RÚDSZERKEZETEK STABILITÁSVIZSGÁLATA

GÁSPÁR ZSOLT*

[Beérkezett 1971. augusztus 9-én]

A rúdszerkezetek nagy elmozdulásokra is érvényes állapotváltozási differenciálegyenletéből kiindulva levezetjük az egyparaméteres teherhez tartozó állapotváltozási differenciálegyenletet. E differenciálegyenlet homogén része a rúdszerkezet állapotváltozásának elágazási pontjánál oldható meg. A differenciálegyenlet együtthatómátrixának blokkjait a másodrendű elmélet segítségével közelítjük, és így egy direkt sajátértékfeladatra jutunk. Végül egy interpolációs eljárást közlünk, melynek segítségével a kritikus teher paraméterét tetszőleges pontossággal meg lehet határozni.

1. Bevezetés

Célunk a rúdszerkezetek egyparaméteres állapotváltozása elágazási pontjának meghatározása. A feltett kérdésre a választ a rúdszerkezet egyparaméteres teréhez tartozó

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\mathbf{s} \end{bmatrix} + dR \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

állapotváltozási differenciálegyenlet homogén része megoldhatóságának

$$\begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{vmatrix} = 0$$

feltétele adja meg. Az egyenletet — egyparaméteres terhet feltételezve — a [2]-ben bemutatott, a nagy elmozdulásokra is érvényes differenciálegyenletből kiindulva vezetjük le. A differenciálegyenlet együtthatómátrixának blokkjait a másodrendű elmélet használhatóságát feltételezve az elágazási pont közelében levő, ismert stabil állapotból kiindulva közelítjük, és így egy — a kiindulási stabil állapot skalár paraméterétől is függő — direkt sajátértékfeladatra jutunk. A legkisebb sajátérték a kritikus teher nagyságát, a hozzá tartozó sajátvektor a kihajlási alakot adja meg. Végül egy interpolációs eljárást közlünk, amelynek segítségével a kritikus teher paraméterét tetszőleges pontossággal meg lehet határozni.

* Gáspár Zsolt, Budapest XI., Kelenföldi u. 35/a

2. Az állapotváltozás elágazási pontját meghatározó differenciálegyenlet

A rúdszerkezetet az [1]-ben definiált rúdelemekkel közelítjük, így nagy elmozdulások esetén is érvényes a [2]-ben levezetett

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{q} \\ d\mathbf{t} \end{bmatrix} = 0 \tag{1}$$

differenciálegyenlet, ahol

$$\mathbf{D} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{s} \right].$$

A vizsgálat során feltételezzük, hogy a szerkezet nagy elmozdulásokat szenved, tehát a geometriája is megváltozik, így a mindenkori $\mathbf{G}$ az alaphelyzethez viszonyított elmozdulások függvénye

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}).$$

A szerkezet hajlékonysági mátrixa általános esetben az elmozdulásoknak és a feszültségeknek is függvénye

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{s}),$$

de az alábbi összefüggések levezetésénél feltételezzük, hogy a szóbajövő állapotváltozási tartományban

$$\mathbf{F} = \text{const.}$$

Vizsgálataink egyparaméteres teherre vonatkoznak, tehát a teher

$$\mathbf{q} = R\mathbf{f},$$

$$\mathbf{f} = \text{const.}$$

alakban írható, ahol $\mathbf{f}$ állandó vektor is lehet, azonban általánosságban feltételezzük, hogy az elmozdulások egyértékű függvénye

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Egyparaméteres teher esetén a teher infinitezimálisan kicsiny megváltozása során a

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + R\mathbf{f} = 0, \tag{2}$$

$$(\mathbf{G}^* + d\mathbf{G}^*)(\mathbf{s} + d\mathbf{s}) + (R + dR)(\mathbf{f} + d\mathbf{f}) = 0$$

egyensúlyi egyenletek érvényesek, amelyek összevonása után (a $d\mathbf{G}^* ds$ tag elhanyagolásával),

$$d\mathbf{G}^* = \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u},$$

$$d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u}$$

összefüggéseket felhasználva és a ($dt = 0$ feltételezéssel élve)

$$\mathbf{G}\, d\mathbf{u} + \mathbf{F}\, ds = 0 \tag{3}$$

kinematikai egyenletet figyelembe véve előállíthatjuk az *egyparaméteres teherhez tartozó állapotváltozási differenciálegyenletet*:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ ds \end{bmatrix} + dR \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \tag{4}$$

ahol

$$\mathbf{D} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{s} \right] + R \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}.$$

Vizsgálataink célja az állapotváltozás elágazásának meghatározása. Más szóval meghatározandónak tekintjük az $\mathbf{u}(R)$, $\mathbf{s}(R)$ térgörbe R paraméterrel jellemzett azon pontját, amelynek közvetlen szomszédságában (infinitezimális közelségében) létezik változatlan R paraméter értékhez tartozó $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$, $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$ állapotjellemzőkkel leírható egyensúlyi állapot. Az elágazási pontban tehát a (4) egyenlet $dR = 0$ differenciál mellett kielégül. A rúdszerkezet állapotváltozásának elágazási pontját így a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ ds \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

homogén differenciálegyenlet határozza meg.

Ezzel a feladat elvileg megoldottnak tekinthető, mert a keresett R értéket a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

karakterisztikus egyenlet szolgáltatja. Azonban (6) az R-et implicite tartalmazza, ezért elméletileg úgy kell eljárni, hogy (4)-et integrálva — azaz $\mathbf{x}(R) = [\mathbf{u}(R), \mathbf{s}(R)]$ állapotváltozási térgörbét előállítva — keressük, hogy (6) egyenletet milyen R-től függő $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ elégíti ki.

A vázolt gondolatmenetből kitűnik, hogy a (4) differenciálegyenlet együttható mátrixa az elágazási pont közvetlen környezetében rosszul kondicionálttá válik, ezért közönséges iterációval nem lehet az elágazási ponthoz tartozó R paraméterértéket meghatározni. Ellenben járható útként kínálkozik az elágazási pont véges környezetére épített interpoláció, melyre vonatkozó — gyakorlatilag használható és kipróbált — algoritmust a következő két pontban mutatjuk be.

Ha feltételezhetjük, hogy

$$\mathbf{F} \neq 0,$$

az (5) differenciálegyenlet alsó egyenletéből $d\mathbf{s}$ kifejezhető

$$d\mathbf{s} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\,d\mathbf{u}.$$

Ez behelyettesítve az (5) összefüggés felső egyenletébe, az *elágazási ponthoz tartozó sajátértékfeladatot*

$$(\mathbf{D} - \mathbf{G}^* \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})\,d\mathbf{u} = 0$$

formában, vagy a $\mathbf{D}$ részletezésével

$$\left(\left[\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{s}\right] + R\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{G}^* \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\right) d\mathbf{u} = 0 \tag{7}$$

formában is leírhatjuk.

Ebben az egyenletben a második tag tényezőként is tartalmazza az R sajátértéket, míg a többi tag csak közvetve, tehát $\mathbf{f} =$ const. esetben a

$$\left(\left[\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{s}\right] - \mathbf{G}^* \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\right) d\mathbf{u} = 0$$

elfajult sajátértékfeladatot kapjuk.

3. Az együtthatómátrix meghatározása

A (7) összefüggésben szereplő mátrixok és vektorok az R paraméter függvényei, így az R-rel együtt ismeretlenek, tehát segítségükkel egyelőre nem határozhatjuk meg a kritikus teher paraméterét. Ezért feltételezzük, hogy ismert a stabil állapotváltozási szakasznak egy olyan, R_i paraméterhez tartozó $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{s}_i$ állapotvektora, mely „elég közel" van az R paraméterrel jellemezhető $\mathbf{u}$, $\mathbf{s}$ állapotvektorhoz. Elég közelinek akkor nevezzük a két állapotvektort, ha az egész $[R_i, R]$ zárt intervallumban előírt pontossággal teljesülnek a következő feltételek:

a) a **G** mátrix megváltozása az elmozdulásvektor lineáris függvényének tekinthető

b) a **G** mátrix és az **f** vektor derivált tenzora konstansnak vehető

c) az elmozdulásvektor növekményét több tényezőként tartalmazó tagok elhanyagolhatóak a többi taghoz képest.

Tehát a feltételezésünk szerint ismert a

$$\mathbf{G}_i^* \mathbf{s}_i + R_i \mathbf{f}_i = 0$$

egyensúlyi egyenlet, valamint a

$$\Delta \mathbf{s}_i = \mathbf{s} - \mathbf{s}_i , \qquad \Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u} - \mathbf{u}_i , \qquad \Delta R_i = R - R_i \tag{8}$$

jelölések felhasználásával a másodrendű elméletnek megfelelően a (4) differenciálegyenletet differenciaegyenletként írva érvényes a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_i & \mathbf{G}_i^* \\ \mathbf{G}_i & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i \\ \Delta \mathbf{s}_i \end{bmatrix} + \Delta R_i \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

összefüggés, ahol

$$\mathbf{D}_i = \left[\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \mathbf{s}_i \right] + R_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} .$$

A (9) egyenletből $\Delta\, \mathbf{s}_i$ és $\Delta\, \mathbf{u}_i$ kifejezhető

$$\Delta \mathbf{s}_i = -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i \Delta \mathbf{u}_i . \tag{10}$$

$$\Delta \mathbf{u}_i = (\mathbf{G}_i^* \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i)^{-1} \mathbf{f}_i \Delta R_i .$$

A

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}_i^* \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i$$

jelöléssel

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_i \Delta R_i , \tag{11}$$

és ezt felhasználva, a (10) egyenletben a

$$\Delta \mathbf{s}_i = -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_i \Delta R_i \tag{12}$$

összefüggést kapjuk. Az R paraméterhez tartozó **G** feltételezésünk szerint felírható

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_i + \left.\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i \tag{13}$$

alakban.

A (7) sajátértékfeladat a (8) és (13) összefüggések alapján — mivel a derivált tenzorokat konstansnak tekintjük —

$$\left(\left[\left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} (\mathbf{s}_i + \Delta \mathbf{s}_i)\right] + R \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} - \right.$$

$$\left.\left(\mathbf{G}_i^* + \left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i\right) \mathbf{F}^{-1} \left(\mathbf{G}_i + \left.\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i\right)\right) d\mathbf{u} = 0$$

alakú lesz. Ebbe az egyenletbe behelyettesítve a (11) és (12) összefüggéseket — feltételezésünk alapján elhanyagolva a $\Delta\, \mathbf{u}_i$ vektort két tényezőként tartalmazó tagot — kapjuk

$$\left(\left[\left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \mathbf{s}_i\right] - \left[\left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_i)\right] \Delta R_i + R \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} - \right.$$

$$- \mathbf{G}_i^* \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_i^* \mathbf{F}^{-1} \left(\left.\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_i)\right) \Delta R_i -$$

$$\left. - \left(\left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_i)\right) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i \Delta R_i\right) d\mathbf{u} = 0\,.$$

Ez az egyenlet, ha bevezetjük a

$$\mathbf{D}_1 = - \mathbf{G}_i^* \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i$$

$$\mathbf{D}_2 = - \left(\left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_i)\right) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i$$

$$\mathbf{D}_3 = \left[\left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \mathbf{s}_i\right]$$

$$\mathbf{D}_4 = - \left[\left.\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_i \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_i)\right]$$

$$\mathbf{D}_5 = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i}$$

jelöléseket, akkor

$$(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_3 + (\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_2^* + \mathbf{D}_4) \Delta R_i + \mathbf{D}_5 R)\, d\mathbf{u} = 0$$

alakú lesz. (Ez az egyenlet a $\mathbf{D}_2^* \Delta R_i d\mathbf{u}$ tag kivételével megegyezik a [3] 259. oldalán található egyenlettel. A különbség a levezetésben szereplő eltérő elhanyagolásokból származik.) Felhasználva a

$$\Delta R_i = R - R_i$$

összefüggést, az

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_3 - R_i(\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_2^* + \mathbf{D}_4),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_2^* + \mathbf{D}_4 + \mathbf{D}_5$$

jelölések alkalmazásával az

$$(\mathbf{A} + R\,\mathbf{B})\, d\mathbf{u} = 0 \tag{14}$$

általánosított sajátértékfeladatot kapjuk, melyben az R sajátérték a kritikus teher paraméterét adja, a $d\mathbf{u}$ sajátvektor pedig a kihajlási alak affin képét határozza meg.

4. A stabilitásvizsgálat menete

A sajátértékfeladat levezetésekor feltételeztük, hogy a kritikus teher megfelelő közelségében levő R_i paraméterhez tartozó állapotvektort ismerjük. A megfelelő R_i paraméter meghatározását iterációs úton végezzük. A sajátértékfeladatban levő mátrixok, és így a sajátérték az R_i paraméter függvényei

$$R = f(R_i).$$

Az elágazási ponthoz tartozó teher paraméterét e függvény görbéjének és az

$$R = R_i$$

egyenletű egyenesnek a metszéspontja szolgáltatja, mivel itt a

$$\Delta R_i = 0$$

miatt a feltételeink teljesülnek. A metszéspont meghatározására a következő módszert javasoljuk. Ha az állapotváltozás stabil szakaszán egy R_i paraméterhez tartozó állapotvektor ismert (kiinduláskor esetleg a terheletlen állapot), akkor ez R_i paraméterrel kiindulva megoldjuk a (14) sajátértékfeladatot, amely az $f(R_i)$ értéket szolgáltatja. Ha

$$\operatorname{abs}\left(f(R_i) - R_i\right) > \varepsilon$$

(ε az előírt pontosságtól függő állandó), akkor a nagy elmozdulások elmélete segítségével meghatározzuk az

$$R_{i+1} = R_i + \Delta R \leq f(R_i)$$

paraméterhez tartozó állapotvektort, és az egész eljárást megismételjük.

IRODALOM

1. Szabó, J.—Rózsa, P.: Die Matrizengleichung von Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.* **71.** (1.—2.) (1971).
2. Szabó, J.—Rózsa, P.: Grosse Verschiebungen von Stabkonstruktionen. *Acta Techn. Hung.* **73.** (1.—2.) (1972).
3. Szabó, J.—Roller, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971, p. 266.

Stability Test of Bar Structures. Starting from the differential equation of the state variation of large bar structure displacements, the differential equation of the state variation pertaining to single-parameter loading is derived. The homogeneous part of this differential equation can be solved with respect to the branch point of the bar structure state variation. The coefficient matrix block of the differential equation is approached by the second order theory, whereby a direct eigenvalue problem is arrived at. Finally, an interpolation process is presented which leads to the optional accurate determination of the critical load parameter.

Stabilitätsprüfung von Stabkonstruktionen. Im folgenden wird von der auch für große Verschiebungen von Stabkonstruktionen gültigen Differentialgleichung der Zustandsänderung ausgehend, die der einparametrigen Last zugeordnete Differentialgleichung der Zustandsänderung abgeleitet. Der homogene Teil dieser Differentialgleichung kann am Abzweigungspunkt der Zustandsänderung der Stabkonstruktion gelöst werden. Die Blöcke der Koeffizientenmatrix der Differentialgleichung können mit Hilfe der Theorie zweiter Ordnung angenähert werden, wodurch man zu einem direkten Eigenwertproblem gelangt. Schließlich wird ein Interpolationsverfahren angeführt, mit dessen Hilfe der Parameter der kritischen Last mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden kann.