ELJÁRÁS TRANSZLÁCIÓS HÉJAK SZÁMÍTÁSÁRA

CSONKA PÁL*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

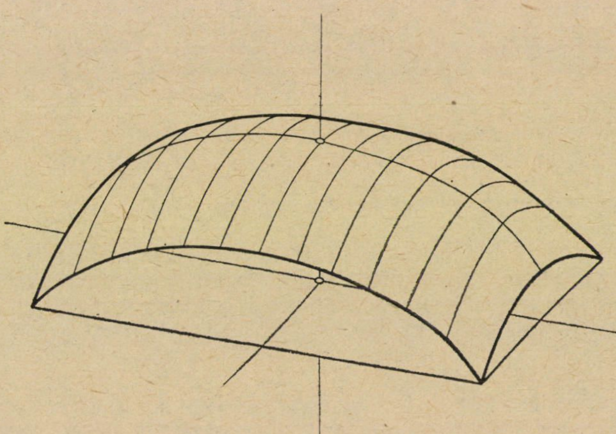
[Beérkezett 1970. november 3-án]

Dr. Menyhárd István emlékére

Ez a tanulmány derékszögű négyszögalaprajzú olyan transzlációs héjak számításával foglalkozik, amelyek peremívei csak saját síkjukban működő erőhatásokkal szemben ellenállók. Az ismertetett eljárás lehetővé teszi a redukált feszítőerők közvetlen meghatározását anélkül, hogy előzőleg a feszültségfüggvényt elő kellene állítani. A javasolt módszer főleg akkor előnyös, ha a héj középfelületének egyik vezérgörbéje másodfokú parabola.

1. Bevezetés

A négy peremükön egy-egy ívtartóra támaszkodó transzlációs héjak (1. ábra) számítása általában komoly nehézségekbe ütközik és rendszerint



1. ábra. Négy peremívre támaszkodó transzlációs héj

csak numerikus módszerekkel hajtható végre. Kivételt alkotnak e tekintetben az elliptikus paraboloid alakú héjak, amelyek vizsgálatára MENYHÁRD István [1—3], illetve MENYHÁRD István és SZMODITS Kázmér [4] dolgoztak

* Prof. Dr. CSONKA PÁL, Budapest, XI. Bartók Béla út 31.

ki jól kezelhető analitikus számító eljárást, továbbá a patkó- és sarlóhéjak, amelyek számításával szerző [6—8] foglalkozott.

Az alábbiak legalább egyszeresen szimmetrikus, egyébként azonban tetszőleges alakkal bíró derékszögű négyszög alaprajzú transzlációs héjak vizsgálatára alkalmas numerikus számító eljárást ismertetnek. Ilyen eljárás kidolgozását főképpen az indokolja, hogy nagyobb fesztávolságú transzlációs héjak esetében a héj vezérgörbéjeként — legalább is a nagyobb fesztáv irányában — parabolaív helyett egyéb alakú görbét, pl. láncgörbét célszerű választani.

2. Feltevések

Feltesszük, hogy a héj szegélyét négy függélyes síkú peremív támasztja alá, s ezek csupán saját síkjukba eső erőhatásokkal szemben fejtenek ki ellenállást, a síkjukra merőleges — oldalirányú — erőkkel szemben nem ellenállóak.

Fejtegetéseinket a héjak membránelméletében szokásos feltevésekre alapozzuk. A héj és peremívek csatlakozásánál az alakváltozási kényszerekből származó zavaró hatásokat figyelmen kívül hagyjuk.

A héjra ható teherként csak függőleges megoszló erőket veszünk számításba, és feltesszük, hogy ezek az erők a héj szimmetriasíkjára (ha két szimmetriasík, akkor legalább is azok egyikére) nézve szimmetrikus megoszlásúak.

3. Alapismeretek

Vizsgálatainkat olyan $O(x, y, z)$ derékszögű koordinátarendszerben végezzük, amelynek z tengelye függőleges és az alaprajzi négyszög középpontján megy át (2. ábra). Az xz koordinátasík a héj és a héjat terhelő külső erőrendszer közös szimmetriasíkjával esik egybe, a z tengely pozitív ága lefelé mutat. Ebben a koordinátarendszerben az alaprajzi négyszög oldalainak egyenlete

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b.$$

A héjra ható függőleges terhet a héjalaprajz területegységére vonatkoztatott fajlagos értékével jellemezzük, s a lefelé ható erőket tekintjük pozitívoknak. A fajlagos teherértéket a

$$g = g(x, y) \tag{1}$$

teherfüggvénnyel fejezzük ki.

A héj feszültségi állapotának vizsgálatára a héjból az xz és yz koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal egy alaprajzban derékszögű négyszögalakú héjelemet metszünk ki. E héjelem feszültségi állapotát az x, y irányú

$$n_x, n_{xy} = n_{yx}, n_y$$

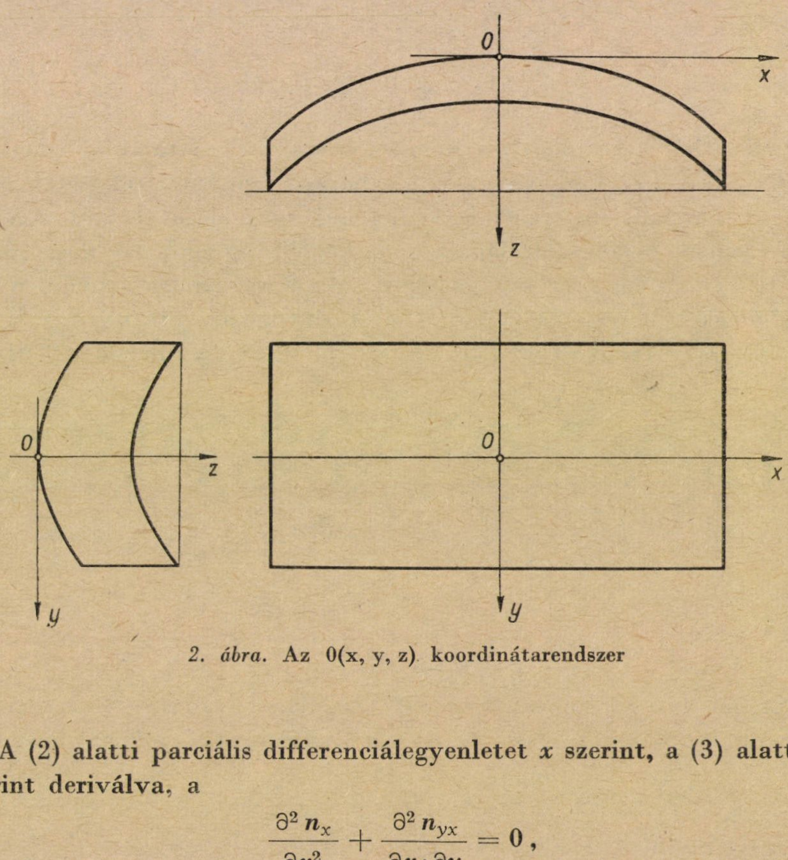
redukált feszítőerőkkel jellemezzük.

A kimetszett héjelem x, y, z irányú egyensúlyát az alábbi három vetületi egyenlettel fejezhetjük ki [5]:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} n_x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} n_y + g = 0. \tag{4}$$



2. *ábra.* Az 0(x, y, z) koordinátarendszer

A (2) alatti parciális differenciálegyenletet x szerint, a (3) alattit pedig y szerint deriválva, a

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_{yx}}{\partial x \cdot \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = 0$$

összefüggésekhez jutunk. Ezeknek az egyenleteknek bal oldalán a második tagok azonosak, következésképpen az első tagoknak is azonosaknak kell lenniök, vagyis

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Minthogy a peremívek feltevésünk szerint oldalirányú erőket nem tudnak felvenni, az $x = \pm a$ peremvonalak mentén

$$n_x = 0, \tag{6}$$

az $y = \pm b$ peremvonalak mentén pedig

$$n_y = 0 \tag{7}$$

tartozik lenni.

4. A redukált feszítőerők

Membránhéjak redukált feszítőerőinek számítása általában a héjfeladat $F = F(x, y)$ feszültségfüggvényének meghatározását, nevezetesen a feszültségfüggvény parciális differenciálegyenletének megoldását teszi szükségessé. Ez a differenciálegyenlet általában csak közelítőleg oldható meg, ami azt jelenti, hogy a nemegyszer igen hosszadalmas számítás eredményeként pontos F értékek helyett csak pontatlan F értékekhez jutunk.

Minthogy a redukált feszítőerők az F függvény második deriváltjai

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y},$$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

a feszültségfüggvény pontatlan ismeretéből származó hibák a redukált feszítőerők értékében fokozott mértékben jelentkeznek. Kívánatos tehát, ha lehetséges, olyan eljárás kidolgozása, amely a redukált feszítőerők meghatározását közvetlenül — a feszültségfüggvény előzetes előállítása nélkül — teszi lehetővé.

Ennek a célnak az érdekében olyan egyenleteket kell előállítanunk, amelyek mindegyikében ismeretlenként csak egyetlen egy redukált feszítőerő szerepel. További szükséges feltétel, hogy a szóban forgó redukált feszítőerő kerületi vagy kezdeti értékei ismertek, illetve közvetlenül meghatározhatók legyenek.

a) Az n_x redukált feszítőerő

Foglalkozzunk először az n_x redukált feszítőerő meghatározásával. Evégett induljunk ki a (4) differenciálegyenletből és deriváljuk azt kétszer y szerint:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}n_y+2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cdot\frac{\partial n_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0.$$

Ezt az egyenletet az (5) összefüggés felhasználásával így írhatjuk:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}n_y+2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cdot\frac{\partial n_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0. \tag{8}$$

A fenti egyenletben nemcsak n_x, hanem n_y is előfordul azonban a (4) egyenlet szerint n_y az n_x függvényeként egyszerűen kifejezhető:

$$n_y=-\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}n_x+g}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}. \tag{9}$$

Ugyanez vonatkozik a $\partial n_y/\partial y$ deriváltra is, mely az előző képlet figyelembevételével így írható fel:

$$\frac{\partial n_y}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}n_x+g\right)-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial n_x}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}. \tag{10}$$

A (7) és (8) alattiakat a (6) differenciálegyenletbe betéve, olyan differenciálegyenletet kapunk, amelyben ismeretlenként csupán az n_x függvény és ennek a függvénynek a deriváltjai szerepelnek. Ezt a parciális differenciálegyenletet olyan módon kell megoldanunk, hogy az n_x függvény a héj peremvonalai mentén az n_x-re vonatkozó kerületi feltételeknek is eleget tegyen.

A (6) alattiak szerint az n_x függvény által az $x=\pm a$ peremvonalak mentén teljesítendő kerületi feltétel

$$n_x=0. \tag{11}$$

Az $y=\pm b$ peremvonalak mentén viszont n_x a (4) egyenletnek tartozik megfelelni, amely ez esetben a (7) alattiakra való tekintettel így írható:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}n_x+g=0.$$

Ezek szerint az n_x függvény által az $y = \pm b$ peremvonalak mentén teljesítendő kerületi feltétel:

$$n_x = -\frac{g}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}} . \tag{12}$$

Abban a különleges esetben, amidőn a héj középfelületének egyenlete

$$z = f(x) + Ay^2, \qquad A = \text{konst} \tag{13}$$

alakú, a fenti általános érvényű egyenletek lényegesen egyszerűbb alakot öltenek. Ilyenkor

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2A , \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0 , \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0 ,$$

és így a (8) egyenlet helyett ez írható:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2} + 2A \frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 . \tag{14}$$

A szóban forgó különleges esetben a (14) differenciálegyenletet kell tehát a (11) és (12) kerületi feltételek betartásával n_x-re megoldani.

Ha viszont

$$g = g(x)$$

és

$$z = A(x^2 + y^2), \quad A = \text{konst} , \tag{15}$$

a (14) egyenlet a Menyhárd-féle

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2} = 0 \tag{16}$$

alakba megy át. Az itt ismertetett eljárás tehát a Menyhárd-féle eljárás [1] általánosításának tekinthető.

Talán visszásnak tűnik, hogy a (16) differenciálegyenletben maga a g teherfüggvény elő sem fordul, holott az n_x feszítőerő nem lehet a héjra ható g tehertől független. Ez a visszásság azonban csak látszólagos, mert az n_x által teljesítendő (12) kerületi feltételben a g teherfüggvény benne szerepel és ezért (16) differenciálegyenlet megoldása nem független g-től. — Ugyanezen megállapítás vonatkozik a (8) és (14) differenciálegyenletekre is, melyekben a g teherfüggvény helyett csak annak y szerinti deriváltjai fordulnak elő.

b) Az n_y redukált feszítőerő

Az n_y redukált feszítőerőre nézve a (10) alattihoz hasonló differenciálegyenlet írható fel és ebből n_y kiszámítható. Ha azonban az n_x függvényt már ismerjük, az n_y függvény értékét egyszerűbb az említett differenciálegyenlet helyett a (4) egyenlet segítségével meghatározni. E szerint az egyenlet szerint ugyanis

$$n_y = -\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} n_x + g}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} . \tag{17}$$

A (13) alatti különleges esetben a fenti képlet helyébe az

$$n_y = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} n_x + g\right) \tag{18}$$

képlet lép, a (15) alatti esetben pedig n_y így fejezhető ki:

$$n_y = -n_x - \frac{g}{2A} . \tag{19}$$

c) Az n_{xy} redukált feszítőerő

Az n_{xy} redukált feszítőerő meghatározása a (2) egyenlet segítségével történhetik. E szerint az egyenlet szerint

$$n_{xy} = \int \frac{\partial n_x}{\partial x} dy . \tag{20}$$

Minthogy a héj és terhelése feltevésünk szerint az xz koordinátasíkra nézve szimmetrikus, az $y = 0$ helyen n_{xy}-nak el kell tűnnie. Ezt a körülményt a (20) képletben kijelölt integrálás elvégzése alkalmával kezdeti feltételként tekintetbe kell venni.

5. A számítás gyakorlati végrehajtása

A (10) illetve (14) jelű változó együtthatós parciális differenciaegyenletek — bonyolult voltuk miatt — általában csak közelítő numerikus módszerekkel oldhatók meg. A számítás elvégzéséhez a héj alaprajzára egyenlő osztásközű olyan derékszögű hálózatot kell fektetni, amelynek szélső hálózati vonalai a héjalaprajzú oldalaival esnek egybe. Ezután a (12) illetve (14) egyenletben az n_x deriváltjait közelítésként a hálózat csomópontjaiban képzett megfelelő differenciahányadosokkal kell helyettesíteni és az így nyert véges differenciaegyenleteket kell pl. relaxációval megoldani. A számítás során n_x kezdő értékeiül a vizsgálandó héj ívmagasságaival azonos ívmagasságú patkóhéjak [6—8] n_x értékeit célszerű választani, s ezeket az értékeket kell a következő számítási lépésekben a differenciaegyenletnek megfelelően fokról-fokra javítani.

6. Megjegyzés

Ha a héj sarokpontjaiban

$$g \neq 0,$$

a sarokpontok környezetében a (4) egyenlet helyett az általánosabb

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} n_x + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} n_{xy} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} n_y + g = 0$$

egyenlethez kell folyamodnunk. Az utóbbi egyenlet a sarokpontokban akkor is teljesülhet, ha

$$n_{xy} = \infty .$$

A fenti elméleti értékekkel szemben a javasolt közelítő számító eljárás a sarokpontokban n_{xy}-ra véges értéket szolgáltat. Ez a visszásság annak a következménye, hogy a számítás alkalmával a differenciálhányadosokat — közelítésként — differenciahányadosokkal helyettesítettük.

Egyébként a sarokpontokban n_{xy} valóban véges értékű. Itt a héj peremívei ui. sarokmereven kapcsolódnak egymáshoz, és így a peremívek a sarokpontok környezetében — feltevésünktől eltérően — oldalirányú erők felvételére is alkalmasak. Ezek az oldalirányú erők a héj sarokrészeinek egyensúlyát hajlító- és csavarónyomatékok igénybevétele nélkül is biztosíthatják.

IRODALOM

1. Menyhárd I.: A B.Sz.K.R.T. Kelenföldi Autóbusz kocsiszinjének héjszerkezetei. Doktor értekezés. Élet és Irodalom Nyomda R. T. Budapest 1942.
2. Menyhárd I.: Héjszerkezetek elmélete, II. rész. *Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai* 19. kötet, Budapest 1943.
3. Menyhárd I.: Héjszerkezetek számítása és szerkesztése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966.
4. Menyhárd, I.—Szmodits, K.: Der Membranzustand der elliptischen Paraboloidschalen. *Bauplanung-Bautechnik* **16** (1962), 29—34.
5. Flügge, W.: Stresses in Shells. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960.
6. Csonka, P.: Results on Shells of Translation. *Acta Techn. Hung.* **10** (1955), 55—71.

7. CSONKA, P.: Membranschalen *Bauingenieur-Praxis*, Heft 16. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München 1966.
8. CSONKA, P.: Shell of Translation Constructed over a Rectangular Basis. *Acta Techn. Hung.* 44 (1963), 404—417.

Procedure of Calculation of Shells of Translation. The subject of this paper is the calculation of shells of translation having a quadrangular parallelogramm shape in plan. The edge arches of the investigated shells are not resistant to lateral forces. The procedure expounded here gives a possibility for the direct calculation of the reduced inner forces without previously determining the stress function of the problem. The suggested method is especially favourable in case if one of the generators of the shell's middle surface is a parabola of second degree.

Ein Verfahren zur Berechnung von Translationsschalen. Der Gegenstand dieses Aufsatzes ist die Berechnung von Translationsschalen mit rechteckigem Grundriss. Die Randbögen der betreffenden Schalen leisten Seitenkräften gegenüber keinen Widerstand. Das hier auseinander gesetzte Verfahren ermöglicht es die reduzierten Streckenkräfte unmittelbar zu berechnen ohne vorher die Spannungsfunktion des Problems zu bestimmen. Die vorgeschlagene Methode ist besonders günstig in dem Falle, wo eine der Leitlinien der Schalenmittelfläche eine Parabel zweiten Grades ist.