

# ORTOGONÁLISAN ANIZOTROP SZERKEZETI ANYAGÚ HENGERS HÉJAK HAJLÍTÁSELMÉLETÉNEK TÁRGYALÁSA AZ ELTOLÓDÁSFÜGGVÉNY BEVEZETÉSÉVEL

VARGA LÁSZLÓ\*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1971. április 16-án]

A dolgozat ortogonálisan anizotrop szerkezetű anyagú (pl.: üvegszállal erősített műanyag) hengeres héjak általános hajlításelméletét tárgyalja, a héjfelületre merőleges életterhelések eseteiben. Először a belső erők és az alakváltozások közötti összefüggéseket ismerteti, majd a hajlítás differenciálegyenleteit közli. A homogén differenciálegyenletrendszer az eltolódásfüggvény bevezetésével oldja meg. Részletesen ismerteti az eltolódásfüggvény és a hajlítási feszültségállapot meghatározását, az alkotó és a főkör mentén ható — periodikusan változó — életterhelések eseteiben. A levezetett összefüggések alapján tetszőleges — Fourier sorral leírható — függvény szerint változó életterhelés okozta hajlítási feszültségállapot is meghatározható. Szerző végül egy a karakterisztikus egyenlet gyökeinek alakulását szemléltető szám példát közöl.

## Jelölések

$m$	alkotóirányú hullámszám
$n$	kerületirányú hullámszám
$s$	héjvastagság [cm]
$u$	alkotóirányú eltolódás [cm]
$v$	kerületirányú eltolódás [cm]
$w$	sugárirányú eltolódás [cm]
$x_1$	alkotóirányú koordináta [cm]
$x_2$	kerületirányú koordináta [cm]
$x_3$	sugárirányú koordináta [cm]
$\bar{x}_1 = x_1/R$	alkotóirányra vonatkozó méretnélküli koordináta
$\bar{x}_2 = x_2/R$	kerületirányra vonatkozó méretnélküli koordináta
$B_1$	alkotóirányra vonatkozó hajlítómerevség [kp cm]
$B_2$	kerületirányra vonatkozó hajlítómerevség [kp cm]
$B_3$	csavarómerevség [kp cm]
$D_1$	alkotóirányra vonatkozó nyúlásmerevség [kp/cm]
$D_2$	kerületirányra vonatkozó nyúlásmerevség [kp/cm]
$D_3$	nyírómerevség [kp/cm]
$E_1$	alkotóirányra vonatkozó rugalmassági modulus [kp/cm <sup>2</sup> ]
$E_2$	kerületirányra vonatkozó rugalmassági modulus [kp/cm <sup>2</sup> ]
$E_3$	nyíró rugalmassági modulus [kp/cm <sup>2</sup> ]
$M_1$	alkotóirányú fajlagos nyomaték [cmkp/cm]
$M_2$	kerületirányú fajlagos nyomaték [cmkp/cm]
$M_3$	csavaró fajlagos nyomaték [cmkp/cm]
$N_1$	alkotóirányú metszeterő [kp/cm]
$N_2$	kerületirányú metszeterő [kp/cm]
$N_3$	héj síkjában működő nyíró metszeterő [kp/cm]
$P_1(\bar{x}_1)$	alkotó mentén ható — héjfelületre merőleges — életterhelés [kp/cm]
$P_2(\bar{x}_2)$	kerület mentén ható — héjfelületre merőleges — életterhelés [kp/cm]

\* Dr. Varga László, Budapest II., Gábor Áron u. 42.

$R$	a középfelület görbületi sugara [cm]
$Q_1$	alkotóirányra vonatkozó középfelületre merőleges metszeterő [kp/cm]
$Q_2$	kerületirányra vonatkozó középfelületre merőleges metszeterő [kp/cm]
$\beta_1$	alkotóirányra vonatkozó héjállandó
$\beta_2$	kerületirányra vonatkozó héjállandó
$\varepsilon_1$	alkotóirányú fajlagos nyúlás
$\varepsilon_2$	kerületirányú fajlagos nyúlás
$\varepsilon_3$	fajlagos szögelfordulás
$\eta$	deriválást jelző szám
$\nu_{12}, \nu_{21}$	Poisson tényezők (az első index az alakváltozás irányát, a második az erő irányát jelzi)
$\Phi_m$	kerületirányra vonatkozó csillapodásfüggvény
$\psi_n$	alkotóirányra vonatkozó csillapodásfüggvény
$\sigma_1$	alkotóirányú normálfeszültség [kp/cm <sup>2</sup> ]
$\sigma_2$	kerületirányú normálfeszültség [kp/cm <sup>2</sup> ]
$\sigma_3$	a héj síkjában ható nyírófeszültség [kp/cm <sup>2</sup> ]

További jelölések értelme a szöveg között található.

## 1. Bevezetés

A szokásos szerkezeti anyagú (izotrop) héjak általános hajlításelméletének tárgyalása a szakirodalomban több helyen is: például FLÜGGE [1] és WLASSOW [2] munkájában megtalálható. Ugyancsak fellelhetők az anizotrop héjak vizsgálatával foglalkozó szakdolgozatok is, amelyekről AMBARTSUMIAN [3] nyújt rövid áttekintést. Ezek közül különös figyelmet érdemelnek AMBARTSUMIAN [4] és [5] cikkei, amelyek az anizotrop, illetve az ortotrop héjak hajlításának részletes tárgyalását tartalmazzák.

A hivatkozott dolgozatok többségükben a feszültségállapot meghatározására szolgáló alapösszefüggéseket és általános módszereket ismertetnek. Gyakorlati számítások során mindig a közölt alapösszefüggések képezik a vizsgálatok gerincét, az ismertett módszerek azonban nem zárják ki a további megfontolások lehetőségét, illetve célravezetőbb számítási módszerek kidolgozását.

Az ortotrop héjakra levezetett alapösszefüggések felhasználásával vizsgálhatók az üvegszállal erősített műanyag héjak (nyomástartó edények, tartályok, csövek stb.) is, amelyek jó korrózióállóságuk, viszonylag nagy szilárdságuk és kis fajsúlyuk eredményeként mind gyakrabban kerülnek felhasználásra. Szilárdsági tulajdonságaik következtében ugyanis ortotrop anyagként kezelhetők. Rugalmassági jellemzőik mérhetőek, vagy — az üvegszál és a műanyag rugalmas tulajdonságainak, az összetevők részarányának és az erősítés irányának ismeretében — számíthatók (lásd pl. [6]-ban). Ezek meghatározásával a jelen dolgozatban nem foglalkozunk, hanem az ortotropia főirányaira vonatkozó rugalmassági jellemzőket ismertnek vesszük.

A vizsgálatok tárgyát ortotrop hengeres héjak képezik. Az ortotropia főirányai azonosak a héj alkotó- és kerületirányával.

A vizsgálatok során homogén anizotropiával számolunk és feltételezzük, hogy a húzó- vagy nyomóigénybevételek hatására fellépő fajlagos alakváltozások abszolút értékei egyenlők és Hooke törvényét követik.

A közölt feltételeket kielégítő hengeren helyi jellegű — a héjfelületre merőleges — éltérhelések hatását vizsgáljuk. Feltevésünk szerint a külső terhelés változását leíró függvény Fourier sorba fejthető. Az áttekinthetőség biztosítása és a leírás egyszerűsítése érdekében csak a függvénysor egy ( $m$  vagy  $n$ -edik) tagját vesszük figyelembe, mivel a számítások a többi tagra vonatkozólag ugyanúgy végezhetők.

Az ortotrop hengeres héjban ébredő hajlítási feszültségállapot meghatározására szolgáló számítási módszer kidolgozása az eltolódásfüggvény bevezetésével történik.

## 2. A belső erők és az alakváltozások közötti összefüggések

Az ortotrop anyagban ébredő feszültségek és a fellépő fajlagos alakváltozások közötti összefüggések Hooke törvénye alapján a merevségi főirányokban (síkbeli feszültségállapot feltételezésével) a következő alakban írhatók:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\varepsilon_1 + \nu_{12} \varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\varepsilon_2 + \nu_{21} \varepsilon_1), \\ \sigma_3 &= E_3 \varepsilon_3.\end{aligned}\quad (1a-c)$$

A fajlagos alakváltozások — mint ismeretes — kifejezhetők a középfelület eltolódásaival, az alábbiak szerint [1]:

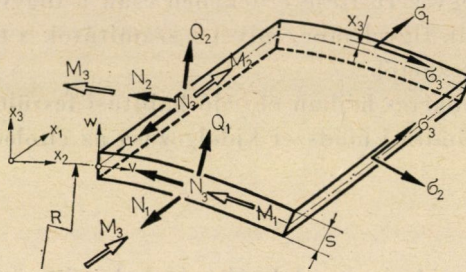
$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{u'}{R} - x_3 \frac{w''}{R^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{v'}{R} - \frac{x_3}{R} \frac{w''}{R + x_3} + \frac{w}{R + x_3}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{u'}{R + x_3} + \frac{R + x_3}{R^2} v' - \frac{w''}{R} \left( \frac{x_3}{R} + \frac{x_3}{R + x_3} \right).\end{aligned}\quad (2a-c)$$

A közölt összefüggésekben a deriválást jelentő jelölések értelme a következő:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\ )}{\partial x_1/R} &= \frac{\partial(\ )}{\partial \bar{x}_1} = (\ )', \\ \frac{\partial(\ )}{\partial x_2/R} &= \frac{\partial(\ )}{\partial \bar{x}_2} = (\ )''.\end{aligned}$$

A középfelületre helyezett koordinátarendszert és a belső erőket az 1. ábra szemlélteti.

Az (1a—c) és (2a—c) összefüggések birtokában már előállíthatók a metszeterők, fajlagos nyomatékok és az eltolódások közötti kapcsolatot leíró függvények is, amelyek — a vékony héjak eseteiben megengedhető elhanyagolá-



1. ábra

sokkal élve — a következő alakban írhatók (1. ábra):

$$N_1 = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_1 \left(1 + \frac{x_3}{R}\right) dx_3 \approx \frac{D_1}{R} [u' + \nu_{12}(v' + w)],$$

$$N_2 = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_2 dx_3 \approx \frac{D_2}{R} (\nu_{21} u' + v' + w), \quad (3a-d)$$

$$N_3 = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3 \left(1 + \frac{x_3}{R}\right) dx_3 \approx \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3 dx_3 \approx \frac{D_3}{R} (u' + v'),$$

$$M_1 = - \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_1 \left(1 + \frac{x_3}{R}\right) x_3 dx_3 \approx \frac{B_1}{R^2} (w'' + \nu_{12} w').$$

$$M_2 = - \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_2 x_3 dx_3 \approx \frac{B_2}{R^2} (w'' + \nu_{21} w'), \quad (3e-f)$$

$$M_3 = - \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3 \left(1 + \frac{x_3}{R}\right) x_3 dx_3 \approx - \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3 x_3 dx_3 \approx 2 \frac{B_3}{R^2} w'',$$

ahol

$$D_1 = \frac{E_1 s}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad B_1 = \frac{E_1 s^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})},$$

$$D_2 = \frac{E_2 s}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad B_2 = \frac{E_2 s^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad (4a-f)$$

$$D_3 = E_3 s, \quad B_3 = \frac{E_3 s^3}{12}.$$

A (3a—f) alatti összefüggések levezetése során az élerők pontos kifejezésében szereplő  $B_i$ -vel szorzott tagokat figyelmen kívül hagytuk [1]. Az elhanyagolásból származó hiba alakulása a

$$k = \frac{B_i}{R^2 D_i} = \frac{s^2}{12R^2}$$

tényező függvénye, amely vékony héjak eseteiben ( $R/s \geq 100$ ) rendkívül kis érték, így az egység mellett jogosan elhagyható. További elhanyagolást jelent, hogy a fajlagos nyomatékok kifejezésében az eltolódások magasabb rendű deriváltjai mellett az alacsonyabb rendűeket elhagytuk [1].

A vizsgálat tárgyát képező vékony héjak eseteiben — a közölt elhanyagolások után — a gyakorlat számára elfogadható pontosságú, könnyen kezelhető összefüggések birtokába jutunk.

### 3. A hajlítás differenciálegyenletei

A hengeres héj feszültségállapotát leíró differenciálegyenletek felírása a (3a—f) összefüggések felhasználásával és az egyensúlyi egyenletek birtokában lehetséges. A héjelem egyensúlyi egyenletei — mint ismeretes — jó közelítéssel az alábbi alakban írhatók [1]:

$$\begin{aligned} N_1 + N_3 &= 0, \\ N_2 + N_3 &\approx 0, \\ Q_1 + Q_2 + N_2 &= 0, \\ M_2 + M_3 - RQ_2 &= 0, \\ M_1 + M_3 - RQ_1 &= 0. \end{aligned} \tag{5a—e}$$

A felírt egyensúlyi egyenletekkel kapcsolatban megkívánjuk jegyezni, hogy az erők egyensúlyát leíró (5b) kifejezésben a viszonylag kicsiny  $Q_2$  metszeterő még kisebb kerületirányú komponensét elhagytuk, továbbá hiányzik az  $x_3$  tengely körüli nyomatéki egyensúlyt kifejező összefüggés, amelytől — mint érdektelentől — továbbiakban eltekintettünk [1].

A feszültségi állapotot meghatározó differenciálegyenletek felírásához az (5c) egyensúlyi egyenletet — az (5d—e) összefüggések felhasználásával — célszerű a következő alakra hozni:

$$RN_2 + M_1' + M_2' + 2M_3' = 0. \tag{5c}$$

A metszeterők és fajlagos nyomatékok (3a—f) alatti kifejezéseit az (5a—c) egyensúlyi egyenletekbe helyettesítve rendezés után a keresett differenciál-egyenletekhez jutunk:

$$u'' + \frac{E_3}{E_1^*} u'' + \left( \frac{E_3}{E_1^*} + \nu_{12} \right) v'' + \nu_{12} w' = 0,$$

$$\left( \frac{E_3}{E_2^*} + \nu_{21} \right) u'' + v'' + \frac{E_3}{E_2^*} v'' + w' = 0, \quad (6a-c)$$

$$\nu_{21} u' + v + w + k \left[ \frac{E_1}{E_2} w'''' + 2 \left( 2 \frac{E_3}{E_2^*} + \nu_{21} \right) w'''' + \ddot{w} \right] = 0,$$

ahol

$$k = \frac{1}{12} \frac{s^2}{R^2}; \quad E_i^* = \frac{E_i}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}.$$

A feszültségállapot meghatározásához a (6a—c) homogén differenciál-egyenletrendszer megoldása útján juthatunk.

#### 4. A differenciálegyenletek megoldása az eltolódásfüggvény bevezetésével

A helyi jellegű éltérhelések okozta hajlítófeszültségi állapotot leíró (6a—c) homogén differenciálegyenletrendszer viszonylag egyszerű megoldásához az

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (7)$$

eltolódásfüggvény bevezetésével juthatunk. Ehhez először is fejezzük ki a középfelület eltolódásait az eltolódásfüggvény segítségével. Előzőleg megjegyezzük, hogy ez a függvénykapcsolat — izotrop szerkezeti anyagok esetében — WLASSOW [2] művében megtalálható. Ezt a következőkben *ortotrop* anyagokra fogjuk általánosítani az alábbiak szerint:

$$u = \mathcal{F}'''' - \nu_{21} \mathcal{F}''',$$

$$v = -\mathcal{F}'''' - \left( \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) \mathcal{F}''', \quad (8a-c)$$

$$w = \frac{E_1}{E_2} \mathcal{F}'''' + \left( \frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{21} \right) \mathcal{F}'''' + \mathcal{F}''''.$$

Az eltolódások (8a—c) alatti kifejezéseit a (6a—c) egyenletrendszerbe helyettesítve, az első két egyenletnél azonosságra jutunk, a harmadikból pedig a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\mathcal{F}^{\text{VIII}} + 4n_1 \mathcal{F}^{\text{VI}} + 6n_2 \mathcal{F}^{\text{IV}} + 4n_3 \mathcal{F}^{\text{II}} + n_4 \mathcal{F}^{\text{IV}} + 4\beta_2^4 \mathcal{F}^{\text{IV}} = 0. \quad (9)$$

(Az eltolódásfüggvény fölé rajzolt római számok az  $\bar{x}_1$  szerinti deriválások számát jelentik.)

Az együtthatók az

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{E_3}{E_2^*} + \frac{1}{4} \frac{E_1}{E_3} \right), \\
 n_2 &= \frac{E_2}{E_1} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{E_2}{E_3} \nu_{21} - \frac{4}{3} \frac{E_3}{E_2^*} \nu_{12} - \frac{4}{3} \nu_{12} \nu_{21} \right), \\
 n_3 &= \frac{E_2}{E_1} n_1, \\
 n_4 &= \left( \frac{E_2}{E_1} \right)^2, \\
 \beta_2 &= \sqrt[4]{3(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{R}{s} \right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{10a-e}$$

összefüggésekből számíthatók.

Természetesen a metszeterők és a fajlagos nyomatékok is kifejezhetők az eltolódásfüggvénnyel. Az eltolódások (8a—c) alatti kifejezéseit a (3a—f) összefüggésekbe helyettesítve, és az (5d—e) egyensúlyi egyenleteket figyelembe véve, a következő képletekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{D_1}{R} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \mathfrak{F}^{II\cdot\cdot}, \\
 N_2 &= \frac{D_1}{R} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \mathfrak{F}^{IV}, \\
 N_3 &= - \frac{D_1}{R} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \mathfrak{F}^{III\cdot}, \\
 M_1 &= \frac{B_1}{R^2} \left[ \frac{E_1}{E_2} \mathfrak{F}^{VI} + \left( \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) \mathfrak{F}^{IV\cdot\cdot} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 + \nu_{12} \frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{12} \nu_{21} \right) \mathfrak{F}^{II::} + \nu_{12} \mathfrak{F}^{::} \right], \\
 M_2 &= \frac{B_1}{R^2} \left[ \nu_{21} \mathfrak{F}^{VI} + \left( 1 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 2\nu_{12} \nu_{21} \right) \mathfrak{F}^{IV\cdot\cdot} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) \mathfrak{F}^{II::} + \frac{E_2}{E_1} \mathfrak{F}^{::} \right],
 \end{aligned}
 \tag{11a-c}$$

$$M_3 = 2 \frac{B_1}{R^2} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left[ \frac{E_3}{E_2} \mathfrak{F}^{V\cdot} + \left( 1 - 2\nu_{21} \frac{E_3}{E_1} \right) \mathfrak{F}^{III\cdot\cdot} + \frac{E_3}{E_1} \mathfrak{F}^{I\cdot\cdot\cdot} \right],$$

$$Q_1 = \frac{B_1}{R^3} \left[ \frac{E_1}{E_2} \mathfrak{F}^{VII} + \left( 2 \frac{E_3}{E_2^*} + \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) \mathfrak{F}^{V\cdot\cdot} + \right. \\ \left. + \left( 3 + \nu_{12} \frac{E_1}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - 4\nu_{12} \nu_{21} \right) \mathfrak{F}^{III\cdot\cdot} + \left( 2 \frac{E_3}{E_1^*} + \nu_{12} \right) \mathfrak{F}^{I\cdot\cdot\cdot} \right],$$

(11d-h)

$$Q_2 = \frac{B_1}{R^3} \left[ \left( 2 \frac{E_3}{E_2^*} + \nu_{21} \right) \mathfrak{F}^{VI\cdot} + \left( 3 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - 4\nu_{12} \nu_{21} \right) \mathfrak{F}^{IV\cdot\cdot} + \right. \\ \left. + \left( 2 \frac{E_3}{E_1^*} + \frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) \mathfrak{F}^{II\cdot\cdot\cdot} + \frac{E_2}{E_1} \mathfrak{F}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \right].$$

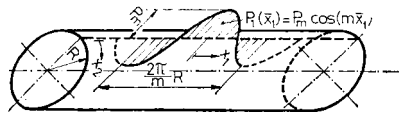
Az eltolódások, valamint a metszeterők és fajlagos nyomatékok kifejezésében szereplő eltolódásfüggvény tényleges alakját — a külső terhelés ismeretében — a (9) differenciálegyenlet megoldása útján határozhatjuk meg. A megoldás módját, illetve az eltolódásfüggvény tényleges alakjának és a feszültségi állapotnak a meghatározását két terhelési alapesetre a következő fejezetekben ismertetjük.

### 5. Az alkotó mentén ( $\bar{x}_2 = \text{állandó}$ ) ható élterhelés okozta hajlítási feszültségállapot meghatározása

Vizsgálatainkhoz — az áttekinthetőség érdekében — tételezzük fel, hogy a héjfelületre merőleges külső élterhet

$$P_1(\bar{x}_1) = P_m \cos(m\bar{x}_1) \quad (12)$$

összefüggés írja le (2. ábra).



2. ábra

Az eltolódásfüggvény a terheléshez hasonló alakú:

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}_1 = \Phi_m \cos(m\bar{x}_1). \quad (13)$$

A (13) összefüggésben szereplő:

$$\Phi_m = \Phi_m(\bar{x}_2) \quad (14)$$

„csillapodásfüggvény” tényleges alakjához a (9) differenciálegyenlet megoldása



útján juthatunk el, amely a (13) összefüggés behelyettesítése és a műveletek elvégzése után a következő alakot ölti:

$$[\Phi_m^{(3)} - 4m_1 m^2 \Phi_m^{(2)} + 6m_2 m^4 \Phi_m^{(1)} - 4m_3 m^6 \Phi_m^{(0)} + m_4 m^8 \Phi_m + 4\beta_1^4 m^4 \Phi_m] \cos(m\bar{x}_1) = 0. \quad (15)$$

Itt

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{E_3}{E_2^*} + \frac{1}{4} \frac{E_1}{E_3}, \\ m_2 &= \frac{E_1}{E_2} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{E_2}{E_3} \nu_{21} - \frac{4}{2} \frac{E_3}{E_2^*} \nu_{12} - \frac{4}{3} \nu_{12} \nu_{21} \right), \\ m_3 &= \frac{E_1}{E_2} m_1, \\ m_4 &= \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^2, \end{aligned} \quad (16a-e)$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{3(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \frac{E_1}{E_2} \left( \frac{R}{s} \right)^2}.$$

Megoldásul a

$$\Phi_m = C_m e^{\lambda_m \bar{x}_1}. \quad (17)$$

függvényt vesszük fel; a benne előforduló együtthatók a

$$\lambda_m^8 - 4m_1 m^2 \lambda_m^6 + 6m_2 m^4 \lambda_m^4 - 4m_3 m^6 \lambda_m^2 + m_4 m^8 = -4\beta_1^4 m^4 \quad (18)$$

karakterisztikus egyenlethől számíthatók. A megoldást jelentő konjugált komplex gyökök kifejezései a következők:

$$\begin{aligned} \lambda_{m1} &= -\alpha_{m1} + \beta_{m1} i, & \lambda_{m5} &= \alpha_{m1} + \beta_{m1} i, \\ \lambda_{m2} &= -\alpha_{m1} - \beta_{m1} i, & \lambda_{m6} &= \alpha_{m1} - \beta_{m1} i, \\ \lambda_{m3} &= -\alpha_{m2} + \beta_{m2} i, & \lambda_{m7} &= \alpha_{m2} + \beta_{m2} i, \\ \lambda_{m4} &= -\alpha_{m2} - \beta_{m2} i, & \lambda_{m8} &= \alpha_{m2} - \beta_{m2} i. \end{aligned} \quad (19a-h)$$

Viszonylag hosszú hengeres héjak eseteiben — mint ismeretes [1] — elegendő csak a (19a—d) alatti gyökök figyelembevétele.

Így a csillapodásfüggvény a

$$\Phi_m = C_{m1} \bar{\Phi}_{m1} + C_{m2} \bar{\Phi}_{m2} + C_{m3} \bar{\Phi}_{m3} + C_{m4} \bar{\Phi}_{m4} = \sum_{j=1}^4 C_{mj} \bar{\Phi}_{mj} \quad (20)$$

alakban írható, amelyben szereplő  $\bar{\Phi}_{mj}$  függvények a

$$\bar{\Phi}_{m1} = e^{-\alpha_{m1} \bar{x}_1} \cos(\beta_{m1} \bar{x}_2), \quad (21a)$$

$$\bar{\Phi}_{m2} = e^{-\alpha_{m1} \bar{x}_1} \sin(\beta_{m1} \bar{x}_2),$$

$$\bar{\Phi}_{m3} = e^{-\alpha_{m2} \bar{x}_1} \cos(\beta_{m2} \bar{x}_2), \quad (21b-d)$$

$$\bar{\Phi}_{m4} = e^{-\alpha_{m2} \bar{x}_1} \sin(\beta_{m2} \bar{x}_2)$$

összefüggésekből számíthatók.

Az eltolódásfüggvény tényleges alakja a vizsgált éltérhelés esetén tehát:

$$\bar{\mathfrak{F}}_1 = \sum_{j=1}^4 C_{mj} \bar{\Phi}_{mj} \cos(m\bar{x}_1). \quad (22)$$

A  $C_{mj}$  integrálási állandókat a peremfeltételek figyelembevételével lehet meghatározni. Ehhez először az eltolódásokat fejezzük ki, valamint a metszeterőket és fajlagos nyomatékokat a (22) alatti eltolódásfüggvény segítségével.

A (8a—c) összefüggések értelmében:

$$u_m = \sum_{j=1}^4 -C_{mj} (m \bar{\Phi}_{mj} + \nu_{21} m^3 \bar{\Phi}_{mj}) \sin(m\bar{x}_1),$$

$$v_m = \sum_{j=1}^4 C_{mj} \left[ \left( \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) m^2 \bar{\Phi}_{mj} - \bar{\Phi}_{mj} \right] \cos(m\bar{x}_1), \quad (24a-c)$$

$$w_m = \sum_{j=1}^4 C_{mj} \left[ \frac{E_1}{E_2} m^4 \bar{\Phi}_{mj} - \left( \frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{21} \right) m^2 \bar{\Phi}_{mj} + \bar{\Phi}_{mj} \right] \cos(m\bar{x}_1).$$

Továbbá a (11a—h) kifejezések szerint:

$$N_{1m} = \frac{D_1}{R} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \sum_{j=1}^4 -C_{mj} m^2 \bar{\Phi}_{mj} \cos(m\bar{x}_1),$$

$$N_{2m} = \frac{D_1}{R} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \sum_{j=1}^4 C_{mj} m^4 \bar{\Phi}_{mj} \cos(m\bar{x}_1),$$

(24a—h)

$$N_{3m} = \frac{D_1}{R} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \sum_{j=1}^4 C_{mj} m^3 \bar{\Phi}_{mj} \sin(m\bar{x}_1),$$

$$M_{1m} = \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=1}^4 C_{mj} \left[ \nu_{12} \bar{\Phi}_{mj} - \left( 1 + \nu_{12} \frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{12} \nu_{21} \right) m^2 \bar{\Phi}_{mj} + \right. \\ \left. + \left( \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) m^4 \bar{\Phi}_{mj} - \frac{E_1}{E_2} m^6 \bar{\Phi}_{mj} \right] \cos(m\bar{x}_1),$$

$$\begin{aligned}
 M_{2m} &= \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=1}^4 C_{mj} \left[ \frac{E_2}{E_1} \bar{\Phi}_{mj}^{:::} - \left( \frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) m^2 \bar{\Phi}_{mj}^{::} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 2\nu_{12} \nu_{21} \right) m^4 \bar{\Phi}_{mj}^{..} - \nu_{21} m^6 \bar{\Phi}_{mj} \right] \cos (m\bar{x}_1), \\
 M_{3m} &= 2 \frac{B_1}{R^2} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \sum_{j=1}^4 C_{mj} \left[ -\frac{E_3}{E_1} m \bar{\Phi}_{mj}^{:::} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 - 2\nu_{21} \frac{E_3}{E_1} \right) m^3 \bar{\Phi}_{mj}^{..} - \frac{E_3}{E_2} m^5 \bar{\Phi}_{mj} \right] \sin (m\bar{x}_1), \\
 Q_{1m} &= \frac{B_1}{R^3} \sum_{j=1}^4 C_{mj} \left[ -\left( 2 \frac{E_3}{E_1^*} + \nu_{12} \right) m \bar{\Phi}_{mj}^{:::} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 3 + \nu_{12} \frac{E_1}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - 4\nu_{12} \nu_{21} \right) m^3 \bar{\Phi}_{mj}^{..} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( 2 \frac{E_3}{E_2^*} + \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) m^5 \bar{\Phi}_{mj}^{..} + \frac{E_1}{E_2} m^7 \bar{\Phi}_{mj} \right] \sin (m\bar{x}_1), \\
 Q_{2m} &= \frac{B_1}{R^3} \sum_{j=1}^4 C_{mj} \left[ \frac{E_2}{E_1} \bar{\Phi}_{mj}^{:::} - \left( 2 \frac{E_3}{E_1^*} + \frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) m^2 \bar{\Phi}_{mj}^{::} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 3 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - 4\nu_{12} \nu_{21} \right) m^4 \bar{\Phi}_{mj}^{..} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( 2 \frac{E_3}{E_2^*} + \nu_{21} \right) m^6 \bar{\Phi}_{mj} \right] \cos (m\bar{x}_1).
 \end{aligned}$$

Az eltolódások, valamint a metszeterők és fajlagos nyomatékok kifejezésében szereplő csillapodásfüggvény deriváltjai a következő képletekből számíthatók:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_{m1}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{m1} \bar{x}_2} [A_{1\eta} \cos (\beta_{m1} \bar{x}_2) + A_{2\eta} \sin (\beta_{m1} \bar{x}_2)], \\
 \bar{\Phi}_{m2}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{m1} \bar{x}_2} [A_{1\eta} \sin (\beta_{m1} \bar{x}_2) - A_{2\eta} \cos (\beta_{m1} \bar{x}_2)], \\
 \bar{\Phi}_{m3}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{m2} \bar{x}_2} [A_{3\eta} \cos (\beta_{m2} \bar{x}_2) + A_{4\eta} \sin (\beta_{m2} \bar{x}_2)], \\
 \bar{\Phi}_{m4}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{m2} \bar{x}_2} [A_{3\eta} \sin (\beta_{m2} \bar{x}_2) - A_{4\eta} \cos (\beta_{m2} \bar{x}_2)].
 \end{aligned} \tag{25a-d}$$

Az  $A_{j\eta}$  együtthatók pedig az alábbi összefüggéseket jelentik:

$$\begin{aligned}
 A_{1\eta} &= -\alpha_{m1} A_{1(\eta-1)} + \beta_{m1} A_{2(\eta-1)}, \\
 A_{2\eta} &= -\alpha_{m1} A_{2(\eta-1)} - \beta_{m1} A_{1(\eta-1)}, \\
 A_{3\eta} &= -\alpha_{m2} A_{3(\eta-1)} + \beta_{m2} A_{4(\eta-2)}, \\
 A_{4\eta} &= -\alpha_{m2} A_{4(\eta-1)} - \beta_{m2} A_{3(\eta-1)},
 \end{aligned} \tag{26a-d}$$

ahol

$$\begin{aligned} A_{10} &= A_{30} = 1, \\ A_{20} &= A_{40} = 0. \end{aligned} \quad (27a-b)$$

A  $C_{mj}$  integrálási állandókat — az alkotó mentén ( $\bar{x}_2 = 0$ ) ható életterhelések esetén — a következő illesztési feltételek szabják meg:

$$\begin{aligned} v_m(\bar{x}_1, 0) &= 0, \\ w_m(\bar{x}_1, 0) &= 0, \\ N_{3m}(\bar{x}_1, 0) &= 0, \\ Q_{2m}(\bar{x}_1, 0) &= 1/2 P_1(\bar{x}_1). \end{aligned} \quad (28a-d)$$

Az illesztési feltételeket az eltolódásfüggvény segítségével kifejezve az alábbiak adódnak:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{mj} A_{j1} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{mj} A_{j3} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{mj} A_{j5} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{mj} A_{j7} &= 2\beta_1^4 \frac{R}{s} \frac{P_m}{E_1}. \end{aligned} \quad (29a-d)$$

Az integrálási állandók meghatározása után már felírható — a vizsgált külső terhelésre vonatkozó — eltolódásfüggvény tényleges alakja. Ennek ismeretében a hajlítás feszültségállapotát képviselő alakváltozások, metszeterők és fajlagos nyomatékok (tehát a feszültségek is) további nehézség nélkül számíthatók.

## 6. A főkör mentén ( $\bar{x}_1 = \text{állandó}$ ) ható életterhelés okozta hajlítási feszültségállapot meghatározása

Az alkotóirányú élteher esetéhez hasonlóan feltételezzük, hogy a héjfelületre merőleges külső életterhelés a

$$P_2(\bar{x}_2) = P_n \cos(n\bar{x}_2) \quad (30)$$

összefüggés szerint változik (3. ábra).

Az eltolódásfüggvény a terhelés jellegének megfelelően

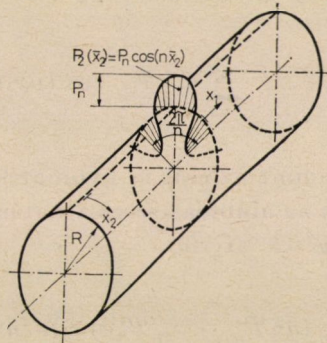
$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_2 = \Psi_n \cos(n\bar{x}_2) \quad (31)$$

alakba írható. A (31) összefüggésben előforduló:

$$\Psi_n = \Psi_n(\bar{x}_1) \quad (32)$$

„csillapodásfüggvény” tényleges alakja szintén a (9) differenciálegyenlet megoldása útján adódik, amely a (31) összefüggés behelyettesítése és a műveletek elvégzése után a következő alakra hozható:

$$[\Psi_n^{VIII} - 4n_1 n^2 \Psi_n^{VI} + 6n_2 n^4 \Psi_n^{IV} - 4n_3 n^6 \Psi_n^{II} + n_4 n^8 \Psi_n + 4\beta_2^4 \Psi_n^{IV}] \cos(n\bar{x}_2) = 0. \quad (33)$$



3. ábra

A differenciálegyenlet megoldásai jelen esetben is

$$\Psi_n = C_n e^{\lambda_n \bar{x}_1} \quad (34)$$

alakban írhatók fel és a  $\lambda_n$  együtthatók a

$$\lambda_n^8 - 4n_1 n^2 \lambda_n^6 + 6n_2 n^4 \lambda_n^4 - 4n_3 n^6 \lambda_n^2 + n_4 n^8 = -4\beta_2^4 \lambda_n^4 \quad (35)$$

karakterisztikus egyenletből számíthatók. A megoldást jelentő konjugált komplex gyökök kifejezése a következők:

$$\begin{aligned} \lambda_{n1} &= -\alpha_{n1} + \beta_{n1} i, & \lambda_{n5} &= \alpha_{n1} + \beta_{n1} i, \\ \lambda_{n2} &= -\alpha_{n1} - \beta_{n1} i, & \lambda_{n6} &= \alpha_{n1} - \beta_{n1} i, \\ \lambda_{n3} &= -\alpha_{n2} + \beta_{n2} i, & \lambda_{n7} &= \alpha_{n2} + \beta_{n2} i, \\ \lambda_{n4} &= -\alpha_{n2} - \beta_{n2} i, & \lambda_{n8} &= \alpha_{n2} - \beta_{n2} i. \end{aligned} \quad (36a-h)$$

A (36a—d) alatti négy gyök figyelembevétel után (viszonylag hosszú hengeres héjakat vizsgálva) a csillapodásfüggvény

$$\Psi_n = C_{n1} \bar{\Psi}_{n1} + C_{n2} \bar{\Psi}_{n2} + C_{n3} \bar{\Psi}_{n3} + C_{n4} \bar{\Psi}_{n4} = \sum_{j=1}^4 C_{nj} \bar{\Psi}_{nj} \quad (37)$$

alakban írható, amelyben szereplő  $\bar{\Psi}_{nj}$  függvények a

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{n1} &= e^{-\alpha_{n1} \bar{x}_1} \cos(\beta_{n1} \bar{x}_1), \\ \bar{\Psi}_{n2} &= e^{-\alpha_{n1} \bar{x}_1} \sin(\beta_{n1} \bar{x}_1), \\ \bar{\Psi}_{n3} &= e^{-\alpha_{n2} \bar{x}_1} \cos(\beta_{n2} \bar{x}_1), \\ \bar{\Psi}_{n4} &= e^{-\alpha_{n2} \bar{x}_1} \sin(\beta_{n2} \bar{x}_1)\end{aligned}\quad (38a-d)$$

összefüggésekből számíthatók.

Az előzőek értelmében az eltolódásfüggvény tényleges alakja a vizsgált éltérhelés esetén

$$\mathcal{F}_2 = \sum_{j=1}^4 C_{nj} \bar{\Psi}_{nj} \cos(n\bar{x}_2). \quad (39)$$

Az eltolódások, valamint az erők és nyomatékok kifejezései a (39) összefüggés helyettesítése után az alábbiak szerint határozhatók meg.

A (8a—c) összefüggések szerint

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{j=1}^4 -C_{nj}(n^2 \bar{\Psi}_{nj}^I + v_{21} \bar{\Psi}_{nj}^{III}) \cos(n\bar{x}_2), \\ v_n &= \sum_{j=1}^4 C_{nj} \left[ \left( \frac{E_1}{E_3} - v_{21} \right) n \bar{\Psi}_{nj}^{II} - n^3 \bar{\Psi}_{nj} \right] \sin(n\bar{x}_2), \\ w_n &= \sum_{j=1}^4 C_{nj} \left[ \frac{E_1}{E_2} \bar{\Psi}_{nj}^{IV} - \left( \frac{E_1}{E_3} - 2v_{21} \right) n^2 \bar{\Psi}_{nj}^{II} + n^4 \bar{\Psi}_{nj} \right] \cos(n\bar{x}_2).\end{aligned}\quad (40a-c)$$

Továbbá a (11a—h) képletek értelmében

$$\begin{aligned}N_{1n} &= \frac{D_1}{R} (1 - v_{12} v_{21}) \sum_{j=1}^4 -C_{nj} n^2 \bar{\Psi}_{nj}^{II} \cos(n\bar{x}_2), \\ N_{2n} &= \frac{D_1}{R} (1 - v_{12} v_{21}) \sum_{j=1}^4 C_{nj} \bar{\Psi}_{nj}^{IV} \cos(n\bar{x}_2), \\ N_{3n} &= \frac{D_1}{R} (1 - v_{12} v_{21}) \sum_{j=1}^4 C_{nj} n \bar{\Psi}_{nj}^{III} \sin(n\bar{x}_2), \\ M_{1n} &= \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=1}^4 C_{nj} \left[ \frac{E_1}{E_2} \bar{\Psi}_{nj}^{VI} - \left( \frac{E_1}{E_3} - v_{21} \right) n^2 \bar{\Psi}_{nj}^{IV} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + v_{12} \frac{E_1}{E_3} - 2v_{12} v_{21} \right) n^4 \bar{\Psi}_{nj}^{II} - v_{12} n^6 \bar{\Psi}_{nj} \right] \cos(n\bar{x}_2),\end{aligned}\quad (41a-h)$$

$$\begin{aligned}
 M_{2n} &= \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=1}^4 C_{nj} \left[ \nu_{21} \bar{\Psi}_{nj}^{VI} - \left( 1 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 2\nu_{12} \nu_{21} \right) n^2 \bar{\Psi}_{nj}^{IV} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) n^4 \bar{\Psi}_{nj}^{II} - \frac{E_2}{E_1} n^6 \bar{\Psi}_{nj} \right] \cos(n\bar{x}_2), \\
 M_{3n} &= 2 \frac{B_1}{R^2} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \sum_{j=1}^4 C_{nj} \left[ -\frac{E_3}{E_2} n \bar{\Psi}_{nj}^V + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 - 2\nu_{21} \frac{E_3}{E_1} \right) n^3 \bar{\Psi}_{nj}^{III} - \frac{E_3}{E_1} n^5 \bar{\Psi}_{nj}^I \right] \sin(n\bar{x}_2), \\
 Q_{1n} &= \frac{B_1}{R^3} \sum_{j=1}^4 C_{nj} \left[ \frac{E_1}{E_2} \bar{\Psi}_{nj}^{VII} - \left( 2 \frac{E_3}{E_2^*} + \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) n^2 \bar{\Psi}_{nj}^V + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 3 + \nu_{12} \frac{E_1}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - 4\nu_{12} \nu_{21} \right) n^4 \bar{\Psi}_{nj}^{III} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( 2 \frac{E_3}{E_1^*} + \nu_{12} \right) n^6 \bar{\Psi}_{nj}^I \right] \cos(n\bar{x}_2), \\
 Q_{2n} &= \frac{B_1}{R^3} \sum_{j=1}^4 C_{nj} \left[ -\left( 2 \frac{E_3}{E_2^*} + \nu_{21} \right) n \bar{\Psi}_{nj}^V + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 3 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - 4\nu_{12} \nu_{21} \right) n^3 \bar{\Psi}_{nj}^{IV} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( 2 \frac{E_3}{E_1^*} + \frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) n^5 \bar{\Psi}_{nj}^{II} + \frac{E_2}{E_1} n^7 \bar{\Psi}_{nj} \right] \sin(n\bar{x}_2).
 \end{aligned}$$

A csillapodásfüggvény deriváltjai — az előző fejezetben közöltekhez hasonlóan — a következő képletekből számíthatók:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_{n1}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{n1} \bar{x}_1} [B_{1\eta} \cos(\beta_{n1} \bar{x}_1) + B_{2\eta} \sin(\beta_{n1} \bar{x}_1)], \\
 \bar{\Psi}_{n2}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{n1} \bar{x}_1} [B_{1\eta} \sin(\beta_{n1} \bar{x}_1) - B_{2\eta} \cos(\beta_{n1} \bar{x}_1)], \\
 \bar{\Psi}_{n3}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{n2} \bar{x}_1} [B_{3\eta} \cos(\beta_{n2} \bar{x}_1) + B_{4\eta} \sin(\beta_{n2} \bar{x}_1)], \\
 \bar{\Psi}_{n4}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_{n2} \bar{x}_1} [B_{3\eta} \sin(\beta_{n2} \bar{x}_1) - B_{4\eta} \cos(\beta_{n2} \bar{x}_1)].
 \end{aligned} \tag{42a-d}$$

A  $B_{j\eta}$  együtthatók meghatározására szolgáló összefüggések:

$$\begin{aligned}
 B_{1\eta} &= -\alpha_{n1} B_{1(\eta-1)} + \beta_{n1} B_{2(\eta-1)}, \\
 B_{2\eta} &= -\alpha_{n1} B_{2(\eta-1)} - \beta_{n1} B_{1(\eta-1)}, \\
 B_{3\eta} &= -\alpha_{n2} B_{3(\eta-1)} + \beta_{n2} B_{4(\eta-1)}, \\
 B_{4\eta} &= -\alpha_{n2} B_{4(\eta-1)} - \beta_{n2} B_{3(\eta-1)},
 \end{aligned} \tag{43a-d}$$

ahol

$$\begin{aligned} B_{10} &= B_{30} = 1, \\ B_{20} &= B_{40} = 0. \end{aligned} \quad (44a-b)$$

A  $C_{nj}$  integrálási állandókat — a henger végeitől távol eső főkör mentén ( $\bar{x}_1 = 0$ ) ható életterhelés esetén — az alábbi illesztési feltételek kielégítése útján határozzuk meg:

$$\begin{aligned} u_n(0, \bar{x}_2) &= 0, \\ w'_n(0, \bar{x}_2) &= 0, \\ N_{3n}(0, \bar{x}_2) &= 0, \\ Q_{1n}(0, \bar{x}) &= 1/2P_2(\bar{x}_2). \end{aligned} \quad (45a-d)$$

Az eltolódásfüggvény bevezetése után az illesztési feltételek a következő egyszerűbb alakra hozhatók:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{nj} B_{j1} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{nj} B_{j3} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{nj} B_{j5} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{nj} B_{j7} &= 2\beta_2^4 \frac{R}{s} \frac{P_n}{E_1}. \end{aligned} \quad (46a-d)$$

(Megjegyezni kívánjuk, hogy a hengert végtelen hosszúnak tekintjük, így meg-támasztási peremfeltételek nincsenek.)

Az integrálási állandók meghatározásával lényegében a problémát is megoldottuk. A  $C_{nj}$  állandók számszerű értékeit az eltolódások, továbbá az élerők és élnyomatékok kifejezéseibe helyettesítve a főkör mentén ható — héjfelületre merőleges — életterhelés okozta hajlítófeszültségi állapothoz jutunk.

### Szám példa

A hajlítási feszültségállapot meghatározása során a legnagyobb nehézséget a (18) és (35) alatti karakterisztikus egyenletek gyökeinek a kiszámítása jelenti. Számszerű vizsgálataink ezért a gyökök együtthatóinak a meghatározására összpontosulnak.



A számításokat üvegszállal erősített poliészter csőre végeztük, főként mentén ható éltérhelés feltételezésével.

Az alkotók közül a poliészter rugalmas jellemzői a következők:

$$E_M = 40\,000 \text{ kp/cm}^2,$$

$$\nu_M = 0,35,$$

$$G_M = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)} = 14\,814 \text{ kp/cm}^2;$$

az üvegszálaké pedig:

$$E_U = 730\,000 \text{ kp/cm}^2,$$

$$\nu_U = 0,22,$$

$$G_U = \frac{E_U}{2(1 + \nu_U)} = 299\,180 \text{ kp/cm}^2.$$

Az ortotropia főirányaira vonatkozó rugalmas jellemzőket —  $\omega = 54^\circ 45'$  tekereselési szög és 65%-os üvegszáltartalom feltételezésével — számítottuk [6] és a következő értékeket kaptuk:

$$E_1 = 102\,526 \text{ kp/cm}^2,$$

$$E_2 = 195\,904 \text{ kp/cm}^2,$$

$$E_3 = 125\,487 \text{ kp/cm}^2,$$

$$\nu_{12} = 0,7708,$$

$$\nu_{21} = 0,4034.$$

A közölt jellemzőket, továbbá az  $R/s = 100$  értéket számításba véve a (10a—e) összefüggések szerint a (35) alatti karakterisztikus egyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \lambda_n^8 - 4,934732n^2\lambda_n^6 + 3,717818n^4\lambda_n^4 - 9,429139n^6\lambda_n^2 + \\ + 3,651041n^8 = -157999,9\lambda_n^4. \end{aligned}$$

A gyökök, illetve az  $\alpha_{n1}$ ,  $\alpha_{n2}$ ,  $\beta_{n1}$  és  $\beta_{n2}$  együtthatók meghatározása viszonylag bonyolult program kidolgozása után ICT 1905 tip. számítógépen történt,  $n = 4, 8, \dots, 200$  hullámszámok eseteire. A kapott eredmények az I. táblázatban találhatók.

## I. táblázat

Ortotrop anyagra vonatkozó együtthatók

$n$	$\alpha_{n1}$	$\alpha_{n2}$	$\beta_{n1}$	$\beta_{n2}$
4	14,7989	0,8210	13,4034	0,7435
8	16,7565	3,6098	11,3962	2,4550
12	17,9127	9,7116	6,8028	3,6882
16	19,7994	16,8059	4,8984	4,2341
20	24,3577	21,3951	6,0155	5,2838
24	29,0538	25,8482	7,1292	6,3425
28	33,8071	30,2445	8,2739	7,4019
32	38,5868	34,6148	9,4319	8,4609
36	43,3803	38,9713	10,5967	9,5196
40	48,1815	43,3202	11,7562	10,5780
44	52,9868	47,6649	12,9357	11,6363
48	57,7950	52,0069	14,1075	12,6945
52	62,5061	56,3469	15,2803	13,7527
56	67,4165	60,6856	16,4536	14,8107
60	72,2284	65,0239	17,6272	15,8688
64	77,0409	69,3615	18,8011	16,9268
68	81,8540	73,6986	19,9752	17,9848
72	86,6673	78,0354	21,1495	19,0428
76	91,4809	82,3719	22,3239	20,1008
80	96,2948	86,7082	23,4984	21,1588
84	101,1083	91,0448	24,6728	22,2168
88	105,9225	95,3808	25,8474	23,2748
92	110,7364	99,7171	27,0119	24,3328
96	115,5506	104,0530	28,1966	25,3907
100	120,3649	108,3889	29,3713	26,4487
104	125,1792	112,7247	30,5460	27,5066
108	129,9934	117,0606	31,7207	28,5646
112	134,8082	121,3960	32,8957	29,6225
116	139,6222	125,7322	34,0702	30,6805
120	144,4366	130,0679	35,2450	31,7385
124	149,2508	134,4038	36,4197	32,7964
128	154,0651	138,7394	37,5944	33,8544
132	158,8597	143,0753	38,7692	34,9123
136	163,6941	147,4110	39,9440	35,9703
140	168,5085	151,7468	41,1188	37,0283
144	173,3230	156,0824	42,2936	38,0862
148	178,1374	160,4182	43,4683	39,1442
152	182,9520	164,7538	44,6432	40,2021
156	187,7661	169,0897	45,8178	41,2601
160	192,5812	173,4249	46,9929	42,3180
164	197,3955	177,7607	48,1676	43,3760
168	202,2093	182,0970	49,3421	44,4340
172	207,0242	186,4322	50,5171	45,4919
176	211,8386	190,7681	51,6919	46,5499
180	216,6534	195,1034	52,8668	47,6078
184	221,4671	199,4398	54,0413	48,6658
188	226,2819	203,7752	55,2162	49,7237
192	231,0962	208,1110	56,3909	50,7817
196	235,9112	212,4462	57,5660	51,8396
200	240,7254	216,7821	58,7407	52,8976

## II. táblázat

*Izotrop anyagra vonatkozó együtthatók*

$n$	$\alpha_{n1}$	$\alpha_{n2}$	$\beta_{n1}$	$\beta_{n2}$
4	13,5033	0,6492	12,2643	0,5897
8	15,6059	2,7518	10,9272	1,9268
12	18,8772	6,0231	9,7447	3,1092
16	22,6288	9,7748	8,9765	3,8775
20	26,5322	13,6782	8,4815	4,3725
24	30,4883	17,6342	8,1437	4,7103
28	34,4657	21,6116	7,9002	4,9538
32	38,4530	25,5989	7,7168	5,1372
36	42,4452	29,5912	7,5738	5,2802
40	46,4403	33,5862	7,4593	5,3947
44	50,4370	37,5829	7,3656	5,4884
48	54,4347	41,5806	7,2874	5,5666
52	58,4331	45,5790	7,2213	5,6327
56	62,4318	49,5778	7,1645	5,6894
60	66,4309	53,5769	7,1154	5,7386
64	70,4302	57,5762	7,0724	5,7816
68	74,4297	61,5756	7,0344	5,8196
72	78,4293	65,5752	7,0007	5,8533
76	82,4289	69,5749	6,9705	5,8835
80	86,4287	73,5746	6,9433	5,9107
84	90,4284	77,5744	6,9187	5,9352
88	94,4282	81,5742	6,8964	5,9576
92	98,4281	85,5740	6,8760	5,9780
96	102,4279	89,5739	6,8573	5,9967
100	106,4278	93,5738	6,8400	6,0130
104	110,4277	97,5737	6,8242	6,0298
108	114,4277	101,5736	6,8095	6,0445
112	118,4276	105,5736	6,7958	6,0582
116	122,4275	109,5735	6,7831	6,0709
120	126,4275	113,5734	6,7712	6,0828
124	130,4274	117,5734	6,7601	6,0939
128	134,4274	121,5733	6,7497	6,1043
132	138,4274	125,5733	6,7399	6,1141
136	142,4273	129,5733	6,7307	6,1233
140	146,4273	133,5732	6,7220	6,1319
144	150,4273	137,5732	6,7138	6,1401
148	154,4272	141,5732	6,7061	6,1479
152	158,4272	145,5732	6,6981	6,1552
156	162,4275	149,5731	6,6918	6,1622
160	166,4272	153,5731	6,6852	6,1688
164	170,4272	157,5731	6,6789	6,1751
168	174,4272	161,5731	6,6729	6,1811
172	178,4272	165,5731	6,6671	6,1868
176	182,4271	169,5731	6,6617	6,1923
180	186,4271	173,5731	6,6565	6,1975
184	190,4271	177,5731	6,6515	6,2025
188	194,4271	181,5730	6,6467	2,2073
192	198,4271	185,5730	6,6421	6,2118
196	202,4271	189,5730	6,6377	6,2162
200	206,4271	193,5730	6,6335	6,2205

Összehasonlítás céljából ugyancsak kiszámítottuk az izotrop szerkezeti anyagra vonatkozó együttthatókat az

$$E_1 = E_2 = E ,$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0,3,$$

$$E_3 = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

rugalmas jellemzők figyelembevételével.

A karakterisztikus egyenlet ez esetben másodfokúra redukálható, így a gyökök meghatározása lényegesen egyszerűsödik [7]. A számított együttthatókat a II. táblázat tartalmazza.

Az I. és II. táblázat tanúsága szerint nincs lényeges különbség az ortotrop és az izotrop héjra kiszámított együttthatók, ezzel együtt a gyökök alakulásában. Így a közölt módszer alkalmazhatóságára az izotrop héjra végzett számszerű vizsgálatok alapján következtethetünk. Ilyen jellegű számítások a szakirodalomban [7] találhatóak. Ezek szerint például az egységnyi ívhosszon ható állandó jellegű életterhelés okozta legnagyobb feszültségek is viszonylag egyszerűen — a Fourier sor kb. 25 tagjának figyelembevételével — már elfogadható pontossággal számíthatók. Az előzőek értelmében tehát az eltolódásfüggvény bevezetése az ortotrop héjak vizsgálatát is egyszerűvé teszi.

#### IRODALOM

1. FLÜGGE, W.: *Stresses in Shells*. Berlin, Springer Verlag 1960.
2. WLISSOW, S.: *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik*. Berlin, Akademia Verlag 1958.
3. AMBARTSUMIAN, S.: *Some Current Aspects of the Theory of Anisotropic Layered Shells*. *Applied Mechanics Surveys*, Washington D. C., 1966.
4. AMBARTSUMIAN, S.: *On the General Theory of Anisotropic Shells*. *Prikl. Mat. Mekh.*, **22**. (1958.)
5. AMBARTSUMIAN, S.—PESHTMALDZHIAN, D.: *On the Theory of Ortotropic Shells and Plates*. *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR, Ser. Fiz.—Mat. Nauk* **12**, no. 1, 1959.
6. VARGA, L.: *Üvegszállal erősített műanyagok rugalmas tulajdonságai*. *Műanyag és Gumi* **8**. (1971), 7. szám.
7. VARGA, L.: *Bestimmung der durch Apparatpratzen geweckten Spannungen und Ausbildung der optimalen Pratzkonstruktion, I und II*. *Periodica Polytechnica* **12** (1968) und **12**. (1969).

**Discussion of the Bending Theory of Cylindrical Shells of Orthogonally Anisotropic Structural Material, by Introducing the Displacement Function.** The general bending theory of cylindrical shells of orthogonally anisotropic structural material (e. g. glass reinforced plastic) in the case of edge loads normal to the shell surface is discussed. First the correlations between internal forces and deformation are explained, then the differential equations of bending are presented. This homogeneous differential equation system is solved by introducing the displacement function. Determination of the displacement function and bending

stress state in the case of periodically changing edge loads acting along the generatrix and the great circle is dealt with in detail. On the basis of the relations thus derived, the bending stress state caused by an edge load varying according to an optional function, readily described by the Fourier series, can also be determined. Finally, a numerical example illustrating the root development of the characteristic equation is shown.

**Behandlung der Biegetheorie von zylindrischen Schalen aus orthogonal anisotropischem Material mittels Einführung der Verschiebungsfunktion.** Gegenstand der Arbeit ist die allgemeine Biegetheorie von zylindrischen Schalen aus orthogonal anisotropischem Werkstoff (z.B. glasfaserverstärktem Kunststoff) für den Fall von auf die Schalenoberfläche normalen Linienbelastungen. Zuerst werden die Zusammenhänge zwischen den inneren Kräften und den Formänderungen beschrieben und dann werden die Differentialgleichungen der Biegung vorgelegt. Das homogene Differentialgleichungssystem wird durch die Einführung der Verschiebungsfunktion gelöst. Eingehend werden die Berechnung der Verschiebungsfunktion und des Biegespannungszustandes vorgeführt, für den Fall von periodisch wechselnden Linienbelastungen entlang der Erzeugenden und des Leitkreises. Auf Grund der abgeleiteten Beziehungen kann auch ein solcher Biegespannungszustand berechnet werden, welcher von einer, gemäß einer beliebigen — durch eine Fourierschen Reihe beschreibbaren — Funktion wechselnden Linienbelastung verursacht wird. Zum Schluß veröffentlicht der Verfasser ein Zahlenbeispiel welches den Verlauf der Wurzeln der charakteristischen Gleichung veranschaulicht.