

# HOLTIDŐS SZABÁLYOZÁSI KÖRÖK TERVEZÉSE AZ IDŐTARTOMÁNYBAN

KEVICZKY LÁSZLÓ\*

és

CSÁKI FRIGYES\*\*

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

[Beérkezett 1971 július 17-én]

Vizsgálatainkban I és PI szabályozókat illesztettünk ideális, egy- és kéttárolós holtidős szabályozott szakaszokhoz. Bemutatunk egy módszert a túllendülés értékének számítására. A digitális számítógépen kapott eredményeket diagram formájában közöljük. Foglalkozunk a holtidős körök négyzetes integrálkritérium alapján történő optimalizálásával is, az eredményeket szintén diagramokban közöljük. Közelítő összefüggéseket állapítunk meg a szabályozási időnek a rendszer paramétereiről való függésére. A kapott eredmények hasznosan alkalmazhatók lineáris, egyhurkos holtidő szabályozási körök tervezésére.

## Bevezetés

Holtidős szabályozási körök átmeneti folyamatainak megítélésével foglalkozó cikket meglehetősen keveset találunk a szakirodalomban. Az eddigi vizsgálatok legtöbbször a stabilitás kérdését tárgyalták különböző struktúrájú rendszerekben, valamint megpróbálták összefüggéseket keresni a frekvencia- és az időtartománybeli minőségi jellemzők között.

Az időtartománybeli közvetlen vizsgálatot JA. Z. CIPKIN ötlete nyomán szokták elvégezni [7]. Ezekben a cikkekben sajnálatos módon az általánosságra való törekvés legtöbbször a hasznosság rovására ment; ugyanis az időfüggvényekre körülményesen levezetett zárt összefüggések és képletek vizsgálatával nem kaptak több információt a holtidős rendszerekről, mint amennyit már amúgy is tudtunk [8].

Mindezen eredmények ismeretében, a problémakörnek a túllendülés vizsgálatára való leegyszerűsítésével a tervezési munkát nagymértékben elősegítő diagramokat dolgoztunk ki az egyhurkos, lineáris, holtidős rendszerek néhány alaptípusára.

Megvizsgáltuk továbbá a holtidős rendszerek egyszerűbb struktúráira a négyzetes integrálkritérium alapján történő optimalizálás kérdéseit; egyrészt a közvetlen időtartománybeli vizsgálatokra támaszkodva, másrészt a Parseval-tétel segítségével a frekvenciatartományon keresztül. Az optimális beállításokra szintén diagramokat közlünk.

\* Dr. Keviczky László, Budapest VII., Damjanich u. 25/a

\*\* Prof. Dr. Csáki Frigyes, Budapest V., Váci u. 8.

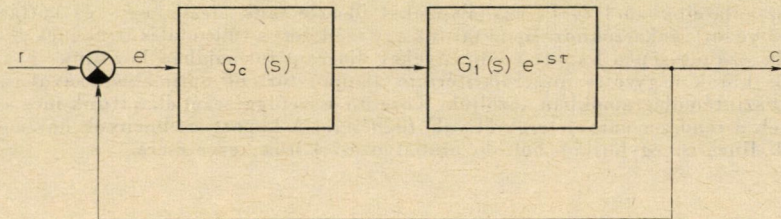
Végül szimulációs eredmények alapján közelítő összefüggéseket adunk meg egyszerű holtidős körök szabályozási idejének számítására.

### 1. Diagramok egyszerű holtidős szabályozási körök túllendülésére

Legyen a vizsgált szabályozási kör az 1. ábra szerinti, ahol  $G_c(s)$  — a szabályozó,  $G_1(s)e^{-s\tau}$  — pedig a szabályozott szakasz átviteli függvénye.

A felnyitott kör átviteli függvénye:

$$G(s) = G_c(s) G_1(s) e^{-s\tau}. \quad (1.1)$$



1. ábra

A hibaátviteli függvény a következő:

$$W_e(s) = \frac{1}{1+G(s)}. \quad (1.2)$$

Az (1.2) konvergens geometriai sorba fejthető, ha  $|G(j\omega)| < 1$ . Ez a nagyfrekvenciás tartományban általában valóban teljesül, így a hibaátmeneti függvény kezdeti szakaszát (1.2)-ből meg tudjuk határozni. A mondottak szerint tehát:

$$W_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = 1 - G + G^2 - G^3 + G^4 - \dots \pm G^i \pm \dots \quad (1.3)$$

A részletes vizsgálatok megmutatták, hogy a  $t = 0$  érték körüli konvergencia azt jelenti, hogy az (1.3) sor első  $n$  tagja pontosan meghatározza a hibaátviteli függvény  $[0, n\tau]$  tartománybeli viselkedését. (Ugyanez természetesen a szabályozott jellemzőre is fennáll, de a hibajelre az összefüggések egyszerűbbek.) Az (1.3) sor tagjaiban ugyanis szerepel az  $e^{-i\tau s}$  szorzótényező, amely az inverz  $\mathcal{L}$ -transzformáció elvégzésekor az eltolási tétel értelmében azt jelenti, hogy a sor  $i$ -edik tagja a megelőző tagokhoz tartozó időfüggvényeket már nem befolyásolja. Ez lényeges különbséget jelent (1.3) értelmezésében a nem holtidős rendszerekhez képest.\*

\* Az (1.3) sor konvergenciafeltételeit részletesen WUNSCH vizsgálta meg *Moderne Systemtheorie* című könyvében.

A továbbiakban ideális holtidős taghoz illesztett  $I$  és  $PI$ , valamint egytárolós holtidős taggal összekapcsolt  $I$  szabályozó esetén kialakult szabályozási kör túllendülését fogjuk meghatározni a paraméterek függvényében.

1.1  $I$ -szabályozóval kompenzált holtidős tag

Először a tiszta holtidős tagot  $I$ -szabályozóval vizsgáljuk, mert az a legegyszerűbb eset, és erre a legkönnyebb elvi megfontolásokat kidolgozni. Ebben az esetben egységugrás bemenetre

$$G_c(s) = \frac{1}{sT_1}, \quad G_1(s) = 1 \quad \text{és} \quad R(s) = \frac{1}{s}.$$

A hibajel  $\mathcal{L}$ -transzformáltja (1.1) és (1.3) alapján

$$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\} = \frac{1}{s} W_e(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{e^{-s\tau}}{s^2 T_1} + \frac{e^{-2s\tau}}{s^3 T_1^2} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^i \frac{e^{-is\tau}}{s^{i+1} T_1^i} + \dots \right] \quad (1.4)$$

Tehát

$$y = e(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i F_i(t - i\tau) I(t - i\tau), \quad (1.5)$$

ahol

$$F_i(t) = \frac{t^i}{i! T_1^i} \quad (1.6)$$

és az  $I(t)$  egységugrást jelent.

Általában az  $(i + 1)$ -edik  $[i\tau \leq t \leq (i + 1)\tau]$  tartományban érvényes  $y_{i+1}$  meghatározása az

$$y_{i+1} = y_i + (-1)^i F_i(t - i\tau) I(t - i\tau); \quad y_0 = 0 \quad (1.7)$$

rekurzív képlettel történhetik.

Vezessük be az

$$x = \frac{t}{\tau} \quad \text{és} \quad m = \frac{\tau}{T_1}. \quad (1.8)$$

dimenzió nélküli változókat. Így kapjuk, hogy:

$$y_1(x) = 1, \quad \text{ha } 0 \leq t \leq \tau \\ y_2(x) = -mx + (1 + m), \quad \text{ha } \tau \leq t \leq 2\tau \\ y_3(x) = \frac{1}{2} m^2 x^2 - mx(1 + 2m) + (1 + m + 2m^2) \quad \text{ha } 2\tau \leq t \leq 3\tau$$

$$\begin{aligned}
 y_4(x) = & -\frac{1}{6} m^3 x^3 + \frac{1}{2} m^2 x^2 (1+3m) - \\
 & -\frac{1}{2} m x (2+4m+9m^2) + \\
 & + \frac{1}{2} (2+2m+4m^2+9m^3), \quad \text{ha } 3\tau \leq t \leq 4\tau
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Határozzuk meg a hibajel első minimumának helyét és a függvény értékét ebben a pontban. Az (1.9) időfüggvényekből látható, hogy az 1. és 2. intervallumba nem kerülhet szélső érték. Ha a 3. intervallumba kerül minimum, annak helye az  $y_3'(x_3) = 0$  feltételből:

$$x_3 = 2 + \frac{1}{m} = 2 + \frac{T_1}{\tau}, \tag{1.10}$$

és nagysága

$$y_3(x_3) = \frac{1}{2} - m = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{T_1}. \tag{1.11}$$

A stabilitás határát, valamint az (1.7)-tel kapcsolatban mondottakat figyelembe véve az (1.10) és (1.11) csak a

$$\frac{2}{\pi} \tau \leq T_1 \leq \tau \tag{1.12}$$

tartományban érvényes. (Mint ismeretes az  $I$  szabályozóval kompenzált holtidős szakasz esetén a kritikus integrálási idő:  $T_{Ikr} = (2/\pi)\tau$ )

A 4. intervallumba eső minimum helye

$$x_4 = \frac{1}{m} + 3 - \sqrt{\frac{2}{m} \left(1 - \frac{1}{2m}\right)}. \tag{1.13}$$

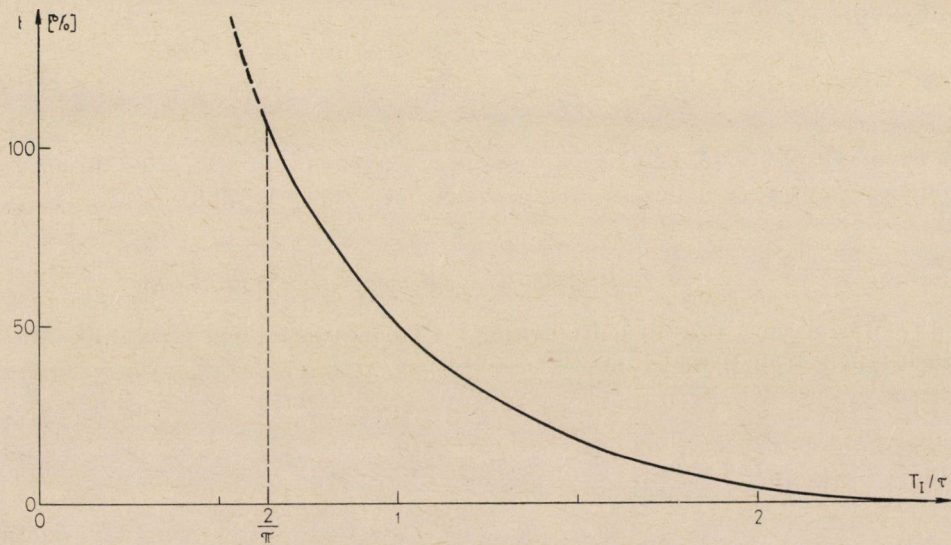
A függvény  $y_4(x_4)$  helyettesítési értéke, mint látható, már csak bonyolultan számítható (1.9) alapján. Most és a következőkben is (1.3)-nak csak az első négy tagját fogjuk figyelembe venni, mivel magasabb fokszámú tagoknál a módszer már elveszti egyszerűségét és szemléletességét, másrészt a gyakorlatban ez a közelítés legtöbbször megengedhető (lásd később).

Az (1.13) érvényességének feltétele

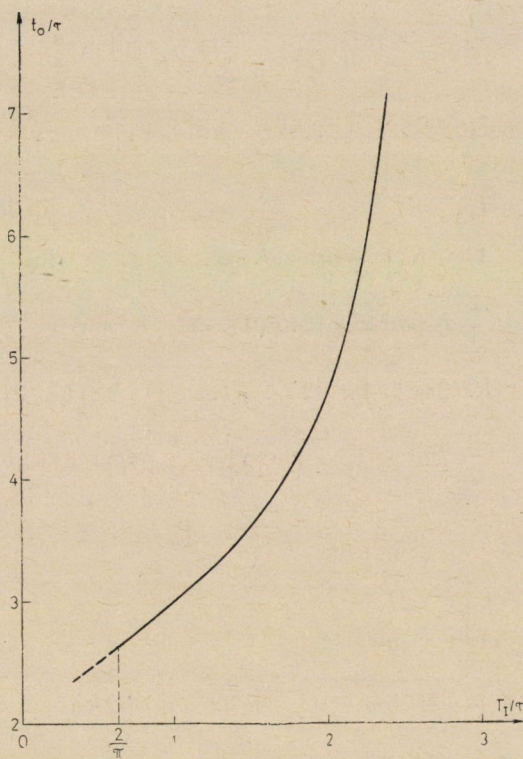
$$\tau \leq T_1 \leq \tau \frac{2 + \sqrt{2}}{2}. \tag{1.14}$$

A 2. ábrán az (1.10), (1.11), (1.13) és (1.9) alapján készült diagramot láthatunk a szabályozott jellemző

$$l = 1 - y_i(x_i) \tag{1.15}$$



2. ábra



3. ábra

túllendülésére, a 3. ábrán pedig a

$$\frac{t_0}{\tau} = \frac{x_i}{\tau} \quad (1.16)$$

normalizált csúcsidő értékére a  $T_I/\tau$  függvényében. Az (1.14)-en kívül eső néhány pontot modellezéssel határoztuk meg (lásd később).

### 1.2. *PI-szabályozóval kompenzált holtidős tag*

Másodszor a tisztán holtidős tagot *PI* kompenzációval vizsgáljuk. Ha a szabályozó átviteli függvénye

$$G_c(s) = K \frac{1+sT_I}{sT_I}, \quad (1.17)$$

ebben az esetben

$$G(s) = K \frac{1+sT_I}{sT_I} e^{-s\tau}. \quad (1.18)$$

Ismét az (1.3) szerinti sorbafejtést alkalmazva, a hibajel  $\mathcal{L}$ -transzformáltjára kapjuk  $[R(s) = 1/s]$ :

$$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\} = \frac{1}{s} W_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (-K)^i \frac{1+sT_I}{sT_I} \frac{1}{s^{i+1}} e^{-is\tau}. \quad (1.19)$$

Az 1.1. pontban leírt módszert követve a hibajel időfüggvényének az első négy tartományra érvényes alakja:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1, & \text{ha } 0 \leq t < \tau, \\ y_2(x) &= 1 - K(1-m) - Kmx, & \text{ha } \tau \leq t < 2\tau, \\ y_3(x) &= \frac{1}{2} K^2 m^2 x^2 + [2K^2(1-m) - K] mx + \\ &+ K^2(2m^2 - 4m + 1) + K(m-1) + 1, & \text{ha } 2\tau \leq t < 3\tau, \\ y_4(x) &= \frac{1}{6} fm^3 x^3 + \frac{1}{4} gm^3 x^2 + \frac{1}{2} hm^3 x + d, & \text{ha } 3\tau \leq t < 4\tau, \end{aligned} \quad (1.20)$$

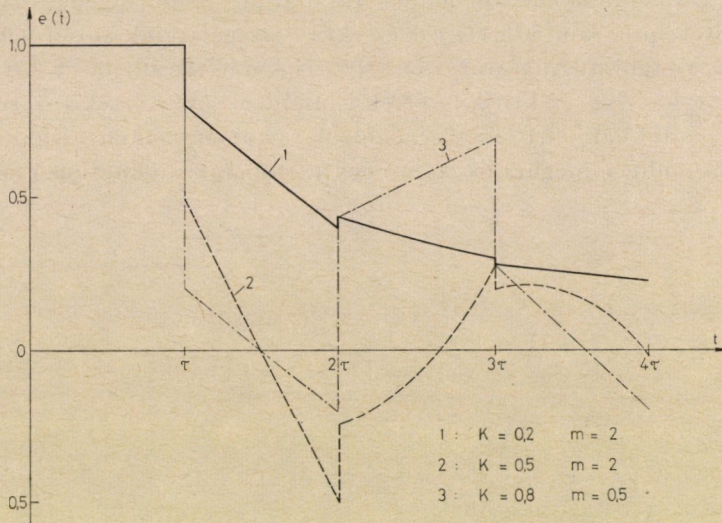
ahol

$$\begin{aligned} f &= -K^3, \\ g &= 6K^3 \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{2K^2}{m}, \\ h &= -\frac{1}{m^2} [3K^3(3m^2 - 6m + 2) - 4K^2(1-m) + 2K], \\ d &= K^3(4.5m^3 - 13.5m^2 + 9m - 1) + K^2(2m^2 - 4m + 1) - K(1-m) + 1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

A hibaátmeneti függvényt itt is tartományonként külön vizsgáljuk. Az egyes intervallumok határán a  $t = \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, \dots$  stb. pontokban a szabályozó arányos része ugrást okoz a függvényben. Ennek abszolút értéke az  $i$ -edik határponton ( $t = i\tau$ -nál)  $K^i$ , előjele pedig a negatív visszacsatolás miatt  $(-1)^i$  szerint változik.

Így a tartományon belüli minimumokon kívül a páros sorszámú határoknál a balról, páratlan sorszámúaknál a jobbról felvett függvényértéket is figyelembe kell vennünk a minimum keresésekor.

Az elmondottak illusztrálására a 4. ábrán egy aperiodikus és két lengő lefolyású átmeneti függvényt mutatunk be.



4. ábra

Tartománybeli minimuma csak az  $y_3(x)$  és  $y_4(x)$  függvénynek lehet:

a) Az előbbi minimumának helye az  $y_3'(x) = 0$  egyenlet megoldása:

$$x_3 = 2 + \frac{1-2K}{mK}, \quad (1.22)$$

a minimum értéke:  $y_3(x_3)$ .

b) Az  $y_4(x)$  függvény szélsőértékeit az  $y_4'(x) = 0$  másodfokú egyenlet gyökei határozzák meg. Számunkra csak a nem negatív diszkriminánsához tartozó megoldások érdekesek, de ezek közül is csak a minimumhoz tartozó. Esetünkben — mivel a harmadfokú tag előjele negatív — ez a kisebbik gyök ( $f < 0$  miatt):

$$x_4 = \frac{-g + \sqrt{g^2 + 4fh}}{2f}, \quad (1.23)$$

a függvény értéke:  $y_4(x_4)$ .

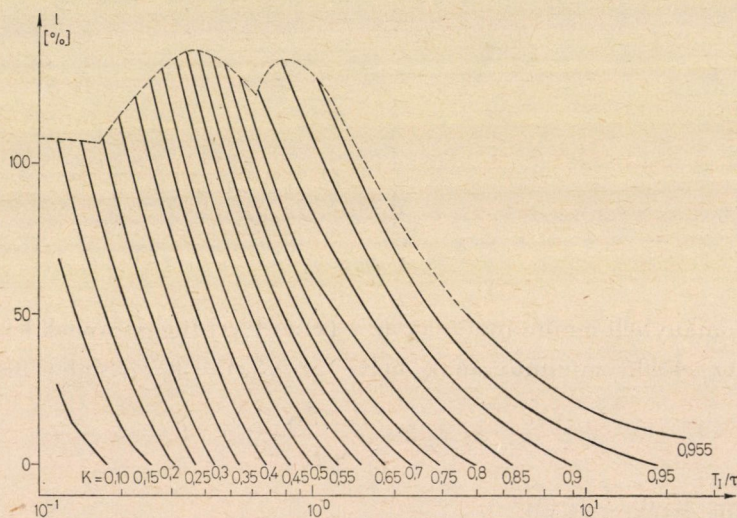
c) A határokról elmondottak szerint  $x = 2 - t$  a 2. intervallumból, balról kell megvizsgálunk. Itt a függvényérték:

$$y_2(2) = 1 - K(1 + m). \quad (1.24)$$

Hasonlóképpen  $x = 4$ -et a negyedik tartományból vizsgáljuk, ahol  $y_4(4)$ -t kell képezni.

d) A függvény értékét az  $x = 3$  határon a 4. intervallumból csak akkor kell meghatározni, ha  $x_4$  valós és  $x_4 < 3$ , mert egyébként  $y_4(x_4) < y_4(3)$ , ha  $x_4 < 3$ .

A vázolt problémák megoldására digitális számítógépet használtunk. Az elkészített program adott  $T_1/\tau$  értékre (vizsgálataink során  $0,05 \div 20$ -ig) kiszámítja a stabilitás határát adó kritikus körerősítést, majd  $K$ -t 0-tól 0,05 lépésenként növelve, a kritikus értékig minden egyes értékre sorra veszi az  $a, b, c, d$  pontokban leírt lehetőségeket. A tartományonkénti legkisebb értékeket összehasonlítva meghatározza a négy tartományra vonatkozó minimumot-



5. ábra

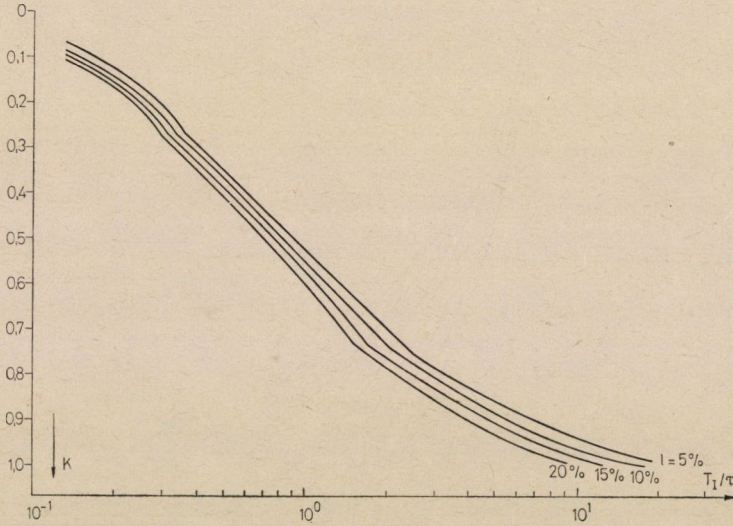
A számítás eredményeit az 5. ábra diagramja foglalja össze. Itt  $T_1/\tau$  függvényében az  $l$  százalékos túllendülést ábrázoltuk  $K$ -val paraméterezve. A szaggatott vonal a stabilitás határát jelöli.

A leggyakrabban ajánlott 5, 10, 15 és 20%-os túllendülés értékekre külön diagramot készítettünk, amely a 6. ábrán látható.



A kapott görbék folytonosak, de a különböző tartományokra eltérő összefüggések és a határokon fellépő ugrások miatt törésekkel rendelkeznek.

Azok a paraméterkombinációk, amelyek a csúcsidő helyét az első négy intervallumon kívülre vinnék, csak igen kis  $K$  és igen nagy  $T_I/\tau$  értékeknél érvényesülnek, így a kapott diagramok széles körben felhasználhatók.



6. ábra

### 1.3. I-szabályozóval kompenzált egytárolós holtidős tag

Már az eddigi vizsgálatok alapján is láthatjuk, hogy a rendszer felépítésének bonyolultságával az összefüggések egyszerűsége is nagymértékben csökken.

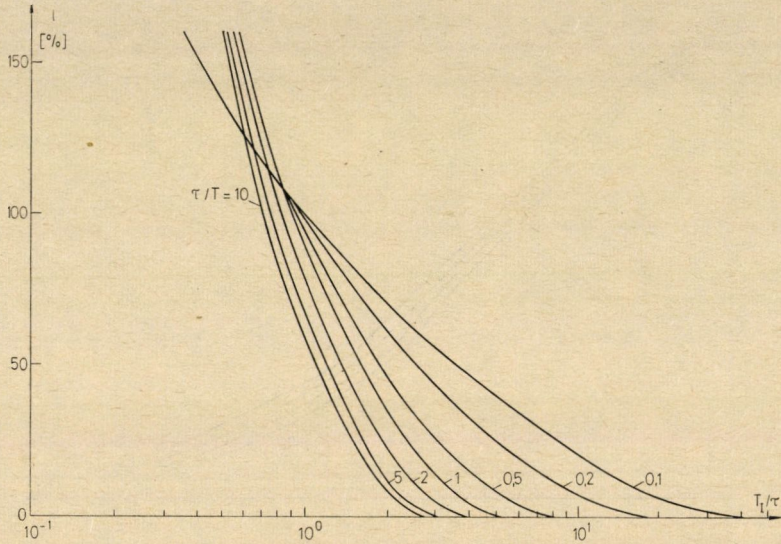
Hasonlóképpen problémát jelent az is, hogy több változó esetén igen nehéz meghatározni a paraméterek terében azt a tartományt, amely biztosítja, hogy a csúcsidő az első  $n$  számú figyelembe vett intervallumba essen. Ezért ez utóbbi esetben már digitális szimulációval határoztuk meg a túllendülésre vonatkozó diagramokat.

Az első ábrának megfelelő átviteli függvények itt:

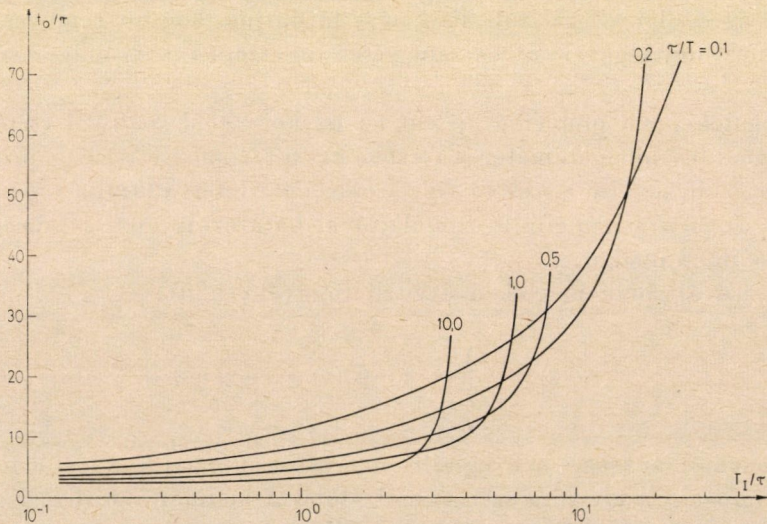
$$G_c(s) = \frac{1}{sT_I} \quad ; \quad G_1(s) = \frac{1}{1+sT} \quad (1.25)$$

A szimulációhoz szükséges két digitális integrátor automatikus lépésközwálasztással a Simpson-kvadratúra szerint működött. A holtidőt „shift-regiszterrel” modelleztük.

A szimuláció egy paraméterkombinációra mindaddig működött, amíg a szabályozott jellemzőben csökkenés nem következett be. A program az így meghatározott  $l$  és  $t_0/\tau$  értékek kiírása után új paraméterkombinációra tért át. (Az aperiodikus esetben bekövetkező végtelen ciklus elkerüléséhez természetesen a számítási időt korlátoztuk).

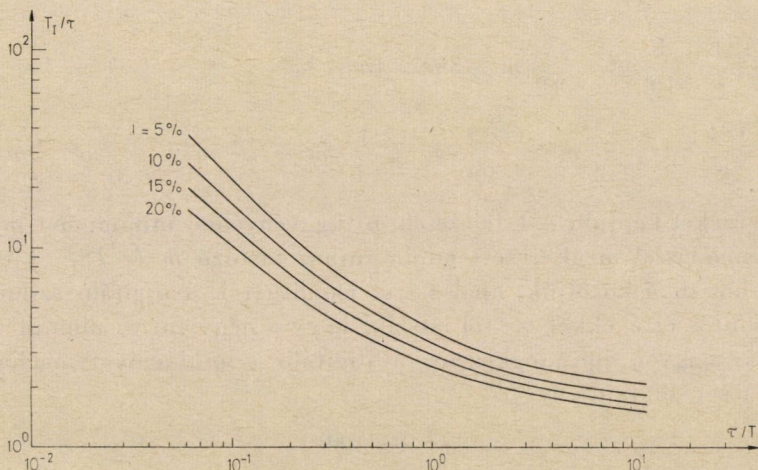


7. ábra



8. ábra

A számítások eredményeit a 7., 8., 9. ábra tartalmazza. A 7. ábrán a százalékos túllendülést ábrázoltuk  $T_1/\tau$  függvényében és  $\tau/T$ -ben paramétezve. A 8. ábrán a csúcsidő relatív értékét ( $t_0, \tau$ ) mutatja ugyanazon változók függvényében. A 9. ábrán a tervezésre leginkább használt túllendülés értékekre készült diagramot láthatjuk.



9. ábra

## 2. Szabályozók beállítása a négyzetes integrálkritérium alapján

Az előző pontban leírt módszer segítségével tehát egyszerű, zárt alakban is elő tudjuk állítani a bemutatott holtidős rendszerek hibaátmeneti függvényét az első néhány intervallumra. Az eredményül kapott (1.9) és (1.20) összefüggések segítségével meghatározhatjuk az első  $n\tau$  intervallumra a hibajel négyzetes integrálját, figyelembe véve azt a tényt, hogy a közelítés a hibajel első  $n$  tagjának figyelembevételével az első  $n\tau$  intervallumra pontos eredményt ad. Közelítsük tehát a négyzetes integrálkritérium értékét a következőképpen:

$$\text{ISE}_n = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \cong \tau \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i y_i^2(x) dx, \quad (2.1)$$

ahol figyelembe vettük  $y_i$  korábbi definícióját, továbbá azt, hogy

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \tau \int_0^{\infty} e^2(x) dx. \quad (2.2)$$

Alkalmazzuk a (2.1) összefüggést először az 1.1. pontbeli rendszerre. Ekkor az integrálásokat elvégezve az

$$\begin{aligned}\frac{ISE_1}{\tau} &= 1, \\ \frac{ISE_2}{\tau} &= \frac{1}{3}m^2 - m + 2, \\ \frac{ISE_3}{\tau} &= \frac{1}{10}m^4 - \frac{7}{12}m^3 + 3m^2 - 4m + 3, \\ \frac{ISE_4}{\tau} &= \frac{1}{252}m^6 - \frac{49}{360}m^5 + \frac{11}{6}m^4 - \frac{27}{4}m^3 + \frac{35}{3}m^2 - 9m + 4,\end{aligned}\tag{2.3}$$

összefüggéseket kapjuk. A kifejezések  $m$  függvényében minimumot mutatnak. A differenciálással megkeresett minimumhoz tartozó  $m$  és  $ISE_n/\tau$  értékeket az I. táblázatban közöljük, ahol összehasonlíthatók a digitális szimulációval kapott pontos értékekkel is. Jól látszik, hogy a négy intervallumra való számítás már nagyon jól megközelíti a digitális szimulációval meghatározott ( $n = \infty$ ) eset adatait.

I. táblázat

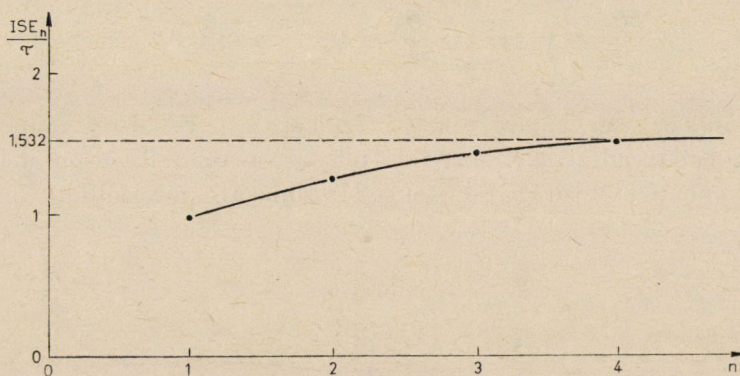
$n$	$m = \frac{\tau}{T_I}$	$\frac{ISE_n}{\tau}$
1	—	1
2	1,5	1,25
3	0,87	1,43
4	0,751	1,50
$\infty$	0,75	1,53

Az eredményekből kitűnik, hogy a tervezés — a túllendülés-számítás és az optimalizálás — céljaira elegendő a hibaátmeneti függvény első négy intervallumba eső szakaszát figyelembe venni a vizsgált rendszerben. A közelítés jóságát a 10. és 11. ábrákból is megítélhetjük, ahol  $ISE_n/\tau$  alakulását ábrázoltuk  $n$  és  $\tau/T_I$  függvényében.

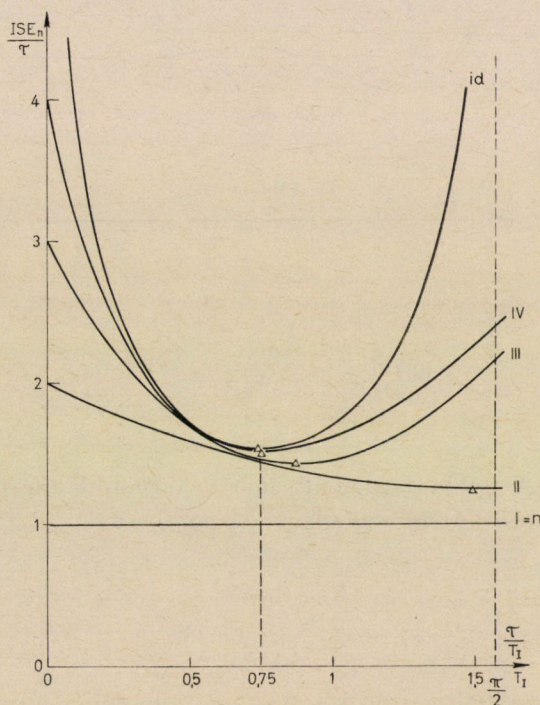
Az eddigiek szerint az ideális holtidős szabályozott szakaszhoz kapcsolt  $I$  szabályozó integrálási idejének optimális értéke a négyzetes integrál szempontjából:

$$T_{Iopt} = \frac{4}{3} \tau.\tag{2.4}$$

Megjegyezzük, hogy a négyzetes integrál minimumát biztosító rendszerek túllendülése elég nagy, mint azt a 12. ábrán be is mutatjuk, körülbelül 25%. Ezt az értéket a 2. ábra diagramjából ellenőrizhetjük.



10. ábra



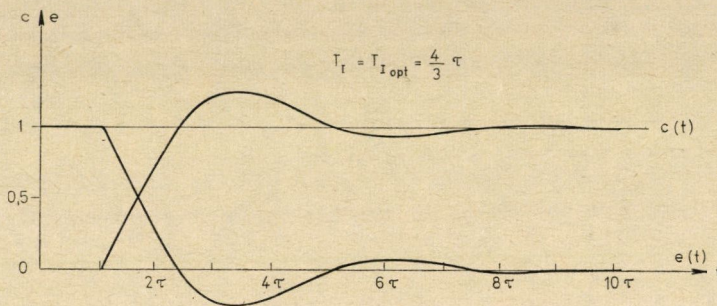
11. ábra

Az előbbi számítások az 1.2. pont alapján *PI* szabályozóval kompenzált tiszta holtidős tag esetén is végrehajthatók. Ekkor  $ISE_n$  két paraméternek, az  $m$ -nek és  $K$ -nak a nemlineáris függvénye. Így  $ISE_n$  minimalizálásához nemlineáris egyenletrendszereket kell megoldani, mégpedig

$$ISE_n = Q_n(m, K) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

esetén a 
$$\frac{\partial Q_n}{\partial m} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial Q_n}{\partial K} = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

egyenletrendszert. Meghatároztuk  $Q_n$  értékét  $n = 1 - 4$ -re, majd a (2.6) szerinti egyenletrendszereket megoldottuk a Newton—Raphson módszerrel. A  $Q_n$  minimumát biztosító értékeket a II. táblázatban közöljük.



12. ábra

II. táblázat

n	$m = \frac{\tau}{T_I}$	K	$\frac{ISE_n}{\tau}$
1	—	—	1
2	0	1	1
3	1,5749	0,50	1,075
4	1,575	0,50	1,088

Látható, hogy gyakorlatilag itt már a harmadik tag figyelembevétele, tehát a harmadrendű közelítés is elegendő pontosságot ad. Az optimális szabályozó adataival

$$K_{opt} = 0,5, \quad (2.7)$$

$$T_{Iopt} = 0.635 \tau,$$

Az 5. ábra diagramjából szintén kb. 25%-os túllendülés olvasható ki.

A tanszéken kidolgozott és [2]-ben ismertetett számítógépes programcsomag lehetővé teszi holtidős rendszerek optimalizálását is, a négyzetes integrálkritérium alapján. Ha a szabályozási kör tagjai koncentrált paraméterűek, és így a hibajel  $\mathcal{L}$ -transzformáltja racionális törtfüggvény, akkor  $ISE$  értékét a rendszer paramétereiből alkotott lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk [1]. Amennyiben a szabályozási kör holtidőt is tartalmaz,  $ISE$  értékét a Parseval-tétel alapján közvetlenül a frekvenciatartományban numerikus integrálással számíthatjuk ki. Az egyik elkészült programunk a Romberg-

kvadratúra felhasználásával így működik, viszont ebben az esetben egy egyszerűbb struktúrájú rendszer optimalizálása is igen hosszú ideig tartott, tehát a program segítségével szabályozók beállítására szolgáló diagram kidolgozására nem gondolhattunk [2]. A számítási idő csökkentése érdekében a holtidőt tartalmazó tagot a PADE-közelítés szerint negyedrendű racionális törtfüggvénnyel helyettesítettük:

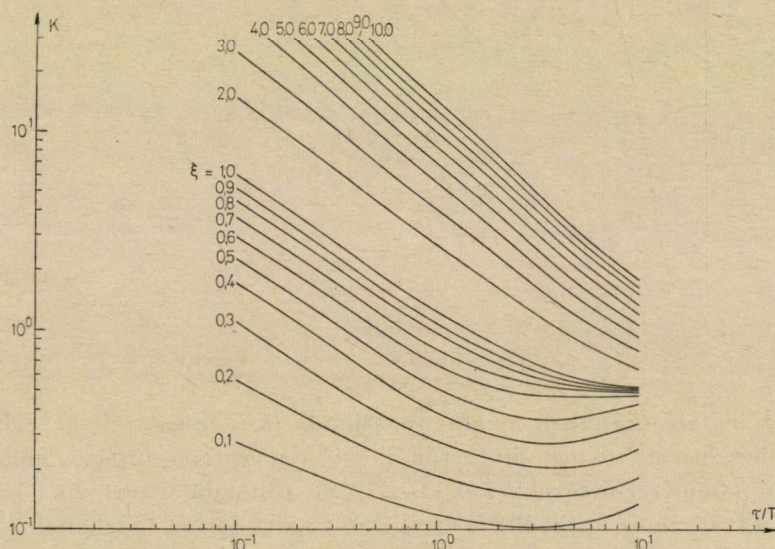
$$e^{-s\tau} = \frac{1 - \frac{1}{2}s\tau + \frac{9}{84}s^2\tau^2 - \frac{1}{84}s^3\tau^3 + \frac{1}{1680}s^4\tau^4}{1 + \frac{1}{2}s\tau + \frac{9}{84}s^2\tau^2 + \frac{1}{84}s^3\tau^3 + \frac{1}{1680}s^4\tau^4} \quad (2.8)$$

formában. Így a programrendszer egy másik tagját használhattuk fel, amelyben a hibajel  $\mathcal{L}$ -transzformáltját racionális törtfüggvény alakjában kell megadni [2]. A program segítségével diagramot dolgoztunk ki kéttárolós holtidős taghoz illesztett  $PI$  szabályozó paramétereinek optimális beállítására. A 13. ábrán az optimális  $K$ , a 14. ábrán az optimális  $T_I/T$  értékekre készült diagramokat közöljük a  $\tau/T$  függvényében és  $\zeta$ -ben paraméterezve. Itt feltételeztük, hogy a szabályozó átviteli függvénye

$$G_c(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_I} \right), \quad (2.9)$$

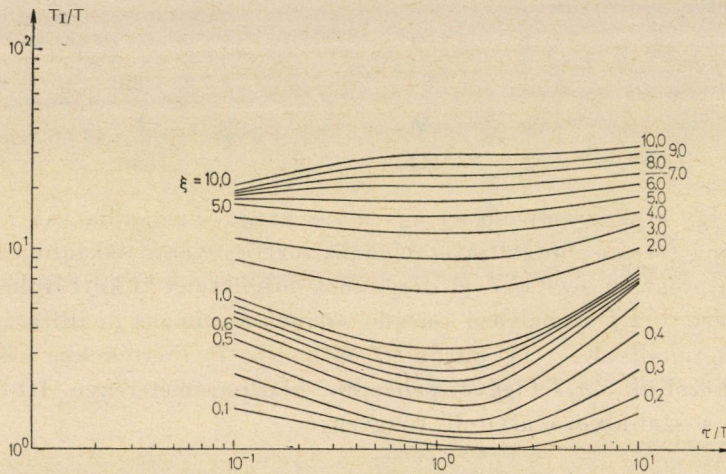
a szabályozott szakaszé pedig

$$G_p(s) = \frac{e^{-s\tau}}{1 + 2\zeta Ts + T^2 s^2} \quad (2.10)$$

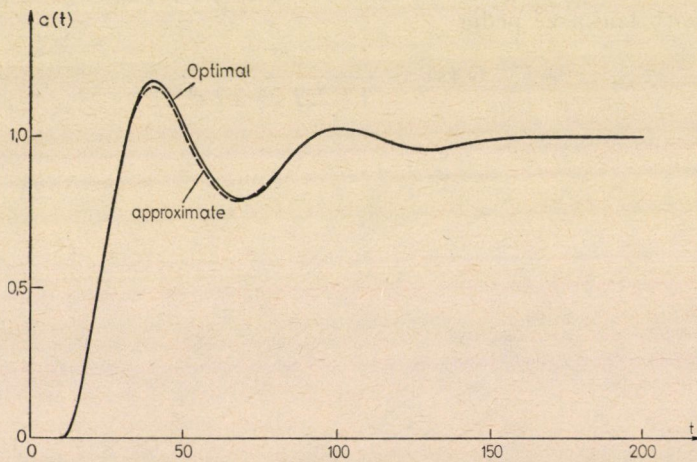


13. ábra

alakú. Megjegyezni kívánjuk, hogy a gyakorlatban csak ritkán fordul elő (2.10)-nél bonyolultabb, tehát többtárolós szabályozott szakasz. Másrészt holtidős tagokat, mint ismeretes, leginkább  $I$  vagy  $PI$  szabályozóval szoktak kompenzálni. Így a tárgyalt eset a gyakorlat szempontjából elég általánosnak tekinthető.



14. ábra



15. ábra

— = optimális, - - - = közelítő

Az időtartománybeli kiegészítő szimulációs vizsgálatok az előző eredményekhez hasonlóan azt mutatták, hogy a négyzetes integrál minimumát biztosító paraméter-értékekhez is kb. 25%-os túllendülés tartozik.

A 13. ábrán az optimális  $K$  értékekre kapott görbék összhangban vannak a (2.7) szerinti eredményekkel, ugyanis  $\tau/T \rightarrow \infty$  esetén  $K_{\text{opt}} \rightarrow 0,5$ -höz.



A számításokhoz alkalmazott (2.8) közelítésről megjegyezzük, hogy azt a lehetséges közelítések közül [9] összehasonlító vizsgálatai és ajánlása alapján választottuk. Az aproximáció jóságát egyébként mind a frekvencia — mind pedig az időtartományban ellenőriztük és azt jónak találtuk. A (2.8) szerinti PADE-közelítésnek a valódi holtidős rendszerhez képest különösen kicsiny a hibája az optimális beállítások szempontjából, mint azt a 15. ábrán szemléltetjük. Itt a  $\tau/T = 1$  és  $\zeta = 1$  értékeknél a diagramokból leolvasott  $K_{\text{opt}} = 1,21$  és  $T_{I\text{opt}} = 32,0$  értékekre kapott közel optimális átmeneti függvényt hasonlíthatjuk össze a valódi optimális jellel. Ez utóbbit egy hibrid üzemű digitális szimulációt alkalmazó optimalizáló számítógépes program segítségével kaptuk.

### 3. Közelítő összefüggések a szabályozási idő számítására

Felhasználva azt a körülményt, hogy aktív kísérleti tervek segítségével valamely folyamat elég pontos matematikai leírását meghatározhatjuk egy munkapont környezetében, közelítő összefüggéseket állíthatunk fel szabályozási körök minőségi jellemzőinek alakulására a paraméterek függvényében.

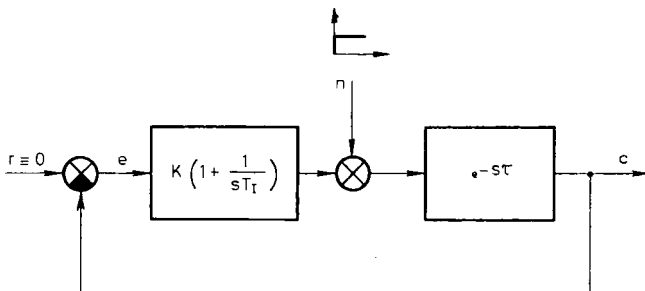
Az alkalmazott módszernél egy megadott munkapont környezetében a tervezett kísérletek elméletéből adódó pontokban megmértük a szabályozási idő értékét, majd regressziós számítás segítségével meghatároztuk annak a rendszerparaméterektől való függését. A számításokban a kapcsolatot teljes kvadratikus alakzatként építettük fel.

Vizsgálatainkban szimulációs programrendszer segítségével holtidős körök szabályozási idejét vizsgáltuk.

Az első esetben, az 1. ábra jelöléseivel maradv

$$G_c(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_I} \right), \quad G_1(s) = 1 \quad \text{és} \quad N(s) = 1. \quad (3.1)$$

volt. A rendszert a 16. ábra szerint képzeltük el. A szabályozási időt az  $n(t) = I(t)$  zavarójel hatására létrejött hibajelnél vizsgáltuk a 17. ábrán látható definícióval.



16. ábra

A  $K = 0,3$  és  $T_c/\tau = 0,4$  munkapont környezetében meghatároztuk a  $t_c/\tau$  relatív szabályozási időre vonatkozó kvadratikus polinomot:

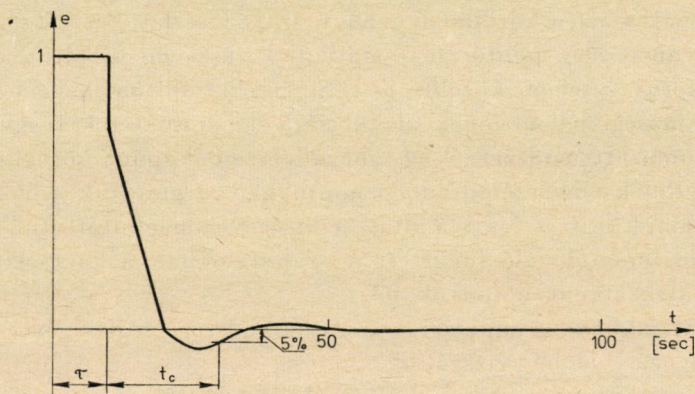
$$t_c/\tau = 178.5 - 297.8K - 368T_I/\tau - 250KT_I/\tau + 666.7K^2 + 562.5T_I^2/\tau^2, \quad (3.2)$$

amelynek minimális értékét a

$$K_{\text{opt}} = 0.297 \quad \text{és} \quad T_{I\text{opt}} = 0.393\tau \quad (3.3)$$

biztosítja. (A minimumot a  $t_c/\tau$ -nak  $K$  és  $T_I/\tau$  szerinti deriválásából kaptuk).

$\tau = 10$  sec-nál a (3.3)-nak megfelelő időfüggvényt  $r(t) = I(t)$  esetén a 17. ábrán látjuk. Az ábra az  $n(t) = I(t)$  esethez képest csupán  $\tau$ -val történő késleltetésben különbözik.



17. ábra

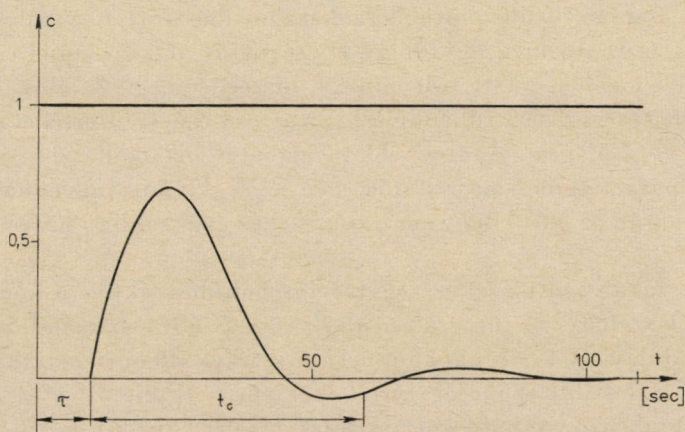
Hasonló vizsgálatokat végeztünk egytárolós holtidős tag esetén is, a független változók  $K = 0,8$ ;  $T_I/\tau = 1,25$  és  $\tau/T = 1$  munkapontja környezetében. A számítások eredményeként adódó másodfokú polinom minimumát

$$K_{\text{opt}} = 0.765 + 0.04 \tau/T$$

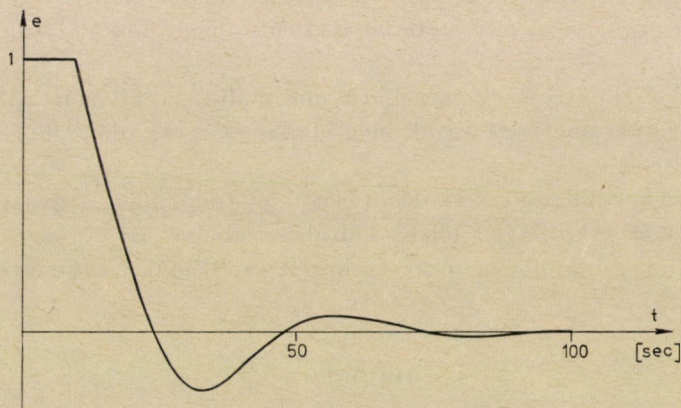
és

$$T_{I\text{opt}} = \tau[1.184 - 0.0648 \tau/T] \quad (3.4)$$

biztosította (a parciális deriváltakat 0-val egyenlővé téve). Itt  $T$  a szakasz tárolójának időállandója  $\tau = 10$  sec és  $T = 10$  sec esetén a (3.4) szerinti beállításkor a szabályozott jellemző átmeneti függvénye a 18. ábrán, a hibajel pedig a 19. ábrán látható. Ezeket a görbéket digitális szimulációval határoztuk meg.



18. ábra



19. ábra

### Következtetések

Úgy érezzük, hogy a bemutatott módszerek sok segítséget jelentenek a holtidős szabályozási rendszerek tervezésében, továbbá betekintést engednek ezen rendszerek tranzien্স folyamatainak alakulásába is. A kidolgozott diagramok hasznos segédeszközként alkalmazhatók a gyakorlati tervezési feladatokban. Jelen vizsgálatok alapján sokkal közvetlenebb összefüggések dolgozhatók ki a minőségi jellemzőknek a rendszer paramétereitől való függésére. Ezek az itt közölt eredmények további vizsgálatok alapjául szolgálhatnak, itt elsősorban a holtidős rendszerek digitális számítógéppel történő időtartománybeli vizsgálatára gondolunk.

A 2. ábra alapján ideális holtidős szakaszhoz illesztett  $I$  szabályozó integrálási ideje választható meg úgy, hogy egységugrás alakú alapjel esetén a szabályozott jellemzőben adott túllendülést biztosítson. A 3. ábra segítségével meghatározhatjuk az első túllendüléshez tartozó csúcsideő értékét is.

Az 5. ábra diagramjából az előbbi szabályozott szakaszhoz illesztett  $PI$  szabályozó paraméterei választhatók meg a megkívánt túllendülés biztosításához. A 6. ábrán az előző diagram tervezéséhez gyakrabban használt formáját is közöljük.

Ha a szabályozott szakasz egytárolós holtidős, akkor a kompenzálásra felhasznált  $I$  szabályozó integrálási idejével a 7. ábra szerint-biztosíthatunk adott túllendülést. A 8. ábrából a csúcsideő értékét ellenőrizhetjük. A 9. ábra a tervezéskor leginkább szükséges értékeket sűríti egybe.

Amennyiben a szabályozott szakasz ideális holtidőt tartalmaz csak, a négyzetes integrálkritérium szerint optimális  $I$  és  $PI$  szabályozó paramétereit a (2.4) és (2.7) összefüggésekkel adjuk meg.

Kéttárolós holtidős szabályozott szakasz esetén az  $ISE$  szempontjából optimális  $PI$  szabályozó paramétereit biztosító diagramokat közlünk a 13. és 14. ábrán.

A (3.3) és (3.4) összefüggésekben minimális szabályozási időt biztosító  $PI$  szabályozó paramétereit adjuk meg ideális és egytárolós szabályozott szakaszok esetére.

Ezek az eredmények elvi jelentőségükön túlmenően a gyakorlati rendszertervezés széles területét fellelelik holtidős szabályozási körökre és reméljük segítségükkel az eddig oly nehézkesen kezelt problémák nagymértékben csökkenni fognak.

#### IRODALOM

1. CSÁKI, F.: Szabályozások dinamikája. Akadémiai Kiadó, Budapest 1970.
2. CSÁKI, F.—KEVICZKY, L.—KOVÁCS, T.: Synthesis of Linear Control Systems by Digital Computers. *Acta Techn. Hung.* (1971) (to be published).
3. OPPELT, W.: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie, Weinheim 1964.
4. HARRIOTT, P.: Process Control. McGraw-Hill Book Co., N. Y.—S. Fr. 1964.
5. KEVICZKY, L.—BÁNYÁSZ, Cs.: Tervezett kísérletek alkalmazása irányítástechnikai feladatok megoldására. *VI. Magyar Automatizálási Konferencia*, Budapest 1970.
6. KEVICZKY, L.—BAK, M.: Diagramok holtidős szabályozási körök túllendülésére. *VI. Magyar Automatizálási Konferencia*, Budapest 1970.
7. БЛОХ, З. Ш.: Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Физматгиз, Москва 1961.
8. Серебрянский, А. Я.: Метод определения величины максимального отклонения в системах автоматического регулирования, включающих объект с запаздыванием. Приборы и системы управления, 1968 11.
9. PONGPARIT, V.—PARK, S. B.: Rational Delay Functions Based on Continued-Fraction Expansion of  $e^*$ . *Electronics Letters*. 6 (1970), 20.

**Design Control Systems with Dead Time in the Time Domain.** In our investigations we adjusted  $I$  and  $PI$  controllers for controlling plants with ideal dead time (transportation delay) and one or two time lags. A method for calculating overshoot values is presented

The results obtained with the aid of a digital computer are plotted in the form of diagrams. Also the optimization based on the quadratic integral criterion for circuits with dead-time is considered and the results are presented again in the form of diagrams. Approximations relating to the control time and the system parameters are established. The obtained results may be usefully applied in the design of linear single-loop control systems with dead time.

**Projektierung von Regelkreisen mit Totzeit im Zeitbereich.** In den Untersuchungen wurden I- und PI-Regler an ideale Regelstrecken mit Totzeit und ein und zwei Speichern angepaßt. Eine Methode für die Berechnung der Überschwingweite wird beschrieben. Die mit einem Digitalrechner erhaltenen Ergebnisse werden in Diagrammform mitgeteilt. Die Verfasser beschäftigen sich auch mit der Optimierung der Regelkreise mit Totzeit auf Grund des quadratischen Integralkriteriums und veröffentlichen die Ergebnisse ebenfalls als Diagramme. Für die Abhängigkeit der Regelzeit von den Systemparametern werden annähernde Zusammenhänge berechnet. Die Ergebnisse können für die Projektierung von linearen, einschleifigen Regelkreisen mit Totzeit nutzbringend verwendet werden.