrészt pedig az egyenlővé tétel lehetőségét éppen az előbbi megállapítás teremti meg. Ha ugyanis csak a csomópontokban levő igénybevételeket tekintjük ismeretleneknek, akkor n belső csomópont esetén az ismeretlenek száma $10n$ plusz a perem mentén adódó ismeretlenek száma. Ezzel szemben a folytonossági feltételek száma $6n$ plusz a peremen levő pontokra vonatkozó folytonossági feltételek száma és az egyensúlyi egyenletek száma is ezzel közel egyenlő, tehát a folytonossági és az egyensúlyi feltételek együttes száma mintegy $2n$ -nel meghaladja a csomópontokban felvehető ismeretlenek számát.

Ez a tény azonban a feladat megoldása szempontjából nem akadály, sőt a megoldási lehetőségek közötti választásra ad módot.

Az egyik lehetőséget az jelenti, hogy az N egyenlethől álló és M ismeretlen ($N > M$) tartalmazó, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ alakban felírt túlhatározott egyenletrendszer megoldására vonatkozólag még

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = \min!$$

feltételt is előírjuk.

A másik lehetőség abból ered, hogy egy függvény interpoláló polinommal való közelítése során a kijelölt pontok számát — amelyekben a függvény értékét előírjuk — tetszés szerint növelhetjük, vagy csökkenthetjük.

Esetünkben mind e pontok számával, mind pedig helyével szabadon rendelkezünk és éppen a hozzájuk tartozó függvényértékek jelentik a keresett ismeretleneket és számukat, azaz az ismeretlenek számát úgy növeljük, hogy az a feltételi egyenletek számával legyen egyenlő. Ha ilyen ismeretleneket a hálózati vonalak mentén úgy veszünk fel, hogy ne essenek csomópontba, akkor a keresett ismeretlenek száma anélkül növekszik, hogy közben a feltételi egyenletek száma változnék. Tehát lényeges különbség van a beosztás (a hálózat) finomítása, ill. az ismeretlenek számának az adott hálózat melletti növelése között. A beosztás finomítása, azaz a hálózati vonalak sűrítése a feltételi egyenletek számának az emelkedését is maga után vonja, míg az ismeretlenek számának a csomópontok közötti szakaszon való növelése ilyen következménnyel nem jár. Éppen ezért alkalmas az egyenletek és ismeretlenek számának egyenlővé tételére.

4. Egyensúlyi egyenletek

A teljes vizsgált felületre érvényes derékszögű koordinátarendszer tengelyei legyenek x_1 , x_2 és x_3 . Egy elem a ráható külső erők és az anyag folytonosságát helyettesítő metszeti erők hatására egyensúlyban van, ha pl. az erők x_1 , x_2 és x_3 tengelyekkel párhuzamos vetületeinek összege és az x_1 , x_2 ,

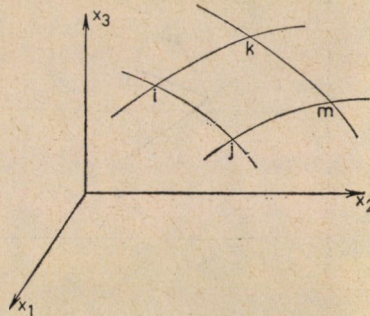
valamint az x_3 tengelyekre vonatkozó nyomatékok mindegyike zérus. Tekintsük a felületre rajzolt hálózat által kimetszett i, j, k, m csúcspontú görbevonalú térbeli négyszög alakú elemet (4. ábra). A rövidebben írható képletek érdekében vezessük be a

$$\mathbf{v}_\xi = Q_\xi \mathbf{f} + N_\beta \mathbf{n} - N_{\beta\eta} \mathbf{t},$$

$$\mathbf{v}_\eta = Q_\eta \mathbf{f} - N_\alpha \mathbf{n} - N_{\alpha\xi} \mathbf{t},$$

$$\mathbf{w}_\alpha = M_\alpha \mathbf{t} - M_{\alpha\xi} \mathbf{n},$$

$$\mathbf{w}_\beta = M_\beta \mathbf{t} + M_{\beta\eta} \mathbf{n}$$



4. ábra

jelöléseket, amelyekről megjegyezzük, hogy vonalszakaszonként változnak, ezért a későbbiekben még a vonalszakaszt jelölő indexekkel is ellátjuk. Például $\mathbf{v}_{\xi, i, k}$ a négyszög (i, k) oldalára vonatkozik. A kifejezés jobb oldalán szereplő $Q_\xi, Q_\eta, N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\xi}, N_{\beta\eta}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\xi}$ és $M_{\beta\eta}$ skalárok és a $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}$ vektorok egyaránt az (i, k) szakasz pontjait meghatározó s ívhossz-paraméterfüggvényei, tehát $\mathbf{v}_{\xi, i, k}$ is ennek a paraméternek a függvénye. Ennek a külön jelölése nem látszik szükségesnek. Megfelelő utalást jelent a ds differenciál, amely egyértelműen utal a független változóra. Ugyanez vonatkozik a nyomatéki egyenletek x_μ ($\mu = 1, 2, 3$) változóira, amelyek a görbe pontjainak az x_1, x_2, x_3 koordináta-rendszerre vonatkozó koordinátáit jelölik és amik ugyancsak s függvényei.

$$Q_\xi, Q_\eta, N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\xi}, N_{\beta\eta}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\xi} \text{ és } M_{\beta\eta}$$

jelentése változatlan. Ismertetése az előző pontban és a 3. ábrán található, $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ és $\mathbf{f}$ vektorok jelentése pedig a következő:

$\mathbf{t}$ a görbe érintő-egységvektora,

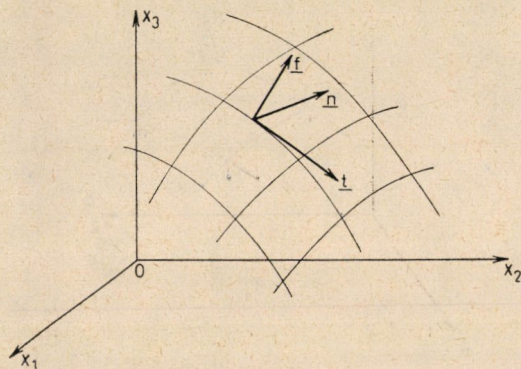
$\mathbf{f}$ a felületi normális egységvektora,

$\mathbf{n}$ mind a kettőre merőleges egységvektor $\mathbf{n} \equiv \mathbf{f} \times \mathbf{t}$ irányítással (5. ábra).

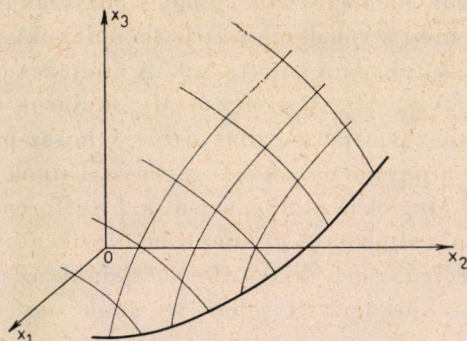
A $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}$ vektorhármas tehát a felületi görbének az úgynevezett fundamentális triédere. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ az x_1, x_2 és x_3 tengelyekkel párhuzamos egység-

vektorok. Végül $\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_2$ és $x_4 = x_1$, $x_5 = x_2$ figyelembevételével a 4. ábrán látható elemre vonatkozó erőegyensúlyi egyenletek

$$\begin{aligned} & \int_{(l_i, k)} \mathbf{v}_{\xi, i, k} \mathbf{e}_\mu ds - \int_{(l_j, m)} \mathbf{v}_{\xi, j, m} \mathbf{e}_\mu ds + \int_{(l_i, j)} \mathbf{v}_{\eta, i, j} \mathbf{e}_\mu ds - \\ & - \int_{(l_k, m)} \mathbf{v}_{\eta, k, m} \mathbf{e}_\mu ds + \iint_{(T)} |\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta| \mathbf{p} \mathbf{e}_\mu d\xi d\eta = 0, \\ & (\mu = 1, 2, 3), \end{aligned}$$



5. ábra



6. ábra

ahol $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta)$ a középfelület egyenlete, $\mathbf{r}_\xi$ ill. $\mathbf{r}_\eta$ ennek a ξ , ill. az η paraméter szerinti deriváltja, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\xi, \eta)$ pedig a teherfüggvény.

A nyomatéki egyensúlyt kifejező egyenletek pedig az

$$\begin{aligned} & \int_{(l_i, k)} [\mathbf{w}_{\beta i, k} \mathbf{e}_\mu + \mathbf{v}_{\xi, i, k} (x_{\mu+1} \mathbf{e}_{\mu+2} - x_{\mu+2} \mathbf{e}_{\mu+1})] ds - \\ & - \int_{(l_j, m)} [\mathbf{w}_{\beta j, m} \mathbf{e}_\mu + \mathbf{v}_{\xi, j, m} (x_{\mu+1} \mathbf{e}_{\mu+2} - x_{\mu+2} \mathbf{e}_{\mu+1})] ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{(l,i)} [-\mathbf{w}_{\alpha,i,j} \mathbf{e}_\mu + \mathbf{v}_{\eta,i,j} (x_{\mu+1} \mathbf{e}_{\mu+2} - x_{\mu+2} \mathbf{e}_{\mu+1})] ds + \\
& + \int_{(l,k,m)} [\mathbf{w}_{\alpha,k,m} \mathbf{e}_\mu - \mathbf{v}_{\eta,k,m} (x_{\mu+1} \mathbf{e}_{\mu+2} - x_{\mu+2} \mathbf{e}_{\mu+1})] ds + \\
& + \iint_{(T)} |\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta| \mathbf{p}(x_{\mu+1} \mathbf{e}_{\mu+2} - x_{\mu+2} \mathbf{e}_{\mu+1}) d\xi d\eta = 0 \\
& (\mu = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

egyenlettel adhatók meg.

Amennyiben az elem oldalainak száma ettől eltérő, azaz három vagy több (pl. a peremen, 6. ábra), akkor természetesen az egyenletekben az oldalélekre vonatkozó integrálok száma az oldalélek számának megfelelően módosul.

5. Folytonossági feltételek

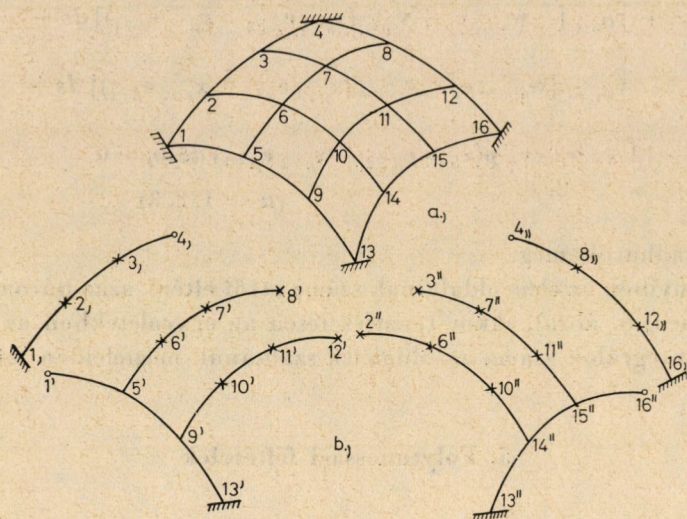
Héjak alakváltozásának a számításánál a nyíróerőt figyelmen kívül szokták hagyni tekintettel azok hatásának az egyéb hatásokhoz viszonyított kicsiny voltára. Esetünkben a folytonossági feltételeket a tartórácsra vonatkozólag írjuk fel. A rudak alakváltozásának a számításánál figyelembe vesszük a hajlító nyomatékokat, a csavaró nyomatékokat és a normálerőket, míg velük szemben a nyíróerők hatását elhanyagoljuk.

A folytonossági feltétel a tartórácsra vonatkoztatva azt jelenti, hogy a közös csomópontba csatlakozó rúdvégek elmozdulása egyenlő. Általános esetben ez három eltolódási és három tengelykeresztelfordulási, összesen tehát hat egyenletet jelent csomópontonként. Perempontokban természetesen más a helyzet, ott mind az elrendezés, mind pedig a megtámasztás módjától függ, hogy mely pontokra és hány folytonossági feltétel írható fel.

A folytonossági egyenletek felírásának egy lehetséges módja az, hogy a tartórácsot statikailag határozott részekre bontjuk és ennek a terhelését határozzuk meg úgy, hogy a statikailag határozott részek azon pontjainak az elmozdulása egyenlő legyen, amely pontokban azok a valóságban össze vannak kapcsolva. A tartórács terhelését éppen a keresett igénybevételek jelentik, tehát az elmozdulásokat az igénybevételek segítségével fejezzük ki, mégpedig az adott pontokhoz tartozó ismeretlen igénybevételei értékekkel.

Példaképpen vizsgáljuk meg a négy sarkán befogott és a 7/a ábrán felüntetett hálózattal ellátott héjat. Egy hozzárendelhető, statikailag határozott részekre bontást mutat a 7/b ábra.

Az ábrán az egyes részeket egy, ill. két vesszővel különböztettük meg. Mivel pedig egy-egy hálózatot is két-két részre bontottunk, ennek megfelelően a vesszőket is fent, ill. lent helyeztük el. Az elmozdulás-vektorokat $\mathbf{u}$ -val jelölve az indexként használt szám, a megfelelő helyen és számban használt vesszőkkel pontosan megmutatja, hogy melyik csomópont, melyik törzstartó-



7. ábra

részen levő elmozdulásáról van szó. Az ábrán csillag azokat a pontokat jelöli, amelyekre nézve az elmozdulások egyezését írtuk elő, a kis kör pedig azokat a rúdvégeket jelöli, amelyek elmozdulása előírt (jelen esetben zérus). Példánkban tehát a folytonossági feltétel a következő vektor-egyenletekkel fejezhető ki:

$$\begin{array}{ll}
 u_1' = 0 & u_4'' = 0 \\
 u_2' = u_2'' & u_8' = u_8'' \\
 u_3' = u_3'' & u_{10}' = u_{10}'' \\
 u_4' = 0 & u_{11}' = u_{11}'' \\
 u_6' = u_6'' & u_{12}' = u_{12}'' \\
 u_7' = u_7'' & u_{16}'' = 0.
 \end{array}$$

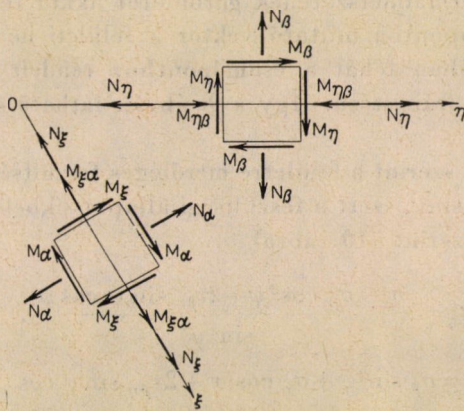
Ez összesen 12 vektor-egyenlet, ami a vektorok hatmértésége folytán 72 skalár egyenletet jelent.

6. Igénybevétel az adott metszetben

Ha a tartórács egyes pontjainak elmozdulását fel akarjuk írni, akkor azt tapasztaljuk, hogy az csak akkor végezhető közvetlenül az eddig bevezetett igénybevételekkel, ha a tartórács tengelyeit alkotó két görbesereg ortogonális. Más esetben olyan igénybevételek játszanak szerepet az elmozdulások meghatározásában, amelyeket eddig nem is említettünk, így természetesen azoknak a

már bevezetett igénybevételekkel való kifejezését sem adtuk meg. Éppen ezért mielőtt rátérnénk az elmozdulások számítására, megadjuk azokat a képleteket, melyek segítségével a rúd alakváltozásában fontos szerepet játszó normálerő, hajlító nyomaték és csavaró nyomaték a már bevezetett igénybevételek segítségével kifejezhető.

A 8. ábra a tartórács két gerendájának egy-egy elemét tünteti fel a rájuk ható erőkkel és erőpárokkal. Az egyik elem olyan gerendából van kimetszve,



8. ábra

amelynek tengelye a ξ helyi koordinátatengely, a másik pedig olyanból, amelynek tengelye az η tengely. Az itt szereplő igénybevételek közül N_α , N_β , M_α és M_β ott van a keresett ismeretlen függvények között, melyek már az egyensúlyi egyenletekkel kapcsolatban is szerepeltek. Ezzel szemben N_ξ , N_η , M_ξ , M_η , $M_{\xi\alpha}$ és $M_{\eta\beta}$ nem szerepel az ismeretlenként felvett tíz igénybevétel között.

A fajlagos igénybevételeket a következő határozott integrálok adják:

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi}\right) d\zeta, & N_\beta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta, \\
 N_{\alpha\xi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\xi} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi}\right) d\zeta, & N_{\beta\eta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\eta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta, \\
 M_\alpha &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi}\right) d\zeta, & M_\beta &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta, \\
 M_{\alpha\xi} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\xi} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi}\right) d\zeta, & M_{\beta\eta} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\eta} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta, \\
 N_\xi &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\xi \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta, & N_\eta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\eta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) d\zeta,
 \end{aligned}$$

$$M_{\xi} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_{\alpha}} \right) d\zeta, \quad M_{\eta} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\eta} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_{\beta}} \right) d\zeta,$$

$$M_{\xi\alpha} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi\alpha} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_{\alpha}} \right) d\zeta, \quad M_{\eta\beta} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\eta\beta} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_{\beta}} \right) d\zeta.$$

Itt R_{ξ} a szóban forgó pontra és a ξ tengely érintőjére illeszkedő normálmetszet görbületi sugara. R_{η} , R_{α} és R_{β} jelentése ugyanaz az η , α és β irányokra vonatkozólag. A felület normálmetszetének görbületét akkor tekintjük pozitívnak, ha a görbületi középpontba mutató vektor a felületi normálissal, a hálózat egy-egy csomópontjában tehát a csomóponthoz rendelt koordinátarendszer ζ tengelyével egyező irányítású. Így a 9. ábrán látható esetben R_{ξ} negatív, R_{η} pedig pozitív.

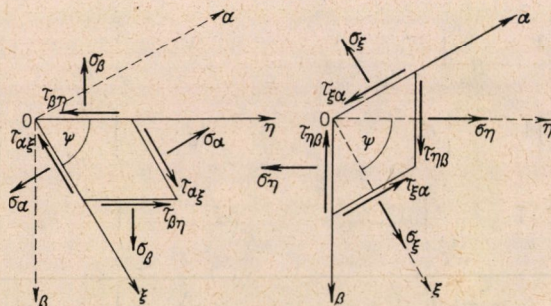
Feltételezésünk szerint a felületre merőleges feszültség a többihez képest elhanyagolhatóan kicsiny, ezért a feszültségi állapot síkbeli feszültségi állapotnak tekinthető. E szerint (10. ábra)

$$\sigma_{\eta} = \frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta} \cos^2 \psi + 2\tau_{\beta\eta} \sin \psi \cos \psi}{\sin^2 \psi},$$

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\beta} \sin^2 \psi + \sigma_{\eta} \cos^2 \psi + 2\tau_{\beta\eta} \sin \psi \cos \psi,$$



9. ábra



10. ábra

ill. σ_η helyére az előbbi kifejezést behelyettesítve

$$\sigma_\xi = \sigma_\alpha \cot^2 \psi + (\sigma_\beta (1 - \cot^2 \psi) + 2\tau_{\beta\eta} \cot \psi,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\alpha} &= \tau_{\beta\eta} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) + (\sigma_\eta - \sigma_\beta) \sin \psi \cos \psi = \\ &= \tau_{\beta\eta} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) + \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta \cos^2 \psi + 2\tau_{\beta\eta} \sin \psi \cos \psi - \sigma_\beta \sin^2 \psi}{\sin \psi} \cos \psi = \\ &= \tau_{\beta\eta} + (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cot \psi. \end{aligned}$$

Fentiek alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} N_\xi &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\xi \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_\alpha \cot^2 \psi + \sigma_\beta (1 - \cot^2 \psi) + 2\tau_{\beta\eta} \cot \psi] \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta. \end{aligned}$$

A kifejezésben szereplő egyes integrálokat a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi} + \frac{\zeta}{R_\xi} - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta = \\ &= N_\alpha + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta \left(\frac{1}{R_\xi} - \frac{1}{R_\alpha}\right) d\zeta = N_\alpha + \frac{1}{R_\xi} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi} + \frac{\zeta}{R_\xi}\right) d\zeta - \\ &\quad - \frac{1}{R_\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi} + \frac{\zeta}{R_\xi}\right) d\zeta = N_\alpha - \frac{1}{R_\xi} M_\alpha + \frac{1}{R_\alpha} M_\alpha + \\ &\quad + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(\frac{\zeta}{R_\xi}\right)^2 \left(1 - \frac{R_\xi}{R_\alpha}\right) d\zeta, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta} + \frac{\zeta}{R_\eta} - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta = \\ &= N_\beta + \frac{1}{R_\eta} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta} + \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta - \frac{1}{R_\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta} + \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta = \\ &= N_\beta - \frac{1}{R_\eta} M_\beta + \frac{1}{R_\alpha} M_\beta + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \left(\frac{\zeta}{R_\eta}\right)^2 \left(1 - \frac{R_\eta}{R_\alpha}\right) d\zeta, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\eta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\eta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta} + \frac{\zeta}{R_\eta} - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta = \\ &= N_{\beta\eta} + \frac{1}{R_\eta} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\eta} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta} + \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta - \frac{1}{R_\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\eta} \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta}{R_\eta}\right) d\zeta = N_{\beta\eta} - \frac{1}{R_\eta} M_{\beta\eta} + \frac{1}{R_\alpha} M_{\beta\eta} + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\eta} \left(\frac{\zeta}{R_\eta}\right)^2 \left(1 - \frac{R_\eta}{R_\alpha}\right) d\zeta. \end{aligned}$$

Feltételezésünk szerint a héj h vastagsága egyéb méretéhez, így R_ξ -hez és R_η -hoz viszonyítva, kicsiny, ezért a másodrendűen kicsiny $(\zeta/R_\xi)^2$ és $(\zeta/R_\eta)^2$ tényezővel szorzott kifejezéseket tartalmazó integrálokat elhanyagolhatjuk. Ezáltal N_ξ -re a következő kifejezés adódik

$$N_\xi = \left[N_\alpha + \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\xi} \right) M_\alpha \right] \cot^2 \psi + \left[N_\beta + \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\eta} \right) M_\beta \right] (1 - \cot^2 \psi) + \\ + 2 \left[N_{\beta\eta} + \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\eta} \right) M_{\beta\eta} \right] \cot \psi,$$

az elhanyagolás pedig

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \sigma_\alpha \left(\frac{\zeta}{R_\xi} \right)^2 \left(1 - \frac{R_\xi}{R_\alpha} \right) \cot^2 \psi + \left(\frac{\zeta}{R_\eta} \right)^2 \left(1 - \frac{R_\eta}{R_\alpha} \right) [\sigma_\beta (1 - \cot^2 \psi) + \right. \\ \left. + 2 \tau_{\beta\eta} \cot \psi] \right\} d\zeta.$$

Hasonlóképpen

$$M_\xi = M_\alpha \cot^2 \psi + M_\beta (1 - \cot^2 \psi) + 2 M_{\beta\eta} \cot \psi;$$

itt az elhanyagolás

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\xi} \right) \sigma_\alpha \cot^2 \psi + [\sigma_\beta (1 - \cot^2 \psi) + 2 \tau_{\beta\eta} \cot \psi] \cdot \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\eta} \right) \right\} \zeta^2 d\zeta.$$

$M_{\xi\alpha}$ kétféleképpen is kifejezhető

$$\text{I.} \quad M_{\xi\alpha} = M_{\alpha\xi}$$

Ekkor az elhanyagolás

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\xi} \zeta^2 \left(\frac{1}{R_\xi} - \frac{1}{R_\alpha} \right) d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\xi} \left(\frac{\zeta}{R_\xi} \right)^2 \left(1 - \frac{R_\xi}{R_\alpha} \right) d\zeta$$

$$\text{II.} \quad M_{\xi\alpha} = M_{\beta\eta} + (M_\alpha - M_\beta) \cot \psi$$

esetében pedig az elhanyagolás

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \tau_{\beta\eta} \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\eta} \right) + \left[\sigma_\alpha \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\xi} \right) + \sigma_\beta \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\eta} \right) \right] \cot \psi \right\} \zeta^2 d\zeta.$$

Ha a ψ szög kevéssel tér el a 90° -tól, akkor a második összefüggés ad jobb közelítést, mert akkor egyrészt $\cot \psi$ és rajta keresztül az integrálandó

kifejezésnek a vele szorzott tagja is zérushoz közel álló érték, másrészt pedig R_α és R_η értékei közel egyenlők, tehát $(1/R_\alpha - (1/R_\eta))$ értéke és rajta keresztül az integrálandó kifejezés másik tagja is zérushoz tart $\psi \rightarrow 90^\circ$ esetén.

Az η tengelyre merőleges metszet N_η , M_η és $M_{\eta\beta}$ igénybevételei hasonló módon fejezhetők ki a szereplő igénybevételek segítségével.

7. A hajlító és a csavaró merevség aránya

A számítás során a modellként szolgáló tartórács gerendáinak csavaró merevségét is figyelembe kell venni. Milyen legyen azonban a gerendák csavaró merevsége különös tekintettel arra, hogy e gerendákat tetszés szerinti szélességűeknek, a vizsgálatok során végtelen kis szélességűeknek választjuk, ami azt jelenti, hogy egy-egy ilyen gerendának a hajlító merevsége is zérushoz tart, csavaró merevsége pedig a szélesség csökkenésével hatványozott mértékben csökken. Meggondolva azonban, hogy a gerenda terhelése is a szélességével arányos, látható, hogy a hajlító nyomaték hatásának (eltolódás és tengelykeresztelfordulás) szempontjából az egység megválasztása (egységnyi szélességű gerendáról van szó) nem bír jelentőséggel.

Egészen más a helyzet, ha egy derékszögű keresztmetszetű gerendát csavaró nyomatékkal terhelünk. Azonos arányban csökkentve a gerenda szélességét és a csavaró nyomaték értékét a fajlagos elcsavarodás szöge a szélesség csökkentésével nő. A probléma tehát nem közelíthető meg a héjból kimetszett gerenda csavaró merevségén keresztül. Helyes arányokra akkor jutunk, ha a gerendát a héj egy háborítatlan sávjaként kezeljük.

A kérdés tulajdonképpen így fogalmazható meg. A héjból kivágva egy egységnyi szélességű (az egység tetszőleges) és a héj vastagságával egyenlő magasságú gerendát, hogyan választandó meg e gerenda csavaró merevsége ahhoz, hogy a héjban uralkodó fajlagos csavaró nyomaték hatására a fajlagos elcsavarodása ugyanakkora legyen, mint magában a héjban volt.

A vizsgálat a felülethez rendelt derékszögű koordinátarendszerben végezhető el. Legyenek a ξ , η , ζ görbevonalú koordinátarendszerek tengelyei olyanok, hogy ξ és η a felületen levő, egymást derékszögben metsző paramétervonalak, ζ pedig a felület normálisába esik.

A feszültségek és a fajlagos alakváltozások között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\sigma_\xi = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\xi + \nu \varepsilon_\eta),$$

$$\sigma_\eta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta),$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{\xi\eta}.$$

A fajlagos alakváltozások pedig a következő kapcsolatban vannak az eltolódásokkal:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{w}{R_{\xi} - \zeta} - \frac{v}{r_{\xi}}, \\ \varepsilon_{\eta} &= \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{w}{R_{\eta} - \zeta} + \frac{u}{r_{\eta}}, \\ \gamma_{\xi\eta} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{u}{r_{\xi}} + \frac{v}{r_{\eta}},\end{aligned}$$

ahol u a ξ , v az η , w pedig a ζ tengellyel párhuzamos eltolódást, r_{ξ} a ξ , r_{η} pedig az η tengely geodetikus görbületi sugarát jelenti.

Felületre illeszkedő görbe geodetikus görbületén a görbe érintősíkon levő vetületének a görbületét értjük. Képleteinkben a geodetikus görbületet akkor tekintjük pozitívnak, ha a vizsgált pontból a görbületi középpontba mutató vektor az $\mathbf{f} \times \mathbf{t}$ vektorral azonos irányítású, ahol $\mathbf{f}$ a felületi normális, $\mathbf{t}$ pedig a görbe érintővektora.

A ζ koordinátától is függő eltolódások a középfelület pontjainak $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ és $w(\xi, \eta)$ eltolódásaival, valamint a pontnak a középfelülethez való ζ távolságával a következőképpen fejezhetők ki:

$$\begin{aligned}u(\xi, \eta, \zeta) &= \left(1 - \frac{\zeta}{R_{\xi}}\right) u(\xi, \eta) - \zeta \frac{\partial w(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \left(1 - \frac{\zeta}{R_{\eta}}\right) v(\xi, \eta) - \zeta \frac{\partial w(\xi, \eta)}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Feltételezésünk szerint a héjvastagság és az eltolódások a héj egyéb méreteihez képest kicsinyek, ezért a R -rel vagy r -rel osztott tagok a többihez viszonyítva elhanyagolhatók és így a fajlagos alakváltozások az

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

képletekkel, az eltolódások pedig az

$$\begin{aligned}u(\xi, \eta, \zeta) &= u(\xi, \eta) - \zeta \frac{\partial w(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= v(\xi, \eta) - \zeta \frac{\partial w(\xi, \eta)}{\partial \eta}\end{aligned}$$

képletekkel adhatók meg. Utóbbiakat az előzőekbe helyettesítve

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \zeta \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi^2},$$

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \eta^2},$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} - 2\zeta \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta}$$

adódnak, amelyekkel a feszültségek

$$\sigma_{\xi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right],$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right],$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - 2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right).$$

A gerenda szélességét egységnyinek választva, a ráható hajlító nyomaték, azaz a hajlító nyomaték fajlagos értéke, a (ζ/R_{μ}) , $(\mu = \xi, \eta)$ értékének az egység melletti elhanyagolása után

$$M_{\xi} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi} \zeta \, d\zeta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right),$$

$$M_{\eta} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\eta} \zeta \, d\zeta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right),$$

a csavaró nyomaték fajlagos értéke pedig

$$M_{\xi\eta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi\eta} \zeta \, d\zeta = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}.$$

A fajlagos tengelykeresztelfordulás, a $D = Eh^3/12$ jelölés bevezetésével, a hajlító nyomaték hatására

$$\frac{1}{D} (M_{\xi} - \nu M_{\eta}),$$

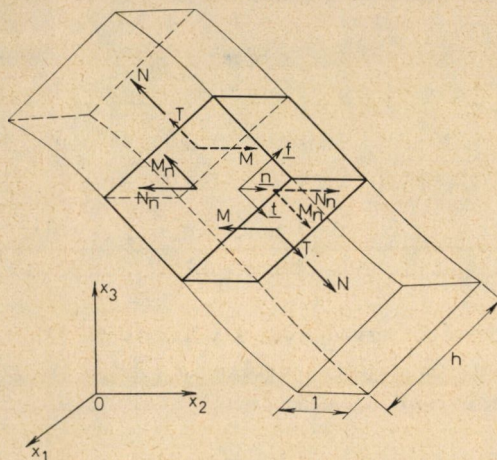
a csavaró nyomaték hatására pedig

$$\frac{1}{D} (1+\nu) M_{\xi\eta}.$$

Az eredmény azt fejezi ki, hogy az így kimetszett gerenda hajlítással szembeni merevsége a csavarásra vonatkozó merevség $(1+\nu)$ -szerese.

8. Görbe tengelyű rúd alakváltozása

A tartórács felbontásaként nyert, statikailag határozott részek adott pontjainak az elmozdulását könnyen ki tudjuk számítani, ha ismert az az eljárás, amelynek segítségével a rúd kezdőpontja elmozdulásának és a rúdban keletkező igénybevételeknek birtokában a végpont elmozdulása számítható.



11. ábra

Célkitűzésünk nem igényli az általános eset tárgyalását, ezért a feladatot ennek megfelelően szűkítjük. Csupán olyan görbe tengelyű rudak vizsgálatával foglalkozunk, amelyeknek tengelye az adott középfelületre illeszkedő, adott egyenletű görbe. A rúd keresztmetszete olyan derékszögű négyszög, amelynek szélessége egységnyi, magassága pedig a héj h vastagságával egyenlő. A keresztmetszet egyik (a h hosszúságú éllel párhuzamos) szimmetria tengelye a felületi normálissal párhuzamos, a másik pedig erre és a görbe e pontbeli érintőjére is merőleges. A rúdhoz, ill. tengelyének minden pontjához a már definiált t , n , f vektorhármast rendeljük (5. ábra).

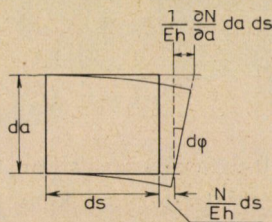
A nyíróerők és a felületi erők (a héjra ható külső erők) hatását elhanyagoljuk, azaz a rúdnak csak a következő igénybevételek (11. ábra) hatására létrejövő alakváltozását keressük:

- M az egységnyi szélességű rúdra ható hajlító nyomaték, amelynek vektora az n vektorral párhuzamos és pozitív nyomaték esetén ellentétes irányítású. Ez a nyomaték a héjban ható, a gerenda tengelyére merőleges irányhoz tartozó fajlagos hajlító nyomaték,
- M_n a rúd tengelyére merőleges síkban ható hajlító nyomaték fajlagos értéke. Ez a rúdnek a metszés folytán keletkező oldallapjait terheli. Vektora a t vektorral párhuzamos. Akkor pozitív, ha a héjnak ugyanazon az oldalán

- ébredt húzó feszültséget, mint a pozitív M . Ez a nyomaték a héjban a rúd tengelyével jellemzett irányhoz tartozó hajlító nyomaték,
- T az egységnyi szélességű rúdra ható csavaró nyomaték. Ez a héjban a rúd tengelyére merőleges irányban ható csavaró nyomaték. Vektora pozitív T esetén a $\mathbf{t}$ vektorral megegyező irányítású,
- N a rúd tengelyével párhuzamos normál erő fajlagos értéke. Pozitív, ha vektora a $\mathbf{t}$ vektorral megegyező irányítású, azaz ha húzó feszültséget okoz. Változását akkor tekintjük pozitívnak, ha értéke $\mathbf{n}$ irányában haladva nő. Ez azt jelenti, hogy $\partial N / \partial n$ pozitív értéke esetében a hatásként létrejövő fajlagos tengelykeresztelfordulás vektora az $\mathbf{f}$ vektorral ellenkező irányítású, tehát pozitív $\partial N / \partial n$ esetében a fajlagos tengelykeresztelfordulás negatív. Ugyanis azokat a tengelykeresztelfordulás komponenseket tekintjük pozitívnak, amelyek vektora a $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, ill. $\mathbf{f}$ vektorral egyező irányítású. Így pozitív M negatív, pozitív T pedig pozitív elfordulást eredményez,
- N_n a rúd tengelyére merőleges normálerő fajlagos értéke. Pozitív, ha húzó feszültséget okoz.

A teljes felületre érvényes x_1, x_2, x_3 koordinátarendszerben az elmozdulás és elfordulás komponenseket akkor tekintjük pozitívnak, ha vektoraik a koordinátatengelyek pozitív irányába mutatnak.

Már említettük, hogy a felületi normálissal párhuzamos vektorú fajlagos nyomatékot nem tekintjük önálló nyomatéknak, hanem azt mint a normálerő változását vesszük figyelembe. Képleteinkben tehát a normálerő hatása nemcsak a gerenda megnyúlásában jelentkezik, hanem a gerenda tengelyére merőleges irányú változása a felületi normális körüli tengelykeresztelfordulást is előidézi. Ennek értéke a következőképpen határozható meg.



12. ábra

Tekintsünk egy ds hosszúságú és da szélességű elemet (12. ábra). A normálerő változását ezen a da szélességen lineárisnak tekintjük, tehát, ha az elem egyik, az s tengellyel párhuzamos éle mentén az s irányú normálerő értéke N , akkor a tőle da távolságban levő él mentén $N + (\partial N / \partial a) da$. A normálerő hatására a ds hosszúságú elem megnyúlik. Ez a megnyúlás azonban az

s -re merőleges irányban változik. A megnyúlás növekménye da távolságra

$$\frac{1}{Eh} \frac{\partial N}{\partial a} da ds,$$

ami azt jelenti, hogy a ds hosszra eső tengelykeresztelfordulás

$$d\varphi = \frac{1}{Eh} \frac{\partial N}{\partial a} ds.$$

Ezt az összefüggést használjuk a továbbiakban a normálerő változásából keletkező tengelykeresztelfordulások és eltolódások számítására szolgáló képletekben. Ezekben a képletekben N a héjból kimetszett tartórács tengelyére merőleges metszethen keletkező normálerő, n pedig a tengelyre merőleges irány.

Ferdeszögű koordinátarendszer esetében azonban ezek az erők nem tartoznak a felvett ismeretlenek közé. Csupán a közelítő polinomok ξ és η szerinti deriváltjait tudjuk számítani és a keresett deriváltakat ezekkel tudjuk közelíteni.

Az irány szerinti differenciálhányadosra vonatkozó ismert képlet segítségével, és figyelembe véve, hogy a ξ tengelyre merőleges irány az α , az η tengelyre merőleges irány pedig a β irány, továbbá, hogy az α egyenes pozitív iránya a görbéhez rendelt n vektor irányával megegyezik, míg β irányítása az η tengelyhez rendelt n vektor irányításával ellenkező, az egyes tengelyirányokhoz tartozó normálerők merőleges irány szerinti deriváltjait a következő képletek szolgáltatják:

$$\frac{\partial N_\xi}{\partial n} = \frac{\partial N_\xi}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sin \psi} \left(\frac{\partial N_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} \cos \psi \right)$$

és

$$\frac{\partial N_\eta}{\partial n} = - \frac{\partial N_\eta}{\partial \beta} = - \frac{1}{\sin \psi} \left(\frac{\partial N_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial N_\eta}{\partial \eta} \cos \psi \right),$$

ahol ψ a ξ és η tengelyek által bezárt szög (10. ábra).

A megfelelő tengelykereszt-elforduláskomponenseket $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ -mal, az egységvektorokat változatlanul e_1, e_2 és e_3 -mal jelölve, és megtartva az $e_4 = e_1, e_5 = e_2, x_4 = x_1, x_5 = x_2$ jelöléseket, sőt kiegészítve $\varphi_4 = \varphi_1$ és $\varphi_5 = \varphi_2$ -vel, továbbá bevezetve a

$$K = \frac{12}{Eh^3}$$

és

$$m = K (M - \nu M_n) n - (1 + \nu) K T t + \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial N}{\partial n} - \nu \frac{\partial N_n}{\partial n} \right) f$$

jelöléseket, a (j, k) rúdszakasz j kezdőpontja elmozdulásának ismeretében a k jelű végpont elmozdulásának koordinátái a következő képletek alapján számíthatók:

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_{k,\mu} &= \Delta \varphi_{j,\mu} - \int_{(l,j,k)} \mathbf{m} \mathbf{e}_\mu \, ds, \quad (\mu = 1, 2, 3) \\ \Delta x_{k,\mu} &= \Delta x_{j,\mu} + \Delta \varphi_{j,\mu+1} (x_{k,\mu+2} - x_{j,\mu+2}) - \Delta \varphi_{j,\mu+2} (x_{k,\mu+1} - x_{j,\mu+1}) + \\ &\quad + \int_{(l,j,k)} \frac{1}{Eh} (N - \nu N_n) \mathbf{t} \mathbf{e}_\mu \, ds + \\ &\quad + \int_{(l,j,k)} \mathbf{m} [(x_{k,\mu+1} - x_{\mu+1}) \mathbf{e}_{\mu+2} - (x_{k,\mu+2} - x_{\mu+2}) \mathbf{e}_{\mu+1}] \, ds,\end{aligned}$$

ahol $x_{k,\mu}$ a k jelű pont, x_μ pedig a futópont μ -edik koordinátáját jelenti.

A héjnak állandó h vastagsága esetében az egyes képletekben h értéke az integrálás jele elé kiemelhető és a K -val jelölt kifejezés konstans. Változó héjvastagság esetében h is az s paraméter függvényében adandó meg. Ennek figyelembevételével a közölt képletek állandó és változó vastagságú héjak számítására egyaránt alkalmasak.

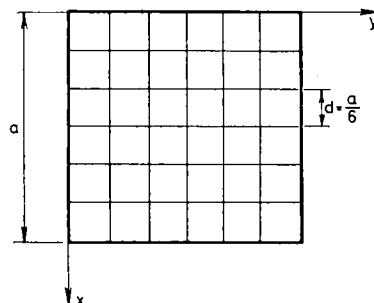
9. Példa

A módszer első alkalmazásaként a négyzet alaprajzú, pereme mentén egyszerűen támasztott lemez került megoldásra egyenletesen megoszló teher esetében. A lemez anyagának Poisson-féle tényezője $\nu = 0,3$. A számítást a 13. ábrán látható hálózat alapján végeztük. A négyszeres szimmetria miatt még a lemez negyedére is fennáll, hogy

$$M_{yij} = M_{xji} \text{ és } Q_{yij} = Q_{xji},$$

ami lehetővé tette, hogy csak M_x hajlító nyomatékokkal és Q_x nyíróerőkkel dolgozzunk, amikor az x index is elhagyható.

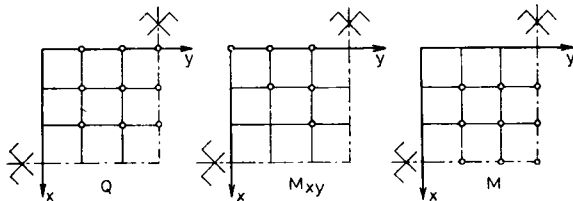
Ismeretleneknek az igénybevételek 14. ábrán megjelölt pontokhoz tartozó értékeit tekintettük, ami összesen 24 ismeretlent (9 nyíróerőt, 6 csavaró nyomatékot és 9 hajlító nyomaték fajlagos értéket) jelent.



13. ábra

A lemez-elemek egyensúlyára 6 erő és 9 nyomatéki, együtt tehát 15 egyensúlyi, a tartórács csomópontjaira 3 a függőleges eltolódások és 9 a tengelykeresztfordulások egyenlőségét kifejező, együttesen 12 folytonossági egyenlet írható fel. Az egyenletek száma tehát összesen 27.

Ennek a 27 egyenletből álló és 24 ismeretlent tartalmazó túlhatározott lineáris egyenletrendszernek a megoldása szolgáltatta a keresett fajlagos



14. ábra

igénybevételeket. A megoldásból egyetlen — a szakirodalom pontos eredményével is összehasonlítható — értéket említünk meg. A lemez középpontjában ható maximális hajlító nyomaték értékére a számításból $0,0477 \text{ qa}^2$ adódott, a szakirodalomban közölt* $0,0479 \text{ qa}^2$ értékkel szemben. Az eltérés tehát a fél százalékot sem éri el.

Calculation of Bent Shells by Means of a Grid Model. The method presented is based on the equilibrium equations related to the elements of a bent shell, defined by a given network, and on the continuous equations related to the network proper representing a grid. The coefficients of the equations should be calculated by definite integrals. The rigidity properties of the reference grid are determined by the rigidity data of the shell, and its beams are analyzed as spatial curve axis bars. Finally, the results of an actual application are presented.

Berechnung von auf Biegung beanspruchten Schalen mit Hilfe eines Trägerrostmodells. Die für die mit einem gegebenen Gitter begrenzten Elemente von auf Biegung beanspruchten Schalen aufgeschriebenen Gleichgewichtsgleichungen und der für das Gitter — als Trägerrost — aufgeschriebenen Kontinuitätsgleichungen bilden die Grundlage des in der Abhandlung dargestellten Verfahrens. Die Koeffizienten der Gleichungen können mit Hilfe von bestimmten Integralen gerechnet werden. Die Steifheitseigenschaften des Bezugsträgerrostes werden von den Steifheitsparametern der Schale bestimmt und die Balken werden als Stäbe von räumlich gekrümmten Achsen analysiert. Die Ergebnisse der praktischen Anwendung werden mitgeteilt.

* Lásd pl. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells, McGraw Hill Book Company, Inc. New York—Toronto—London 1959, 118—120. oldalának 6—8 táblázatait.