ÖSSZEFÜGGÉSEK A KONZOLOS KÉTTÁMASZÚ TENGELY LEGKEDVEZŐBB CSAPÁGYTÁMASZKÖZE ÉS A TENGELYNEK, VALAMINT A CSAPÁGYAKNAK BIZONYOS PARAMÉTEREI KÖZÖTT

LIPKA ISTVÁN*
SZERSZÁMGÉPIPARI MŰVEK FEJLESZTŐ INTÉZETE, HALÁSZTELEK

[Beérkezett: 1968. február 29-én]

A tanulmány az optimális csapágytámaszközre vonatkozó olyan tételek levezetésével foglalkozik, amelyek kifejezik az optimális csapágytámaszköz értékváltozásának a törvényszerűségeit arra az esetre, amikor a tengelyt és annak csapágyazását jellemző paraméterek közül egyeseknek az értékét változtatjuk. A levezetett tételek összefüggéseket fejeznek ki az optimális csapágytámaszköz hossza és a tengelyátmérő, a konzolhossz, valamint a csapágymerevségek között. Elemzi a csapágymerevségek értékének befolyását az optimális csapágytámaszközre, egymással megegyező és egymástól eltérő mellső és hátsó csapágymerevségek esetében, és ezzel kapcsolatban becsléseket ad az optimális támaszköz csökkenésére az egyező mellső és hátsó csapágymerevség növelésénél; továbbá megállapítja a csapágymerevségek viszonyának a befolyását az optimális csapágytámaszközre eltérő mellső, illetve hátsó csapágymerevség esetében. Végül foglalkozik az optimális orsómerevséggel és a csapágytámaszköz változásának befolyásával az orsómerevségnek az értékére.

I. Bevezetés

A legkedvezőbb csapágytámaszköz meghatározásával kéttámaszú konzolos tengelyek esetében két előbbi cikkünkben foglalkoztunk [1, 4]. Ezeken kívül még számos más cikk is foglalkozik ugyanezzel a kérdéssel [2, 3, 5—11].

Ebben a cikkben olyan tételeket vezetünk le, amelyek összefüggéseket állapítanak meg az optimális csapágytámaszköz és a csapágyakat, valamint a tengelyt jellemző paraméterek között. Ezek a paraméterek: a tengelyátmérő, a konzolhossz, a tengelymerevség és a két csapágy merevsége. Az optimális csapágytámaszköz és e paraméterek közt fennálló, a továbbiakban levezetett tételek mutatják az egyes paramétereknek a befolyását az optimális csapágytámaszköz értékének a kialakulására.

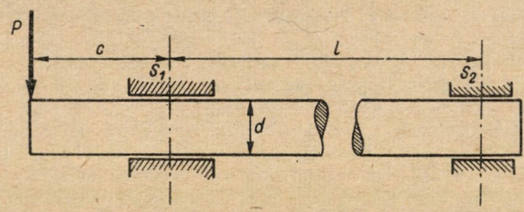
Vizsgálatainkban tömör és állandó keresztmetszetű tengelyekre szorítkozunk, és feltételezzük, hogy a terhelés csak a konzolon hat. Továbbá azt is feltételezzük, hogy a tengely a csapágyakban szabadon végezhet kisértékű szögelfordulást, tehát hogy a csapágysíkokban nem lép fel reakciónyomaték. (Az utóbbi feltétel az önbeálló gördülőcsapágyaknál és a siklócsapágyak közül a saruscsapágyaknál valósul meg.)

* Lipka István; Budapest XI., Szakasits Á. u. 43.

II. Az optimális csapágytámaszköz meghatározása

A vizsgált orsó vázlatát az 1. ábra mutatja. Az állandó d átmérőjű tömör tengely az s_1 [kp/μm] merevségű mellső és az s_2 [kp/μm] merevségű hátsó csapágyban fut. A c hosszúságú konzol vége a P erő hatására lehajlik, amely lehajlás minimális, ha a csapágytámaszköz l értékét egy megfelelő, ún. optimális értéknek választjuk. Ezt az optimális $l_{\text{opt.}}$ csapágytámaszközt acélanyagú tengelyre a következő harmadfokú egyenlet egyetlen pozitív gyöke szolgáltatja [7]:

$$l^3 - \frac{10^6 d^4}{1{,}62\, s_1 c} l - \frac{10^6 d^4}{1{,}62}\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) = 0 . \tag{1}$$



1. ábra

Ennek az egyenletnek egyetlen pozitív gyökét — az optimális csapágytámaszközt — mint a d, c, s_1 és s_2 paramétereknek a függvényét kívánjuk vizsgálni. E célból bevezetjük az (1) egyenletbe a következő rövidítő jelöléseket:

$$\frac{10^6}{1{,}62} = h \tag{2}$$

és

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \sigma , \tag{2'}$$

amelyekkel az (1) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$l^3 - \frac{hd^4}{s_1 c} l - hd^4 \sigma = 0 . \tag{1'}$$

Az (1') alatti harmadfokú egyenlet egyetlen pozitív gyökét (az optimális csapágytámaszközt) további vizsgálatainkhoz a Cardan-képlettel célszerű felírnunk (ld. [1, 2]), amihez tekintjük az egyenletnek következő *normált* alakját:

$$l^3 + 3\,pl + 2q = 0. \tag{1*}$$

Eszerint az (1') egyenletnek normált alakjában a p és q együtthatók a következő kifejezések:

$$p = -\frac{hd^4}{3\,s_1 c} \quad \text{és} \quad q = -\frac{hd^4\sigma}{2}. \tag{3}$$

Ha a normált egyenlet diszkriminánsa:

$$D = q^2 + p^3$$

pozitív, akkor az egyenletnek egy gyöke valós, a másik kettő komplex. Nálunk, amint azt majd a későbbiekben megmutatjuk, a tekintetbe jövő esetek túlnyomó többségében a diszkrimináns pozitív ($D > 0$) és így az (1') alatti l-ben harmadfokú egyenlet egyetlen pozitív valós gyökét az

$$l = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

Cardan-képlet szolgáltatja. Ide p és q (3) alatti értékeit beírva az optimáli csapágytámaszközre a következő kifejezést nyerjük:

$$l_{\text{opt.}} = \sqrt[3]{\frac{hd^4\sigma}{2} + \sqrt{\frac{h^2 d^8 \sigma^2}{4} - \frac{h^3 d^{12}}{27\, s_1^3 c^3}}} + \sqrt[3]{\frac{hd^4\sigma}{2} - \sqrt{\frac{h^2 d^8 \sigma^2}{4} - \frac{h^3 d^{12}}{27\, s_1^3 c^3}}}. \tag{4}$$

Innen az optimális csapágytámaszköz és a d tengelyátmérő viszonyára adódik, hogy:

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = \sqrt[3]{\frac{hd\sigma}{2} + \sqrt{\frac{h^2 d^2 \sigma^2}{4} - \frac{h^3 d^6}{27\, s_1^3 c^3}}} + \sqrt[3]{\frac{hd\sigma}{2} - \sqrt{\frac{h^2 d^2 \sigma^2}{4} - \frac{h^3 d^6}{27 s_1^3 c^3}}}. \tag{5}$$

Ha azokat a csapágyazásokat tekintjük, amelyeknél a mellső és hátsó csapágy merevsége egyenlő, tehát $s_1 = s_2 = s$, akkor (2') szerint

$$\sigma = \frac{2}{s},$$

amit az (5) alattiba írva az $l_{\text{opt.}}/d$ viszonyra ebben az esetben nyerjük, hogy:

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d}=\sqrt[3]{h\frac{d}{s}+\sqrt{h^2\left(\frac{d}{s}\right)^2-\frac{h^3}{27}\left(\frac{d}{s}\right)^3\left(\frac{d}{c}\right)^3}}+ \\ +\sqrt[3]{h\frac{d}{s}-\sqrt{h^2\left(\frac{d}{s}\right)^2-\frac{h^3}{27}\left(\frac{d}{s}\right)^3\left(\frac{d}{c}\right)^3}}\,. \tag{5'}$$

Az $l_{\text{opt.}}$ optimális csapágytámaszközre, illetve az $l_{\text{opt.}}/d$ viszonyra felírt (4) alatti, illetve (5) és (5′) alatti képletekből tételeket vezethetünk le az optimális csapágytámaszközre a következő III. fejezetben bebizonyítandó két lemma segítségével.

III. Két lemma bebizonyítása

1. lemma

Legyen a és b két pozitív szám és jelentsen x pozitív változót, akkor a

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-bx^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-bx^3}}\qquad\left(0\leq x\leq\frac{a^{2/3}}{\sqrt[3]{b}}\right)$$

kifejezés az x változónak monoton *növekvő* függvénye.

Bizonyítás. Differenciáljuk a $\varphi(x)$ kifejezést x szerint:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{bx^2}{2\sqrt{a^2-bx^3}}\left[\frac{1}{(a-\sqrt{a^2-bx^3})^{2/3}}-\frac{1}{(a-\sqrt{a^2-bx^3})^{2/3}}\right]=$$

$$=b^{1/3}\,\frac{(a+\sqrt{a^2-bx^3})^{2/3}-(a+\sqrt{a^2-bx^3})^{2/3}}{2\sqrt{a^2-bx^3}}\geqq 0\,.$$

Minthogy itt a számlálóban a kivonandó sohasem nagyobb, mint a kisebbítendő mert:

$$a+\sqrt{a^2-bx^3}\geqq a-\sqrt{a^2-bx^3}\,,$$

azért a számláló és ennélfogva a $\mathrm{d}\varphi(x)/\mathrm{d}x$ differenciálhányados sohasem negatív. Ez éppen azt mondja, hogy $\varphi(x)$ az x-nek monoton növekvő függvénye.

2. lemma

Ha a és b adott pozitív számok és x pozitív változó, akkor a

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{ax+\sqrt{a^2x^2-b}}+\sqrt[3]{ax-\sqrt{a^2x^2-b}}\qquad\left(x\geq\frac{\sqrt{b}}{a}\right)$$

kifejezés monoton *nő*, ha az x változó növekszik.

Bizonyítás. $\varphi(x)$ kifejezés x szerinti differenciálhányadosa:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{a+\dfrac{a^2x}{\sqrt{a^2x^2-b}}}{3\left(ax+\sqrt{a^2x^2-b}\right)^{2/3}}+\frac{a-\dfrac{a^2x}{\sqrt{a^2x^2-b}}}{3\left(ax-\sqrt{a^2x^2-b}\right)^{2/3}}=$$

$$=\frac{a}{3\sqrt{a^2x^2-b}}\left[\left(ax+\sqrt{a^2x^2-b}\right)^{1/3}-\left(ax-\sqrt{a^2x^2-b}\right)^{1/3}\right]\geqq 0\,.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség mindig fennáll, mivel a szögletes zárójelben álló kivonandó sohasem nagyobb, mint a kisebbítendő, amiből következik, hogy a $\varphi(x)$ differenciálhányadosa sohasem negatív és így $\varphi(x)$ az x-nek monoton *növekvő* függvénye.

IV. Tételek az optimális csapágytámaszközre egyező mellső és hátsó csapágymerevség esetében

1. tétel

Rögzített d tengelyátmérő és rögzített c konzolhossz esetében az $l_{opt.}$ optimális csapágytámaszköz csökken, ha a csapágymerevséget (s) növeljük.

Bizonyítás. A II. fejezet (5′) alatti képletében h megadott numerikus érték (ld. II. (2) alatt) és mivel most feltétel szerint a d és c is rögzített értékek, azért (5′) alattiban csak az s csapágymerevség változó. Ennek megfelelően vezessük be az (5′) alattiba az új x változót a következő összefüggés alapján:

$$s=\frac{1}{x^3}\,,\quad\left(x=\frac{1}{\sqrt[3]{s}}\right).$$

Vezessük be továbbá ugyancsak (5′)-be a következő jelöléseket:

$$hd=a$$

és

$$\frac{h^3}{27}\left(\frac{d}{c}\right)^3d^3=b\,,$$

ekkor (5′) a következő alakot nyeri:

$$\frac{l_{opt.}}{d}=\sqrt[3]{ax^3+\sqrt{a^2x^6-bx^9}}+\sqrt[3]{ax^3-\sqrt{a^2x^6-bx^9}}=$$

$$=x\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-bx^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-bx^3}}\right).$$

Mivel itt a kerek zárójelben álló kifejezés az 1. lemma szerint az x-nek monoton növekvő függvénye, azért nyilvánvaló, hogy annak x-szel való szorzata, vagyis az $l_{opt.}/d$ viszony is monoton növekvő függvénye az x-nek. Ebből következik — mivel a d rögzített érték —, hogy $l_{opt.}$ értéke csökken, amikor az x változó értéke csökken, vagyis az $s=1/x^3$ összefüggés alapján az s merevség növekszik. Tehát $l_{opt.}$ csökken, ha s növekszik, ami bebizonyítandó volt.

2. tétel

Rögzítsük a tengelyátmérő d és a csapágymerevség s értékét. Ekkor a c konzolhossz növelése az optimális csapágytámaszközt csökkenti.

Bizonyítás. A II. (5') alatti kifejezésben most d, s és h a rögzített értékek és a c konzolhossz a változó; tehát írhatjuk, hogy:

$$\frac{hd}{s} = a \quad \text{és} \quad \frac{h^3}{27}\left(\frac{d}{s}\right)^3 d^3 = b\,;$$

továbbá, hogy

$$c = \frac{1}{x}\,,$$

ahol x változó. Ezekkel (5') alatti

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - bx^3}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - bx^3}}\,,$$

ami az 1. lemma szerint az x-nek monoton növekvő függvénye. Eszerint $l_{\text{opt.}}/d$ csökken és így $l_{\text{opt.}}$ is csökken — a d ugyanis rögzített érték — ha x csökken, vagyis $x = 1/c$ folytán a c konzolhossz növekszik.

Az 1. és a 2. tétel folyománya a következő, 3. tétel.

3. tétel

Rögzített tengelyátmérő esetében a csapágymerevségnek, valamint a konzolhossznak a megnövelése csökkenti az optimális csapágytámaszközt.

Bizonyítás. Rögzített d tengelyátmérőnél legyen a csapágymerevség, és konzolhossz értéke s_0, ill. c_0, amelyeket $s_0 < s$-re, illetve $c_0 < c$-re akarunk megnövelni. Tekintsük először rögzített d-nél a c_0 konzolhosszat is rögzítettnek. Ekkor az s_0 merevséget s-re megnövelve az 1. tétel szerint csökken az optimális csapágytámaszköz. Ezután rögzített d-nél és rögzített s-nél a c_0 konzolhosszt növelve c-re a 2. tétel szerint csökken tovább az optimális támaszköz, ami bebizonyítandó volt.

Tekintsünk olyan csapágysorozatot, amelynél a csapágymerevség, az s arányos a d tengelyátmérővel (ld. [7]), tehát az s merevség lineáris függvénye a d-nek:

$$s = md.$$

Vezessük be a c konzolhossz és a d tengelyátmérő arányára a

$$\frac{c}{d} = \varkappa, \quad (\varkappa = 1, 2, 4, 8)\,;$$

jelölést; ekkor (5') szerint:

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = \sqrt[3]{\frac{h}{m} + \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 - \frac{h^3}{27}\frac{1}{(m\varkappa)^3}}} + \sqrt[3]{\frac{h}{m} - \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 - \frac{h^3}{27}\frac{1}{(m\varkappa)^3}}}.$$

Ebből a képletből látható, hogy a tekintetbe vett csapágysorozatra ($m =$ áll.) állandó

$$\varkappa = \frac{\text{konzolhossz}}{\text{tengelyátmérő}}$$

arány esetében az optimális csapágytámaszköz a d átmérőnek a lineáris függvénye. Tehát érvényes a következő, 4. tétel.

4. tétel

Ha valamely csapágysorozatra a csapágymerevség egyenesen arányos a d tengelyátmérővel (m = állandó), akkor a c konzolhossz és d tengelyátmérő állandó aránya (c/d = konst) esetében az optimális csapágytámaszköz a d átmérőnek *lineáris* függvénye.

V. Tételek az optimális csapágytámaszközre eltérő mellső- és hátsó csapágymerevség esetén

Tegyük fel most, hogy a mellső csapágy s_1 merevségével nem egyezik meg a hátsó csapágy s_2 merevsége, tehát

$$s_1 > s_2.$$

5. tétel

Ha a mellső csapágy s_1 merevsége egyenesen arányos a d tengelyátmérővel, akkor rögzített d átmérőre és rögzített c konzolhosszra az optimális csapágytámaszköz értéke csökken, ha a hátsó csapágy s_2 merevségét megnöveljük. Ha pedig rögzített s_2/s_1 viszony és rögzített c/d viszony esetére a d átmérőt növeljük, akkor az optimális csapágytámaszköz is növekszik.

Bizonyítás. Mivel $s_1 = md$ és $c/d = \varkappa$, ahol m és $\varkappa$ legyenek most rögzített értékek, az $l_{\text{opt.}}/d$ viszonynak az (5) alatti kifejezése a következő alakot nyeri:

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = \sqrt[3]{\frac{hd}{2}\sigma + \sqrt{\frac{h^2 d^2}{4}\sigma^2 - \frac{h^3}{27 m^3 \varkappa^3}}} + \sqrt[3]{\frac{hd}{2}\sigma - \sqrt{\frac{h^2 d^2}{4}\sigma^2 - \frac{h^3}{27 m^3 \varkappa^3}}},$$

ahol

$$\sigma = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{md} + \frac{1}{s_2}. \tag{6}$$

Mivel itt az 5. tétel feltételei szerint h, d, m és $\varkappa$ rögzített értekek, azért írhatjuk, hogy

$$\frac{hd}{2} = a \quad \text{és} \quad \frac{h^3}{27 m^3 \varkappa^3} = b,$$

a változó értékű σ-ra pedig — mivel (6) alatt az s_2 merevséget változónak tekintjük — vezessük be a $\sigma = x$ jelölést. Ezekkel a viszony kifejezése a következő alakot veszi fel:

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = \sqrt[3]{ax + \sqrt{a^2x^2 - b}} + \sqrt[3]{ax - \sqrt{a^2 x^2 - b}},$$

amelynek értéke a 2. lemma szerint csökken, ha a (6) alatti

$$\sigma = \frac{1}{md} + \frac{1}{s_2} = \varkappa$$

változó értéke csökken, vagyis az s_2 merevség növekszik. Mivel pedig d rögzített érték, azért $l_{opt.}$ értéke is csökken, ha s_2 növekszik. Ezzel az 5. tétel első részét bebizonyítottuk. Legyenek ezután az

$$\frac{s_2}{s_1} = \lambda \quad \text{és} \quad \frac{c}{d} = \varkappa$$

viszonyok a rögzített értékek. Ekkor $s_1 = md$ és $s_2 = \lambda s_1 = \lambda md$ szerint

$$\sigma = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\lambda m}\right) = \frac{1}{d}\,\frac{1+\lambda}{\lambda m},$$

amelyet, valamint az $s_1 = md$ és $c = \varkappa d$ értékeket az (5) alattiba behelyettesítve, az a következő alakot nyeri:

$$\frac{l_{opt.}}{d} = \sqrt[3]{\frac{h}{2}\,\frac{1+\lambda}{\lambda m} + \sqrt{\frac{h^2}{4}\,\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2 m^2} - \frac{h^3}{27}\,\frac{1}{m^3\varkappa^3}}} + \sqrt[3]{\frac{h}{2}\,\frac{1+\lambda}{\lambda m} - \sqrt{\frac{h^2}{4}\,\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2 m^2} - \frac{h^3}{27}\,\frac{1}{m^3\varkappa^3}}}\,. \qquad (6')$$

Mivel itt a gyökjel alatt csupa rögzített érték áll, azért

$$l_{opt.} = Cd,$$

ahol

$$C = \text{állandó};$$

vagyis $l_{opt.}$ növekszik, ha a d átmérő nő, rögzített $s_2/s_1 = \lambda$ és rögzített $c/d = \varkappa$ viszony esetében, amennyiben még a mellső csapágy s_1 merevsége egyenesen arányos a d tengelyátmérővel.

Ha az $l_{opt.}/d$ viszonyra (6′) alatt felírt képletben a $\varkappa = c/d$ viszonyt változónak, ellenben a $\lambda = s_2/s_1$ viszonyt rögzítettnek tekintjük, akkor az 1. lemmából következik, ha abban $x = 1/\varkappa^3$, hogy rögzített d esetében $l_{opt.}$ csökken, ha x csökken, azaz $\varkappa = c/d$ növekszik; vagy mivel d rögzített, a c növekszik. Tehát érvényes a következő, 6. tétel.

6. tétel

Ha a mellső csapágy merevsége: s_1 egyenesen arányos a d tengelyátmérővel, akkor rögzített $\lambda = s_2/s_1$ viszony és rögzített d átmérő esetében az $l_{opt.}$ csökken, ha a c konzolhossz növekszik.

Hasonlóképpen, ha (6′) alattiban a $\varkappa = c/d$ és az $m = s_1/d$ a rögzített értékek, ellenben a $\lambda = s_2/s_1$ viszony változó, akkor az

$$\frac{1+\lambda}{\lambda} = 1 + \frac{1}{\lambda} = x$$

jelölést bevezetve a 2. lemmából következik a

7. tétel

Az $l_{otp.}/d$ viszony értéke csökken, ha a $\varkappa = c/d$ viszony és az $m = s_1/d$ viszony értéke rögzített, ellenben a $\lambda = s_2/s_1$ viszony értékét megnöveljük.

Végül az 1. lemma alkalmazásával adódik a

8. tétel

Ha a $\lambda = s_2/s_1$ viszony és $\varkappa = c/d$ viszony értéke rögzítettek, akkor az $l_{opt.}/d$ viszony értéke csökken, ha az $m = s_1/d$ viszony értékét megnöveljük.

VI. Az optimális csapágytámaszköz és a tengelyátmérő $l_{opt.}/d$ viszonyának értékváltozási tartománya

Az előzőkben láttuk, hogy az $m = s_1/d$ paraméterviszony értékének a növelésekor az $l_{opt.}/d$ viszony értéke csökken (8. tétel), és ugyanez következik be akkor is, ha az s_2/s_1 viszony értékét növeljük (7. tétel). Ezzel kapcsolatban azt kérdezzük, hogy mi az optimális csapágytámaszköz és a d tengelyátmérő $l_{opt.}/d$ viszonynak a lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke. Az előzőkben már utaltunk arra, hogy az (1′) alatti harmadfokú egyenletnek egyetlen pozitív gyöke, vagyis az $l_{opt.}$ abban az esetben írható fel valós alakban a Cardan-képlettel, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív, tehát:

$$q^2 + p^3 \geqq 0.$$

Ide p és q (3) alatti jelentését beírva azt kapjuk, hogy abban az esetben, amikor az optimális csapágytámaszköz a Cardan-képlettel felírható, teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségnek:

$$\frac{\sigma^2}{4} \geqq \frac{hd^4}{27\, s_1^3 c^3};$$

vagy mivel $s_1 \geqq s_2$ és így (2′) szerint

$$\sigma = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \geqq \frac{2}{s_1},$$

fenn kell állnia a következő egyenlőtlenségnek:

$$\frac{1}{s_1^2} \geqq \frac{hd^4}{27\, s_1^3 c^3},$$

ahonnan

$$1 \geqq \frac{hd^4}{27\, s_1 c^3}.$$

Ide a $c/d = \varkappa$ és $s_1/d = m$ jelölést bevezetve és h (2) alatti értékét beírva, azt kapjuk, hogy $\varkappa$ és m minden lehetséges értékére teljesülnie kell az

$$m \geqq \frac{10^6}{27 \times 1{,}62 \cdot \varkappa^3}$$

egyenlőtlenségnek. Mivel az egyenlőtlenség jobb oldalának lehetséges legnagyobb értéke $\varkappa = 1$-re: $10^6/27 \times 1{,}62$, azért az egyenlőtlenség bal oldalán álló $m = s_1/d$ arány legkisebb értéke a következő lehet:

$$m = \frac{10^6}{27 \times 1{,}62} = 22\,862 .$$

Ez az érték valóban megfelel a [3] cikkben levezetett „*az esetek túlnyomó többségében fennálló*" [3] (11) alatti egyenlőtlenségnek, anely $c^3 s/d^4 = \varkappa^3 m$-re a

$$\varkappa^3 m > 22\,900$$

alsó korlátot adja meg. Ezek szerint a Cardan-képlettel az optimális csapágytámaszközt minden tekintetbe jövő esetben elő tudjuk állítani.

Mivel a 3. tétel szerint rögzített d tengelyátmérőnél a csapágymerevségnek ($s_1 = s_2$), valamint a konzolhossznak, a c-nek csökkentése növeli az $l_{\text{opt.}}$ optimális csapágytámaszközt, azért $l_{\text{opt.}}$ és $l_{\text{opt.}}/d$ is a lehetséges legnagyobb értéket akkor éri el, amikor $\varkappa$ és m a lehető legkisebb, vagyis

$$\varkappa = 1 \quad \text{és} \quad m = 22\,862.$$

Ebben az esetben az (1′) egyenlet diszkriminánsa nulla, amikor is az (5′) kifejezésben a négyzetgyökjel alatti differencia eltűnik és (5′) a következő egyszerű alakot ölti fel:

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = 2\sqrt[3]{h\frac{d}{s}} = 2\sqrt[3]{\frac{h}{m}};$$

ide $h = 10^6/1{,}62$ és $m = 10^6/27 \times 1{,}62$ értékét beírva

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = 2\sqrt[3]{27} = 6,$$

tehát

$$\max \frac{l_{\text{opt.}}}{d} = 6 .$$

Az $l_{opt.}/d$ lehetséges legkisebb értékét meg akkor kapjuk meg, amikor $\varkappa$ és $m = s_1/d$ a lehető legnagyobb, vagyis [7] szerint

$$\varkappa = 8$$

és

$$m = s_1/d = 230\,000.$$

Ezekkel az (5′)-ből a legkisebb $l_{opt.}/d$-re nyerjük, hogy:

$$\frac{l_{opt.}}{d} = \sqrt[3]{\frac{10^6}{1{,}62}\frac{1}{23\cdot 10^4} + \sqrt{\left(\frac{10^6}{1{,}62}\right)^2\frac{1}{23^2 10^8} - \frac{10^{18}}{1{,}62^3}\frac{1}{27}\frac{1}{23^3\cdot 10^{12}}\frac{1}{8^3}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{10^6}{1{,}62}\frac{1}{23\cdot 10^4} - \sqrt{\left(\frac{10^6}{1{,}62}\right)^2\frac{1}{23^2 10^8} - \frac{10^{18}}{1{,}62^3}\frac{1}{27}\frac{1}{23^3\cdot 10^{12}}\frac{1}{8^3}}} =$$

$$= \sqrt[3]{5{,}3673} + \sqrt[3]{0{,}0003} = 1{,}7508 + 0{,}0669 \approx 1{,}8.$$

Tehát az $m = s_1/d$ viszony növelése, vagyis rögzített d esetében az s_1 merevség növelése ($s_2 = s_1$ esetében) lényegesen csökkenti az $l_{opt.}/d$ viszony értékét. A továbbiakban részletes vizsgálatnak vetjük alá az $l_{opt.}/d$ csökkenésének a mértékét abban az esetben, amikor az $s = s_1 = s_2$ csapágymerevség növekszik.

VII. Az $l_{opt.}/d$ kifejezés sorbafejtése

Mivel az (1′) alatti harmadfokú egyenlet normált alakjában (1*) alattiban (3)-szerint az elsőfokú tag és az állandó tag is negatív, azaz

$$p < 0, \text{ és } q < 0,$$

azért az $l_{opt.}$ gyöknek a Cardan-képlettel való előállítása a következő formában is felírható:

$$l_{opt.} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{|q| + \sqrt{q^2 - |p|^3}} + \sqrt[3]{|q| - \sqrt{q^2 - |p|^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{|q|}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{|p|^3}{q^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{|p|^3}{q^2}}}\right). \qquad (7)$$

Legyen itt rövidség kedvéért

$$\sqrt{1-\frac{|p|^3}{q^2}}=a$$

és határozzuk meg a (7) alatti kerek zárójelben található

$$\sqrt[3]{1+a}+\sqrt[3]{1-a}$$

összegnek a szerinti sorbafejtését. Az általános binomiális tétel szerint:

$$\sqrt[3]{1+a}=1+\binom{1/3}{1}a+\binom{1/3}{2}a^2+\binom{1/3}{3}a^3+\binom{1/3}{4}a^4+\ldots$$

$$\sqrt[3]{1-a}=1-\binom{1/3}{1}a+\binom{1/3}{2}a^2-\binom{1/3}{3}a^3+\binom{1/3}{4}a^4-\ldots$$

A megfelelő oldalakat összeadva:

$$\sqrt[3]{1+a}+\sqrt[3]{1-a}=2\left[1+\binom{1/3}{2}a^2+\binom{1/3}{4}a^4+\binom{1/3}{6}a^6+\ldots\right].$$

A binomiális együttható abszolút értékét C_k-val jelölve, mivel értéke páros k-ra negatív, azért írhatjuk, hogy

$$\binom{1/3}{2i}=-C_{2i}\quad(i=1,2,3,\ldots);$$

amit az előbbi sorfejtésbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{1+a}+\sqrt[3]{1-a}=2\,(1-C_2a^2-C_4a^4-C_6a^6-\ldots),\tag{7'}$$

ahol az együtthatók számértékei:

$$C_2=\frac{1}{9};\ C_4=\frac{10}{243};\ C_6=\frac{154}{6561};\ \ldots$$

(7′) hatványsorban a hatványalap:

$$a=\sqrt{1-\frac{|p|^3}{q^2}},$$

ahová p és q (3) alatti értékeit beírva, továbbá figyelemmel arra, hogy $s_1 = s_2$ esetében: $\sigma = 2/s_1$, az a-ra adódik, hogy

$$a = \sqrt{1 - \frac{h}{27}\left(\frac{d}{c}\right)^3 \frac{d}{s_1}},$$

vagy a $c/d = \varkappa$ és $s_1/d = m$ jelölésekkel:

$$a = \sqrt{1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}}.$$

Ezt az a értéket a (7') alatti jobb oldalába beírva és figyelembe véve azt, hogy (7') a (7) alatti jobb oldalán a kerek zárójelben álló kifejezéssel egyenlő, a (7) alatti alapján az $l_{\text{opt.}}/d$ aránynak a következő végtelen sorba fejtett alakját nyerjük:

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = 2\sqrt[3]{\frac{h}{m}}\left[1 - C_2\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right) - C_4\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - C_6\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^3 - \ldots\right], \qquad (8)$$

ahol a C_{2i} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ együtthatók a binomiális együtthatók abszolút értékével egyenlők:

$$C_2 = \frac{1}{9};\; C_4 = \frac{10}{243};\; C_6 = \frac{154}{6561};\ldots$$

A (8) alatti előállításból nyomban látható, hogy ha $m = s_1/d$ növekszik, akkor a zárójelben álló hatványsor negatív részének az abszolút értéke is nő és így $l_{\text{opt.}}/d$ csökken; vagyis rögzített d-re, ha s_1 növekszik, akkor az $l_{\text{opt.}}/d$ viszony és így az $l_{\text{opt.}}$ támaszköz is csökken, ha a c konzolhossz értéke nem és így a $\varkappa$ sem csökken (3. tétel).

VIII. Az $l_{\text{opt.}}/d$ kifejezés értékváltozásának a vizsgálata

Növeljük meg az $s = s_1 = s_2$ csapágymerevséget, vegyünk tehát az s helyett $(k \cdot s)$ merevséget, ahol $k > 1$. Ekkor a (1') alatti egyenletnek az alakja, amely most $s_1 = s_2 = s$ folytán a következő:

$$l^3 - \frac{hd^4}{sc}\, l - \frac{2\,hd^4}{s} = 0, \qquad (1'')$$

így módosul:

$$l^3 - \frac{hd^4}{ks \cdot c} l - \frac{2\,hd^4}{ks} = 0 \,. \quad (k > 1)$$

Most már, ha l az előbbi (1″) alatti egyenletnek egyetlen pozitív gyöke, akkor az utóbb felírt egyenlet egyetlen pozitív gyöke, mivel $k > 1$, nyilván kisebb mint l, vagyis ennek a gyöknek az értéke:

$$\vartheta l,$$

ahol

$$0 < \vartheta < 1.$$

Tehát

$$(\vartheta l)^3 - \frac{hd^4}{ks \cdot c} \vartheta l - \frac{2\,hd^4}{k \cdot s} = 0 \,.$$

Mivel ennek a ϑ-ban harmadfokú egyenletnek normált alakja:

$$\vartheta^3 - \frac{hd^4}{ks \cdot cl^2} \vartheta - \frac{2\,hd^4}{k \cdot sl^3} = 0 \,,$$

azért a ϑ gyöknek a kifejezése a Cardan-képlettel — azaz (7) szerint — mivel

$$p = - \frac{hd^4}{3\,kscl^2} \quad \text{és} \quad q = - \frac{hd^4}{ksl^3}$$

a következő:

$$\vartheta = \sqrt[3]{\frac{hd^4}{k \cdot s \cdot l^3}} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{hd^4}{27\,ksc^3}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{hd^4}{27\,ksc^3}}} \right).$$

Ha ide bevezetjük az előbbi $c/d = \varkappa$ és $s_1/d = m$ jelöléseket, akkor:

$$\vartheta = \frac{d}{l} \sqrt[3]{\frac{h}{km}} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{h}{27\,km\varkappa^3}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{h}{27\,km\varkappa^3}}} \right).$$

Itt a zárójelben álló kifejezés végtelen sorba fejtett alakját a (7′) alatti szolgáltatja, ha ott:

$$a = \sqrt{1 - \frac{h}{27\,k\varkappa^3 m}} \,.$$

Eszerint:

$$\vartheta = \frac{d}{l} \sqrt[3]{\frac{h}{km}}\, 2 \left[1 - C_2 \left(1 - \frac{h}{27\,\varkappa^3 mk}\right) - C_4 \left(1 - \frac{h}{27\,\varkappa^3 mk}\right)^2 - \ldots\right].$$

Ha ide l/d (8) alatti kifejezését beírjuk ($l_{\text{opt.}} = l$), akkor végül ϑ-ra a következő előállítást nyerjük:

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \; \frac{1 - C_2 \left(1 - \dfrac{h}{27\,\varkappa^3 mk}\right) - C_4 \left(1 - \dfrac{h}{27\,\varkappa^3 mk}\right)^2 - \ldots}{1 - C_2 \left(1 - \dfrac{h}{27\,\varkappa^3 m}\right) - C_4 \left(1 - \dfrac{h}{27\,\varkappa^3 m}\right)^2 - \ldots}\,.$$

Tehát, ha az $s_1 = s_2 = s$ csapágymerevséget a k-szorosára növeljük ($k > 1$), akkor az optimális csapágytámaszköz a ϑ-szorosára csökken, ahol ϑ valódi tört, mert az előbbi végtelen soros előállításban a számlálóban álló végtelen sorban az 1 után álló negatív rész abszolút értéke nagyobb, mint a nevezőben az 1 után álló negatív rész abszolút értéke. Ennek a ϑ valódi törtnek az értékére akarunk becsléseket végezni a továbbiakban, ahol alkalmazni fogunk egy a következő IX. fejezetben bebizonyítandó általános egyenlőtlenséget.

IX. Egy általános egyenlőtlenség bebizonyítása

Jelentsen $\varkappa$ és k két olyan pozitív számot, amelyre:

$$\varkappa \geq 1 \text{ és } k \geq 1;$$

jelölje továbbá C_i a binomiális együttható abszolút értékét, tehát

$$C_i = \left| \binom{1/3}{i} \right|.$$

Ekkor mindig fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1 - C_2 \left(1 - \dfrac{1}{\varkappa k}\right) - C_4 \left(1 - \dfrac{1}{\varkappa k}\right)^2 - C_6 \left(1 - \dfrac{1}{\varkappa k}\right)^3 \ldots}{1 - C_2 \left(1 - \dfrac{1}{\varkappa}\right) - C_4 \left(1 - \dfrac{1}{\varkappa}\right)^2 - C_6 \left(1 - \dfrac{1}{\varkappa}\right)^3 - \ldots} \geq$$
$$\geq 1 - C_2 \frac{k-1}{k} - C_4 \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 - C_6 \left(\frac{k-1}{k}\right)^3 - \ldots\,. \tag{9}$$

Bebizonyítjuk, hogy a (9) bal oldalán álló törtkifejezés, amely $\varkappa$-nak a függvénye, legkisebb értékét $\varkappa = 1$-re veszi fel, amivel a (9) alatti egyenlőtlenség is igazolást nyer, mivel (9)-nek a bal oldala $\varkappa = 1$-re éppen az egyenlőtlenségnek a jobb oldalával egyenlő.

Vezessük be (9) alatti egyenlőtlenségbe az

$$x = 1 - \frac{1}{\varkappa}$$

új változót, amely a (0; 1) intervallumban változik, ha $\varkappa$ befutja az (1; ∞) intervallumot. Ekkor (9) alatti a következő alakot ölti:

$$\frac{1 - C_2 \dfrac{k-1+x}{k} - C_4 \left(\dfrac{k-1+x}{k}\right)^2 - C_6 \left(\dfrac{k-1+x}{k}\right)^3 - \ldots}{1 - C_2 x - C_4 x^2 - C_6 x^3 - \ldots} \geqq$$

$$\geqq 1 - C_2 \frac{k-1}{k} - C_4 \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 - C_6 \left(\frac{k-1}{k}\right)^3 - \ldots. \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

Ha az egyenlőtlenség bal oldalán álló törtkifejezés nevezőjét mint x-nek a függvényét $F(x)$-szel jelöljük:

$$F(x) = 1 - C_2 x - C_4 x^2 - C_6 x^3 - \ldots - C_{2k} x^k - \ldots,$$

akkor a bebizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\frac{F\left(\dfrac{k-1+x}{k}\right)}{F(x)} \geqq F\left(\frac{k-1}{k}\right). \tag{9'}$$

Ha ennek a (9')-nek a bal oldaláról megmutatjuk, hogy annak értéke monoton nő, ha az x 0-tól 1-ig változik, akkor a (9') egyenlőtlenség is igazolást nyer, mert $x = 0$-ra a (9') bal oldala — minthogy $F(0) = 1$ — éppen $F[(k-1)/k]$-val, vagyis a (9') jobb oldalával egyenlő.

Írjuk fel a (9') bal oldalának számlálójában álló függvény argumentumát a következő alakban:

$$\frac{k-1+x}{k} = x + h,$$

ahol

$$h = \frac{k-1}{k}(1-x).$$

Ezt a (9') alatti egyenlőtlenségbe beírva, az a következő alakot nyeri:

$$\frac{F(x+h)}{F(x)} \geq F\left(\frac{k-1}{k}\right), \tag{9''}$$

ahol

$$h = \frac{k-1}{k}(1-x); \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Az előbbiek szerint azt fogjuk megmutatni, hogy (9'') bal oldala, vagyis az

$$\frac{F(x+h)}{F(x)}$$

törtkifejezés monoton nő, ha x növekszik 0-tól 1-ig. Ennek bebizonyításához vizsgálni fogjuk a

$$h \cdot \frac{F'(x)}{F(x)} \quad \text{és} \quad h = \frac{k-1}{k}(1-x)$$

kifejezés abszolút értékének a változását, ha x növekszik 0-tól 1-ig. Ennél a vizsgálatnál alkalmazást nyer a következő:

Segédtétel. A negatív

$$h\,\frac{F'(x)}{F(x)}$$

kifejezés abszolút értéke csökken, ha x növekszik 0-tól 1-ig, ahol

$$h = \frac{k-1}{k}(1-x).$$

Bizonyítás. A (7') alatti kifejtés szerint, ha abban $a = \sqrt{x}$, az $F(x)$ függvény a következő elemi alakban írható fel:

$$F(x) = 1 - C_2 x - C_4 x^2 - C_6 x^3 - \ldots = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{2}$$

Eszerint $F(x)$ x szerinti deriváltja:

$$F'(x) = -\frac{(1+\sqrt{x})^{2/3} - (1-\sqrt{x})^{2/3}}{12\sqrt{x}\,(1-x)^{2/3}}$$

és így az

$$F(x) = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{2}$$

előállítás figyelembevételével a vizsgálandó kifejezés:

$$h\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{k-1}{6k}\sqrt[3]{-x}\,\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \tag{9*}$$

ahol

$$h = \frac{k-1}{k}(1-x).$$

Ebből látható, hogy $h \cdot F'(x)/F(x)$ negatív, ha $0 < x < 1$. A (9*) alattiban a jobb oldalon álló:

$$\sqrt[3]{1-x}\,\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

kifejezésbe vezessük be az

$$y = \sqrt{x}$$

új változót:

$$\sqrt[3]{1-y^2}\,\frac{\sqrt[3]{1+y}-\sqrt[3]{1-y}}{y}. \tag{10}$$

Legyen itt röviden

$$\sqrt[3]{1+y} = a, \quad \sqrt[3]{1-y} = b$$

és az

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

identitásból adódó

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

összefüggésbe írjuk be a és b előbb megadott értékét. Ekkor

$$\sqrt[3]{1+y}-\sqrt[3]{1-y} = \frac{2y}{\sqrt[3]{(1+y)^2}+\sqrt[3]{1-y^2}+\sqrt[3]{(1-y)^2}}.$$

Ezt a (10) alattiban álló törtkifejezés számlálójába behelyettesítve, a (10) alatti értéke:

$$\sqrt[3]{1-y^2}\,\frac{\sqrt[3]{1+y}-\sqrt[3]{1-y}}{y} = \sqrt[3]{1-y^2}\,\frac{2}{\sqrt[3]{(1+y)^2}+\sqrt[3]{1-y^2}+\sqrt[3]{(1-y)^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{1+y}{1-y}}+1+\sqrt[3]{\frac{1-y}{1+y}}}.$$

Ha ide bevezetjük az

$$u = \sqrt[3]{\frac{1+y}{1-y}}$$

új változót, akkor a (10) alatti kifejezésre a következő előállítást nyerjük:

$$\sqrt[3]{1-y^2}\,\frac{\sqrt[3]{1+y}-\sqrt[3]{1-y}}{y} = \frac{2}{u+1+\frac{1}{u}}.$$

Most már, ha itt az u változik 1-től ∞-ig, akkor y változik 0-tól 1-ig, és mivel a nevező u szerinti differenciálhányadosa:

$$\frac{d}{du}\left(u+1+\frac{1}{u}\right) = 1-\frac{1}{u^2}$$

pozitív, ha $1 < u < \infty$, azért a nevező értéke növekszik, ha u 1-től ∞-ig nő. Ez a (10) alatti előállítás értelmében azt mondja, hogy a (10) alatti, vagyis a (9*) alatti jobb oldalának abszolút értéke csökken, ha x 0-tól 1-ig növekszik. Tehát, ha x' valamilyen, az x-nél nagyobb értéket (de valódi törtet) jelent, vagyis

$$0 < x < x' < 1$$

és

$$h' = (1-x')\frac{k-1}{k},$$

akkor (9*) alattira fennáll, hogy

$$\frac{h|F'(x)|}{F(x)} > \frac{h'|F'(x')|}{F(x')} \tag{11}$$

és ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

Visszatérve ezután az $F(x+h)/F(x)$ kifejezés vizsgálatához

$$h = \frac{k-1}{k}(1-x),$$

amelyről azt akarjuk bebizonyítani, hogy értéke nő, ha x nő 0-tól 1-ig, határozzuk meg e kifejezés differenciálhányadosát:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x+h)}{F(x)}\right] = \frac{F'(x+h)\dfrac{d(x+h)}{dx}F(x) - F'(x)\cdot F(x+h)}{[F(x)]^2}; \quad \left[h = \frac{k-1}{k}(1-x)\right].$$

Erről a differenciálhányadosról megmutatjuk, hogy annak értéke mindig pozitív, ha $0 < x < 1$. Mivel a h definíciója szerint az előbbi kifejezés számlálójában fellépő differenciálhányados értéke:

$$\frac{d(x+h)}{dx} = 1 - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k};$$

továbbá az $F'(x)$ derivált értéke az

$$F(x) = 1 - C_2x - C_4x^2 - C_6x^3 - \dots$$

sorelőállítás szerint mindig negatív, azért a vizsgált differenciálhányados, azaz

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x+h)}{F(x)}\right)$$

számlálóját a következő alakban is felírhatjuk:

$$F'(x+h)\frac{d(x+h)}{dx}F(x) - F'(x)F(x+h) = -|F'(x+h)|\frac{1}{k}F(x) + |F'(x)|F(x+h).$$

A számlálónak ez a kifejezése pedig akkor pozitív, ha

$$|F'(x)|F(x+h) > |F'(x+h)|\frac{1}{k}F(x),$$

vagyis, ha fennáll, hogy:

$$\frac{|F'(x)|}{F(x)} > \frac{1}{k}\frac{|F'(x+h)|}{F(x+h)}. \tag{12}$$

De az előbbiekben bebizonyított segédtétel szerint, azaz a (11) alatti egyenlőtlenség szerint, ha abban $x' = x + h$, fennáll, hogy

$$\frac{|F'(x)|}{F(x)} > \frac{h'}{h} \frac{|F'(x+h)|}{F(x+h)} .$$

Így a (12) alatti is teljesül, amikor

$$\frac{h'}{h} \geqq \frac{1}{k}$$

vagy tekintettel h és h' jelentésére

$$\left[h = (1-x)\frac{k-1}{k} ;\ h' = (1-x')\frac{k-1}{k}\right],$$

ha

$$\frac{1-x'}{1-x} \geqq \frac{1}{k} .$$

Ez szélső esetben, amikor az egyenlőség jele érvényes, azaz:

$$\frac{1-x'}{1-x} = \frac{1}{k}$$

éppen azt jelenti, hogy

$$x' = \frac{k-1+x}{k} = x + \frac{k-1}{k}(1-x) = x+h ;\ 0 \leqq x \leqq 1 ,$$

vagyis hogy az x-nél nagyobb x' értéket a (0; 1) intervallumból választottuk, tekintettel arra, hogy fennáll az

$$x' = \frac{k-1+x}{k} \leqq 1$$

egyenlőtlenség, ha

$$x \leqq 1 .$$

Ezzel azt mutattuk meg, hogy a (9′) alatti bal oldalán álló függvény x szerinti differenciálhányadosa mindig pozitív és ennélfogva e függvény monoton növekszik, ha x 0-tól 1-ig változik. Ezzel a (9′) alatti egyenlőtlenség helyessége is igazolást nyert, és maga a (9) alatti egyenlőtlenség is, ami bebizonyítandó volt.

X. Az optimális csapágytámaszköz csökkenésének a becslése, a csapágymerevség növelésénél

A VIII. fejezetben levezettük, hogy ha az $s_1 = s_2 = s$ csapágymerevséget a k-szorosára növeljük ($k > 1$), akkor az $l_{\text{opt.}}$ optimális csapágytámaszköz a $(\vartheta \cdot l_{\text{opt.}})$-ra csökken, ahol a ϑ tört értéke:

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \frac{1 - C_2\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 mk}\right) - C_4\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 mk}\right)^2 - C_6\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 mk}\right)^3 - \ldots}{1 - C_2\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right) - C_4\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^2 - C_6\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^3 - \ldots} .$$

Ennek az 1-nél kisebb ϑ faktornak az értékére akarunk becslést végezni és ehhez abból az esetből indulunk ki, amikor a ϑ előbbi végtelensoros előállításában az $m = s_1/d$ viszonyszám értéke a lehető legkisebb. Ez azt jelenti, hogy a lehető legkisebb s_1 csapágymerevséget tekintjük és ezt a merevséget növeljük majd meg a k-szorosára. A VI. fejezet meggondolásai szerint az $m = s_1/d$ arány legkisebb lehetséges értéke:

$$m = \frac{10^6}{27 \cdot 1{,}62}.$$

Erre az m értékre a ϑ előbbi végtelensoros előállításában, a nevezőben a kerek zárójelekben fellépő

$$\frac{h}{27\varkappa^3 m}$$

kivonandó értéke — mivel $h = 10^6/1{,}62$ — a következőképp egyszerűsödik:

$$\frac{h}{27\,\varkappa^3\, m} = \frac{\dfrac{10^6}{1{,}62}}{27\,\varkappa^3 \dfrac{10^6}{27 \cdot 1{,}62}} = \frac{1}{\varkappa^3}.$$

Eszerint az m lehetséges legkisebb értékére a ϑ előbbi előállítása a következő alakú lesz:

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \cdot \frac{1 - C_2\left(1 - \dfrac{1}{\varkappa^3 k}\right) - C_4\left(1 - \dfrac{1}{\varkappa^3 k}\right)^2 - C_6\left(1 - \dfrac{1}{\varkappa^3 k}\right)^3 - \ldots}{1 - C_2\left(1 - \dfrac{1}{\varkappa^3}\right) - C_4\left(1 - \dfrac{1}{\varkappa^3}\right)^2 - C_6\left(1 - \dfrac{1}{\varkappa^3}\right)^3 - \ldots}.$$

Itt $\varkappa = 1, 2, 4, 8$ és így $\varkappa^3 \geq 1$, vagyis $\varkappa^3$ olyan változó, amelynek értéke nagyobb mint 1. Ezért a $\varkappa^3$ hatványt egyszerűen $\varkappa$-val jelölve, ahol $\varkappa \geq 1$, a ϑ előbb felírt előállításában az $1/\sqrt[3]{k}$ mellett álló törtkifejezés a (9) alatti egyenlőtlenségnek a bal oldalával lesz azonos és így (9) alatti egyenlőtlenségnek a jobb oldala ϑ-ra a következő alsó korlátot szolgáltatja:

$$\vartheta \geq \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\left[1 - C_2\frac{k-1}{k} - C_4\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 - C_6\left(\frac{k-1}{k}\right)^3 - \ldots\right].$$

Ebben az előállításban fellépő végtelen sor értéke (7′) szerint, ha abban

$$a = \sqrt{\frac{k-1}{k}},$$

a következő elemi alakban írható fel:

$$1-C_2\left(\frac{k-1}{k}\right)-C_4\left(\frac{k-1}{k}\right)^2-C_6\left(\frac{k-1}{k}\right)^3-\ldots=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}}}{2}.$$

Ezzel az alsó korlát, amelyet $K(k)$-val jelölünk:

$$\vartheta\geq\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\,\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}}}{2}=K(k).$$

Az alsó korlátnak a végtelensoros előállításából közvetlenül látható, hogy az legkisebb értékét k-nak a lehetséges legnagyobb értékére veszi fel, amely [7] szerint: $k = 8$. Erre a k-ra a legkisebb alsó korlát:

$$K(8) = 0{,}412.$$

$k = 2$-re az alsó korlát:

$$K(2) = 0{,}7378$$

és $k = 4$-re

$$K(4) = 0{,}5489.$$

A $(\vartheta l_{\mathrm{opt.}})$-ra csökkent optimális támaszközre a csökkenés mértéke:

$$\frac{l_{\mathrm{opt.}}-\vartheta l_{\mathrm{opt.}}}{l_{\mathrm{opt.}}}=(1-\vartheta)\,100\%,$$

amelynek legnagyobb értéke nyilván akkor lép fel, amikor ϑ éppen az alsó korláttal egyenlő. Eszerint, ha az s_1 csapágymerevséget $k = 2$-szeresére, $k = 4$-szeresére, illetve $k = 8$-szorosára növeljük, akkor az optimális csapágytámaszköz a közöltek szerint hosszának a

$$[1-K(2)]100=(1-0{,}7378)100=26,$$

$$[1-K(4)]100=(1-0{,}5489)100=45,$$

illetve $$[1-K(8)]100=(1-0{,}4120)100=58{,}8$$

%-ával csökkenhet.

Tehát ha a csapágymerevséget $p\%$-kal megnöveljük, akkor ha $p \leq 100$, az optimális támaszköz hosszának kb. 1/3-ával fog csökkenni ($k = 2$ eset).

XI. A csapágymerevségek viszonyának befolyása az optimális csapágytámaszköz értékére eltérő mellső, illetve hátsó csapágymerevség esetén

Tegyük fel most, hogy a főorsó hátsó csapágyának merevsége nem egyezik meg a mellső csapágy merevségével. Tehát legyen a mellső csapágy merevsége s_1, a hátsó csapágyé s_2 és

$$s_1 > s_2.$$

Vezessük be a két merevség viszonyára az

$$\frac{s_2}{s_1} = k \qquad (0 < k < 1)$$

jelölést; ennek megfelelően a hátsó csapágy merevsége:

$$s_2 = ks_1.$$

A két különböző csapágymerevség esetében az optimális csapágytámaszköz értéke a (4) alatti képletből határozható meg. Írjuk be ebbe a képletbe az

$$s_2 = ks_1,$$

$$s_1 = md$$

és

$$c = \varkappa d$$

értékeket, akkor az optimális csapágytámaszközre a következő előállítást nyerjük:

$$l_{\text{opt.}} = d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{27} \frac{h}{m\varkappa^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{27} \frac{h}{m\varkappa^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2}}} \right\}.$$

Mivel a harmadfokú egyenletnek (amelynek gyöke az $l_{\text{opt.}}$) a normált alakjában [(1*) alattiban] az állandó tag kifejezése most:

$$2q = -\frac{hd^3}{m}\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

azért az állandó tag abszolút értéke csökken, ha a $k = s_2/s_1$ viszonyszám növekszik. Ebben az esetben az egyenlet pozitív valós gyökének az értéke is csökken. Tehát ha a k viszony növekszik, akkor az optimális csapágytámaszköz csökken. Vagy fordítva, ha a hátsó csapágy s_2 merevsége csökken a mellsőhöz viszonyítva, akkor az optimális csapágytámaszköz növekszik. Vizsgáljuk meg ennek a változásnak a mértékét és e célból vezessük be k helyett az

$$u = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{k}}$$

új változót. Ekkor az optimális támaszköz előbbi képlete:

$$l_{\text{opt.}} = d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}}\, u \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{27} \frac{h}{m\varkappa^3} \frac{1}{u^6}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{27} \frac{h}{m\varkappa^3} \frac{1}{u^6}}} \right\}. \quad (12')$$

Ha u értéke nő, vagyis k csökken, akkor $l_{\text{opt.}}$ is nő (mert a harmadfokú egyenlet konstans tagjának abszolút értéke, $2|q|$ is növekszik). Vizsgáljuk az $l_{\text{opt.}}$ növekedésének a mértékét, ha k értéke csökken 1-től 0,5-ig, vagyis u növekszik $\sqrt[3]{2}$-től $\sqrt[3]{3}$-ig.

Először tekintsük azt az esetet, amikor a konzol hosszú, vagyis $\varkappa$ *nagy*, tehát $\varkappa = 8$. Ebben az esetben, mivel m-re fennáll, hogy

$$m \geq \frac{10^6}{27 \cdot 1{,}62},$$

továbbá

$$h = \frac{10^6}{1{,}62},$$

azért az $l_{\text{opt.}}$ (12′) kifejezésében a négyzetgyökjel alatt az 1 után álló törtre a következő felső korlátot írhatjuk fel:

$$\frac{4}{27} \frac{h}{m\varkappa^3} \frac{1}{u^6} \leq \frac{4}{27} \frac{10^6}{1{,}62} \frac{27 \cdot 1{,}62}{10^6 \varkappa^3} \frac{1}{u^6} = \frac{4}{\varkappa^3} \frac{1}{u^6} \leq \frac{4}{8^3} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{512} = 0{,}00195 .$$

Mivel ez kis érték, azért az $l_{\text{opt.}}$ kifejezésében a négyzetgyök értéke 1-nek vehető, és $l_{\text{opt.}}$-ra írhatjuk, hogy

$$l_{\text{opt.}} = d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \cdot u \sqrt[3]{2}.$$

Ennélfogva az $l_{\text{opt.}}$ növekedésének a mértékét, ha u változik $\sqrt[3]{2}$-től $\sqrt[3]{3}$-ig, a következő törtkifejezés adja meg:

$$\frac{d\sqrt[3]{\frac{h}{2m}}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}-d\sqrt[3]{\frac{h}{2m}}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}}{d\sqrt[3]{\frac{h}{2m}}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{1,5}-1=1,1447-1=0,144\approx 14\%.$$

Tehát arra az eredményre jutottunk, hogy nagy konzolhossz esetében az optimális csapágytámaszköz hossza kb. 14%-kal megnövekszik, ha a hátsó csapágy merevségét a mellső csapágy merevségének a felére csönkentjük ($k = 0,5$).

Ezután tekintsük a rövid konzol esetét, amikor $\varkappa = 1$. Ekkor az $l_{\text{opt.}}$ kifejezésben a négyzetgyökjel alatt álló differencia:

$$1-\frac{4}{27}\frac{10^6}{1,62}\frac{1}{m}\frac{1}{u^6}.$$

Ha itt $m = 10^6/(27\cdot 1,62)$, vagyis a legkisebb s_1 mellső csapágymerevséget vesszük, akkor a négyzetgyökjel alatti differencia:

$$1-\frac{4}{u^6},$$

amelynek értéke $u = \sqrt[3]{2}$-re nulla. Ebben az $u = \sqrt[3]{2}$-nek megfelelő esetben az optimális támaszköz előbbi képletéből:

$$l_{\text{opt.}} = d\sqrt[3]{\frac{h}{2m}}\sqrt[3]{2}\cdot 2.$$

$u = \sqrt[3]{3}$-ra pedig, mivel ebben az esetben a négyzetgyökjel alatti differencia

$$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9},$$

és így $\sqrt{5/9} = 0,74536$, az optimális támaszköz:

$$l_{\text{opt.}} = d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{3} \{ \sqrt[3]{1+0{,}74536} + \sqrt[3]{1-0{,}74536} \} =$$

$$= d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{3} \{ \sqrt[3]{1{,}74536} + \sqrt[3]{0{,}25464} \} =$$

$$= d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{3} \cdot 1{,}83781 .$$

Ezek szerint az $m = 10^6/(27 \cdot 1{,}62)$-nek megfelelő leggyengébb s_1 csapágymerevségre, az optimális támaszköz relatív növekedésének a mértéke, ha a hátsó csapágy s_2 merevsége a mellső csapágy s_1 merevségének a felére csökken ($s_2 = 0{,}5\ s_1$) a következő lesz:

$$\frac{d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{3} \cdot 1{,}83781 - d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{2} \cdot 2}{d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{2} \cdot 2} =$$

$$= \sqrt[3]{1{,}5} \cdot 0{,}9189 - 1 = 1{,}0518 - 1 = 0{,}0518 \approx 5\% .$$

Ha a mellső csapágy most tekintett s_1 merevségét a kétszeresére növeljük, amikor a megfelelő

$$m = 2 \frac{10^6}{27 \cdot 1{,}62} ,$$

akkor $l_{\text{opt.}}$ kifejezésében a négyzetgyökjel alatt álló differencia

$$1 - \frac{1}{2} \frac{4}{u^6} = 1 - \frac{2}{u^6} ,$$

amelynek értékét $u = \sqrt[3]{2}$ és $u = \sqrt[3]{3}$-ra meghatározva, az optimális támaszköz fenti képlete alapján a következő két optimális támaszköz értéket nyerjük:

$$d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{2} \cdot 1{,}8592 \text{ és } d \sqrt[3]{\frac{h}{2m}} \sqrt[3]{3} \cdot 1{,}7252 ,$$

amelyek szerint az optimális támaszköz relatív növekedésének a mértékére 6,2% adódik. Hasonlóképpen nyerhető, hogy ha

$$m = 4\frac{10^6}{27\cdot 1{,}62},$$

akkor 7,3% a támaszköz relatív növekedésének a mértéke; és végül, ha $m = 8 \cdot 10^6/(27\cdot 1{,}62)$, akkor 8,3% a támaszköz relatív növekedésének a mértéke, ha a hátsó csapágy merevségét a mellső csapágy merevségének a felére csökkentjük.

Ezek után rátérünk az optimális támaszköz relatív százalékos növekedésének a meghatározására abban az *általános* esetben, amikor a hátsó csapágy s_2 merevségét a mellső csapágy s_1 merevségének a k-szorosára csökkentjük $(k < 1)$ $s_2 = ks_1$, vagyis amikor az u változik $\sqrt[3]{2}$-től

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{k}}\text{-ig } (0<k<1).$$

E célból fejtsük az optimális csapágytámaszköz (12') képletében a kapcsos zárójelben álló részt sorba. Ekkor:

$$l_{\text{opt.}} = 2d\sqrt[3]{\frac{h}{2m}}\,u\left[1-C_2\left(1-\frac{4}{27}\frac{h}{m\varkappa^3}\frac{1}{u^6}\right)-\right.$$
$$\left.-C_4\left(1-\frac{4}{27}\frac{h}{m\varkappa^3}\frac{1}{u^6}\right)^2-C_6(\ldots)^3-\ldots\right].$$

E képlet alapján az $l_{\text{opt.}}$ relatív növekedésének a mértéke, ha u változik $\sqrt[3]{2}$-től $\sqrt[3]{1+1/k}$-ig $(0 < k < 1)$ a következő lesz:

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{k}}\left[1-C_2\left(1-\frac{4}{27}\frac{h}{m\varkappa^3}\cdot\frac{1}{(1+1/k)^2}\right)-C_4(\ldots)^2-\ldots\right]}{\sqrt[3]{2}\left[1-C_2\left(1-\frac{4}{27}\frac{h}{m\varkappa^3}\frac{1}{4}\right)-C^4(\ldots)^2-\ldots\right]}$$
$$-\frac{\sqrt[3]{2}\left[1-C_2\left(1-\frac{4}{27}\frac{h}{m\varkappa^3}\frac{1}{4}\right)-\ldots\right]}{\sqrt[3]{2}\left[1-C_2\left(1-\frac{4}{27}\frac{h}{m\varkappa^3}\frac{1}{4}\right)-C_4(\ldots)^2-\ldots\right]}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}}\cdot\frac{1-C_2\left[1-\frac{4}{27}\frac{h}{m\varkappa^3}\frac{1}{(1+1/k)^2}\right]-C_4(\ldots)^2-\ldots}{1-C_2\left(1-\frac{h}{27\,m\varkappa^3}\right)-C_4(\ldots)^2-\ldots}-1.$$

Ebben az előállításban fellépő törtkifejezésnek, amelynek számlálója és nevezője végtelen sor, az értéke növekszik abban az esetben, ha növekszik az m vagy a $\varkappa$. Ez a (9) alatti egyenlőtlenség levezetésének az alapján látható be. Ugyanis, ha a nevezőben álló hatványsorban a kerek zárójelben álló hatványalapot a következő alakban írjuk fel:

$$1-\frac{h}{27\,m\varkappa^3}=1-\frac{1}{K},$$

ahol

$$K=27\frac{m}{h}\varkappa^3\geqq 27\frac{10^6}{27\cdot 1{,}62}\,\frac{1{,}62}{10^6}\varkappa^3=\varkappa^3\geqq 1,$$

akkor a számlálóban álló hatványsorban a kerek zárójelben álló hatványalap a következő alakban írható fel:

$$1-\frac{4}{27}\,\frac{h}{m\varkappa^3}\,\frac{1}{(1+1/k)^2}=1-\frac{1}{K\lambda},$$

ahol K jelentése az előbbi és

$$\lambda=\frac{(1+1/k)^2}{4}\geqq 1,$$

mivel

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\geqq 4 \quad (0<k\leqq 1)\,.$$

Ezek szerint az $l_{\text{opt.}}$ relatív növekedésének előbbi kifejezése a következő alakban írható fel:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}}\cdot\frac{1-C_2\left(1-\dfrac{1}{K\lambda}\right)-C_4\left(1-\dfrac{1}{K\lambda}\right)^2-\ldots}{1-C_2\left(1-\dfrac{1}{K}\right)-C_4\left(1-\dfrac{1}{K}\right)^2-\ldots}-1\,, \tag{13}$$

ahol a két hatványsor hányadosa megfelel a (9) alatti egyenlőtlenség bal oldalának, mivel $K\geqq 1$ és $\lambda\geqq 1$. Minket most ennek a (13) alatti kifejezésnek azok a legnagyobb értékei érdekelnek, amelyeket (13) a k különböző értékeire ér el. A (13) alattiban fellépő törtkifejezésről, két hatványsornak a hányadosáról a IX. fejezetben [(9) alatti bizonyításánál] megmutattuk, hogy az a K változónak monoton növekvő függvénye, ha K a $(1;\infty)$ intervallumban változik. Eszerint, mivel

$$K=27\frac{m}{h}\varkappa^3$$

a (13)-ban fellépő hányados a legkisebb értékét $K = 1$-re veszi fel, amikor is $\varkappa = 1$ és az m értéke is a lehető legkisebb, vagyis:

$$m = \frac{10^6}{27 \cdot 1{,}62}\,.$$

Ebből következik, hogy ha akár a $\varkappa$ (≥ 1), akár az $m(\geq 10^6/27 \times 1{,}62)$ viszonyszám értékét növeljük, akkor a (13)-ban fellépő törtkifejezés — amely K-nak monoton növekvő függvénye és így maga az egész (13) kifejezés is az — növekszik. Tehát hosszú konzol esetében, vagyis nagy $\varkappa$-ra az $l_{\text{opt.}}$ relatív növekedésének a mértéke, amikor a hátsó csapágy merevségét csökkentjük ($k < 1$), nagyobb lesz, mint rövid konzol esetében. A (13) alatti kifejezést elemi formában is felírhatjuk a (7′) alapján. Ennek alkalmazásával a (13) alatti a következő:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}}\cdot\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-\frac{1}{K\lambda}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1-\frac{1}{K\lambda}}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{1-\frac{1}{K}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1-\frac{1}{K}}}}-1\,. \qquad (13')$$

Tekintsük először a rövid konzol esetét, amikor

$$\varkappa = 1,$$

tekintettel arra, hogy az előzőek szerint a (13′) alatti értéke nő, ha az m viszonyszám növekszik, határozzuk meg (13′) alatti értékét a lehető legnagyobb m-re, éspedig abban a két esetben, amikor a hátsó csapágy merevségét a mellső csapágy merevségének a felére, illetve 1/4-ére csökkentjük, tehát $k = 1/2$, ill. $k = 1/4$.

Mivel

$$\max m = 230\,000,$$

$\varkappa = 1$-re

$$K = 27\,\frac{230\,000}{\frac{10^6}{1{,}62}} = 2{,}7 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}62 \quad \text{és} \quad \frac{1}{K} = 0{,}0994\,.$$

Mivel $k = 1/2$-re $\lambda = 2{,}25$, azért a (13′)-ban fellépő négyzetgyökök értéke:

$$\sqrt{1-\frac{1}{K\lambda}} = \sqrt{0{,}95583} = 0{,}97766\,,$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{K}}=\sqrt{0,9006}=0,9490$$

és ezekkel a (13′) alatti kifejezés értéke:

$$\sqrt[3]{1,5}\cdot\frac{\sqrt[3]{1,97766}+\sqrt[3]{0,02234}}{\sqrt[3]{1,9490}+\sqrt[3]{0,0510}}-1=\sqrt[3]{1,5}\,\frac{1,2552+0,28163}{1,2491+0,37084}-1=$$

$$=1,1447\,\frac{1,53683}{1,61994}-1=1,086-1=0,086\approx 8,6\,\%\,.$$

Tehát ha a hátsó csapágy merevségét a mellső csapágy merevségének a felére csökkentjük ($k=1/2$), akkor az optimális csapágytámaszköz hosszának 8,6%-ával növekszik *rövid konzol* esetén.

Ha pedig $k=1/4$, vagyis a hátsó csapágy merevségét a mellső csapágy merevségének az 1/4-ére csökkentjük, akkor (13′) alatti a következő lesz:

$$\sqrt[3]{2,5}\cdot\frac{1,45811}{1,61994}-1=1,221-1\approx 22\,\%\,.$$

Tehát 22%-kal növekszik az optimális csapágytámaszköz.

Hosszú konzol esetében pedig a $\varkappa=4$-re és $\varkappa=8$-ra vizsgálva az optimális csapágytámaszköz-növekedést, éspedig a legnagyobb m-re, hogy a támaszköz növekedése a lehető legnagyobb értékű legyen, a következőket nyerjük:

Ha $\varkappa=4$ és $k=1/2$, akkor a csapágytámaszköz relatív százalékos növekedése 12,8%; $\varkappa=4$ és $k=1/4$-re pedig 32%. Ha $\varkappa=8$, akkor $k=1/2$-re: 13,6%; $k=1/4$-re: 33,5% az optimális támaszköz relatív növekedése.

XII. A csapágytámaszköz változásának befolyása az orsómerevség értékére és az optimális orsómerevség

Az állandó keresztmetszetű, a c hosszúságú konzol végén P erővel terhelt orsó merevsége, azonos merevségű mellső és hátsó csapágy esetében a következő kifejezéssel egyenlő $\{$(ld. [3]; (6/a)$\}$:

$$s_{\text{orsó}} = \frac{P}{y} = \frac{3\,IE\,sl^2}{sc^2(c+l)\,l^2 + (l^2+2\,cl+2\,c^2)\,3\,IE}, \tag{14}$$

ahol l a csapágytámaszköz, s a csapágymerevség* és

$$y = P\left[\frac{c^2(c+l)}{3\,IE} + \frac{1}{s}\left(1+\frac{2c}{l}+\frac{2c^2}{l^2}\right)\right] \tag{14'}$$

a terhelés hatásvonalába eső teljes besüllyedés, amely a tengely behajlásából és a csapágyak rugalmas besüllyedéséből tevődik össze. Az optimális csapágytámaszközre $l = l_{\text{opt.}}$-ra az y besüllyedés minimális. Tehát

$$y = y_{\text{min.}},$$

ha

$$l = l_{\text{opt.}},$$

amikor is

$$\frac{dy}{dl} = y' = 0,$$

$$(l = l_{\text{opt}})$$

Mivel

$$\frac{ds_{\text{orsó}}}{dl} = \frac{d}{dl}\left(\frac{P}{y}\right) = -\frac{Py'}{y^2},$$

azért

$$\frac{ds_{\text{orsó}}}{dl} = 0,$$

ha

$$y' = 0;$$

$$(l = l_{\text{opt.}})$$

vagyis $l = l_{\text{opt.}}$-ra az $s_{\text{orsó}}$ orsómerevségnek is szélső értéke van. Ez a szélső érték maximum, mert $s_{\text{orsó}}$ második deriváltja az előzőek szerint:

$$\frac{d^2 s_{\text{orsó}}}{dl^2} = -P\,\frac{y''y^2 - 2\,yy'^2}{y^4} = -P\,\frac{y''y - 2\,y'}{y^3}$$

és ennek értéke az

$$l = l_{\text{opt.}}$$

helyen, mivel itt $y' = 0$, a következő:

$$\frac{d^2 s_{\text{orsó}}}{dl^2} = -P\,\frac{y''}{y^2} < 0,$$

* E a tengely anyagának rugalmassági modulusa, I pedig a tengelykeresztmetszet ekvatoriális másodrendű tehetetlenségi nyomatéka.

tekintettel még arra, hogy (14') alattiból:

$$y'' = P\left(\frac{1}{s} - \frac{4c}{l^3} + \frac{12\,c^2}{sl^4}\right) > 0\,.$$

Tehát az $l = l_{\mathrm{opt.}}$-ra a (14) alatti $s_{\mathrm{orsó}}$ orsómerevség maximális, vagyis az orsómerevség optimális:

$$s_{\mathrm{orsó}} = s_{\mathrm{opt.}},$$

ha

$$l = l_{\mathrm{opt.}}$$

Tekintsünk egy csapágysorozatot, amelyre az s csapágymerevség egyenesen arányos a d tengelyátmérővel: $s = md$, továbbá a c konzolhosszra is fennáll, hogy

$$c = \varkappa \cdot d \quad (\varkappa = \text{állandó}).$$

Ekkor a 4. tétel szerint az optimális csapágytámaszköz is *lineáris* függvénye a d tengelyátmérőnek:

$$l_{\mathrm{opt.}} = C \cdot d\,.$$

Írjuk be s, c és $l_{\mathrm{opt.}}$-nak ezeket az értékeit az orsómerevség (14) alatti képletébe, figyelembe véve még, hogy:

$$I = \frac{d^4 \pi}{64} = 0{,}04907 \cdot d^4,$$

akkor az optimális orsómerevségre a következő kifejezést nyerjük:

$$s_{\mathrm{opt.}} = \frac{0{,}14721 \cdot Em \cdot C^2 \cdot d}{m\varkappa^2(\varkappa + C)\,C^2 + 0{,}14721\,E(C^2 + 2\varkappa C + 2\varkappa^2)}\,.$$

Ez d-nek *lineáris* függvénye, tehát áll a következő:

9. tétel

Ha valamely csapágysorozatra az s csapágymerevség egyenesen arányos a d tengelyátmérővel, $s = md$; továbbá a c konzolhossz és a d tengelyátmérő aránya is állandó ($c/d = \varkappa =$ állandó), akkor az $s_{\mathrm{opt.}}$ optimális orsómerevség lineáris függvénye a d tengelyátmérőnek.

Az $s_{\mathrm{opt.}}$-nak mint d lineáris függvényének előbb felírt képletéből az is látható, hogy ha m növekszik, vagyis nagyobb merevségű csapágysorozatra térünk át, akkor az optimális orsómerevség, $s_{\mathrm{opt.}}$ növekszik. Ha pedig a c

konzolhosszt növeljük (vagyis a $\varkappa$ viszonyszám értékét), akkor az optimális orsómerevség csökken.

Most rátérünk annak a vizsgálatára, hogy a hossza mentén állandó keresztmetszetű orsó esetében az optimálistól eltérő, az optimálisnál nagyobb értékűre választott csapágytámaszköz milyen mértékben változtatja meg az orsómerevség optimális értékét.

Írjuk fel az l hosszúságú csapágytámaszközhöz tartozó orsómerevségnek a (14) alatti értékét a következő alakban:

$$s(l) = \frac{1}{\dfrac{c^2(c+l)}{3IE} + \dfrac{1}{s}\left(1 + \dfrac{2c}{l} + \dfrac{2c^2}{l^2}\right)}.$$

Ha az l csapágytámaszközt megváltoztatjuk $(l+\Delta l)$-re, akkor az orsómerevség: $s(l+\Delta l)$ és az orsómerevség értékének a megváltozása

$$s(l+\Delta l) - s(l) = \frac{1}{\dfrac{c^2(c+l+\Delta l)}{3IE} + \dfrac{1}{s}\left[1 + \dfrac{2c}{l+\Delta l} + \dfrac{2c^2}{(l+\Delta l)^2}\right]} -$$

$$- \frac{1}{\dfrac{c^2(c+l)}{3IE} + \dfrac{1}{s}\left(1 + \dfrac{2c}{l} + \dfrac{2c^2}{l^2}\right)} =$$

$$= \left\{-\frac{c^2\Delta l}{3IE} + \frac{1}{s}\left[\frac{2c\Delta l}{l(l+\Delta l)} + \frac{4c^2\Delta l}{l(l+\Delta l)^2} + \frac{2c^2(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}\right]\right\} \times$$

$$\times \left\{\frac{c^2(c+l+\Delta l)}{3IE} + \frac{1}{s}\left[1 + \frac{2c}{l+\Delta l} + \frac{2c^2}{(l+\Delta l)^2}\right]\right\}^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{c^2(c+l)}{3IE} + \frac{1}{s}\left(1 + \frac{2c}{l} + \frac{2c^2}{l^2}\right)\right]^{-1}.$$

A számlálóban a kerek zárójelben álló első és második tagba vigyük be a következő kifejezéseket:

$$\frac{1}{l(l+\Delta l)} = \frac{1}{l^2} - \frac{\Delta l}{l^2(l+\Delta l)}$$

és

$$\frac{1}{l(l+\Delta l)^2} = \frac{1}{l^3} - \frac{2l\Delta l + (\Delta l)^2}{l^3(l+\Delta l)^2}.$$

Ekkor az orsómerevség megváltozása a következő alakban írható fel:

$$s(l+\Delta l)-s(l)=$$

$$=\left\{-\frac{c^2\Delta l}{3IE}+\frac{1}{s}\left[\frac{2c\Delta l}{l^2}-\frac{2c(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)}+\frac{4c^2\Delta l}{l^3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{8c^2 l(\Delta l)^2+4c^2(\Delta l)^3}{l^3(l+\Delta l)^2}+\frac{2c^2(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{c^2(c+l+\Delta l)}{3IE}+\frac{1}{s}\left[1+\frac{2c}{l+\Delta l}+\frac{2c^2}{(l+\Delta l)^2}\right]\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left[\frac{c^2(c+l)}{3IE}-\frac{1}{s}\left(1+\frac{2c}{l}+\frac{2c^2}{l^2}\right)\right]^{-1}.$$

Ha itt a nevezőben álló két faktort, amelyek orsómerevséget jelentenek, a rövidség kedvéért helyettesítjük y/P-vel, illetve $(y+\Delta y)/P$-vel, akkor az orsómerevségnek előbb felírt megváltozását rövidebb formában a következő, differenciára bontott alakban írhatjuk fel:

$$s(l+\Delta l)-s(l)=\frac{-\frac{c^2}{3IE}+\frac{1}{s}\left(\frac{2c}{l^2}+\frac{4c^2}{l^3}\right)}{\frac{y}{P}\,\frac{y+\Delta y}{P}}\Delta l-$$

$$-\frac{1}{s}\cdot\frac{\frac{2c(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)}+\frac{6c^2(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}+\frac{4c^2(\Delta l)^3}{l^3(l+\Delta l)^2}}{\frac{y}{P}\,\frac{y+\Delta y}{P}}.$$

Legyen most már l az optimális csapágytámaszközzel egyenlő, amelyet röviden l_0-val jelölünk, $l_{\mathrm{opt.}}=l_0$, akkor az első tört számlálója eltűnik, mivel az nem más, mint:

$$\frac{1}{P}\,\frac{dy}{dl}=0$$

$$(l=l_0)$$

és így írhatjuk, hogy

$$s(l_0+\Delta l)-s(l_0)=-\frac{2}{s}\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{c}{l_0+\Delta l}+3\left(\frac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2+2\left(\frac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2\frac{\Delta l}{l_0}}{\frac{y}{P}\,\frac{y+\Delta y}{P}}.$$

$$(l=l_0)$$

Ide a

$$\frac{P}{y} = s\,(l_0)$$
$$(l = l_0)$$

optimális, azaz maximális orsómerevség értéket, valamint az $(l_0 + \Delta l)$ támaszközhöz tartozó

$$\frac{P}{y+\Delta y} = s(l_0+\Delta l)$$

orsómerevséget bevezetve — $s(l_0) > s(l_0 + \Delta l)$ — a maximális orsómerevség megváltozásának az abszolút értéke:

$$s(l_0) - s(l_0+\Delta l) = \frac{2}{s}\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2\left[\frac{c}{l_0+\Delta l} + 3\left(\frac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2\frac{\Delta l}{l_0}\right] s(l_0)\, s(l_0+\Delta l).$$

Innen a maximális orsómerevség relatív megváltozásának a mértékére a következő előállítás adódik:

$$\frac{s(l_0) - s(l_0+\Delta l)}{s(l_0)} = \frac{2}{s}\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2\left[\frac{c}{l_0+\Delta l} + 3\left(\frac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2\frac{\Delta l}{l_0}\right] s(l_0+\Delta l).$$

Ebbe a képletbe az orsómerevségnek (14′)-ből adódó:

$$\underset{(l = l_0 + \Delta l)}{\frac{P}{y+\Delta y}} = s(l_0+\Delta l) = \frac{1}{\dfrac{c^2(c+l_0+\Delta l)}{3IE} + \dfrac{1}{s}\left[1 + \dfrac{2c}{l_0+\Delta l} + 2\left(\dfrac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2\right]}$$

értékét helyettesítve, a maximális orsómerevség relatív megváltozására a következő kifejezést nyerjük:

$$\frac{s(l_0) - s(l_0+\Delta l)}{s(l_0)} = 2\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \frac{\dfrac{c}{l_0+\Delta l} + 3\left(\dfrac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2 + 2\left(\dfrac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2\dfrac{\Delta l}{l_0}}{s\,\dfrac{c^2(c+l_0+\Delta l)}{3IE} + \left[1 + \dfrac{2c}{l_0+\Delta l} + 2\left(\dfrac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2\right]}.$$

A jobb oldalon álló törtkifejezésbe vezessük be megint a

$$c = \varkappa d, \qquad s = md \qquad \text{és} \qquad l_0 = Cd$$

összefüggésekből adódó $\varkappa$, m és C paramétereket (viszonyszámokat), továbbá a

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \mu$$

viszonyszámot; akkor mivel a d átmérőjű tömör tengelyre nézve

$$3\,IE = 308\,625\; d^4,$$

az előbbi törtkifejezés:

$$\frac{\dfrac{c}{l_0+\Delta l} + 3\left(\dfrac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2 + 2\left(\dfrac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2 \dfrac{\Delta l}{l_0}}{\dfrac{s\cdot c^2(c+l_0+\Delta l)}{3IE} + \left[1 + \dfrac{2c}{l_0+\Delta l} + 2\left(\dfrac{c}{l_0+\Delta l}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{\dfrac{\varkappa}{C(1+\mu)} + \left(\dfrac{\varkappa}{C(1+\mu)}\right)^2 (3+2\mu)}{\dfrac{\varkappa^2\big(\varkappa+C(1+\mu)\big)}{308\,625}\, m + 1 + 2\dfrac{\varkappa}{C(1+\mu)} + 2\left[\dfrac{\varkappa}{C(1+\mu)}\right]^2} = f(\varkappa, m, C, \mu).$$

Eszerint az optimális orsómerevség relatív megváltozásának a mértékét, ha a csapágytámaszközt az l_0 optimális értékről $(l_0 + \Delta l)$-re változtatjuk, a következőképp írhatjuk fel:

$$\frac{s(l_0) - s(l_0+\Delta l)}{s(l_0)} = 2\,\mu^2 f(\varkappa, m, C, \mu).$$

Az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ többváltozós racionális függvénynek az értékváltozását kell vizsgálnunk, ha a $\varkappa$, m, C, μ paramétereknek az értékét változtatjuk.

Először megmutatjuk, hogy az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ függvény értéke nő, ha az m paraméter növekszik.

Az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ kifejezésben fellépő C paraméter függvénye az m-nek, amint ez pl. a (8) alatti képletéből nyomban látható tekintettel arra, hogy

$$\frac{l_{\text{opt.}}}{d} = \frac{l_0}{d} = C.$$

Legyen az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ kifejezésben egyelőre:

$$\varkappa = 1,$$

tehát tekintsük az

$$f(1, m, C, \mu) = \frac{\dfrac{1}{C(1+\mu)} + \dfrac{1}{[C(1+\mu)]^2}(3+2\mu)}{\dfrac{1+C(1+\mu)}{308\,625}m + 1 + \dfrac{2}{C(1+\mu)} + \dfrac{2}{[C(1+\mu)]^2}}$$

racionális törtkifejezést, amelyről megmutatjuk, hogy értéke növekszik, ha az m paraméter nő. Most a μ viszony értékét is fixnek tekintjük és bevezetjük a következő rövidítő jelölést:

$$x = C(1 + \mu).$$

Mivel, amint arra az előzőekben rámutattunk, a C paraméter függvénye az m-nek, azért x változó is függvénye az m-nek és x bevezetésével:

$$f(1, m, C, \mu) = \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{3+2\mu}{x}}{\dfrac{1+x}{308625}m + 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{x+3+2\mu}{m\dfrac{x^3}{308625} + \left(1 + \dfrac{m}{308625}\right)x^2 + 2x + 2}.$$

Számítsuk ki ennek a törtkifejezésnek m szerinti differenciálhányadosát, figyelembe véve, hogy x függvénye az m-nek. A tört differenciálásának a szabályát alkalmazva:

$$\frac{\mathrm{d}f(1, m, C, \mu)}{\mathrm{d}m} =$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}m}\left[m\dfrac{x^3}{308625} + \left(1 + \dfrac{m}{308625}\right)x^2 + 2x + 2\right]}{\left[m\dfrac{x^3}{308625} + \left(1 + \dfrac{m}{308625}\right)x^2 + 2x + 2\right]^2} -$$

$$- \frac{\left[\dfrac{3m}{308625}x^2 + \left(2 + \dfrac{2m}{308625}\right)x + 2\right]\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}m}(x+3+2\mu)}{\left[m\dfrac{x^3}{308625} + \left(1 + \dfrac{m}{308625}\right)x^2 + 2x + 2\right]^2}.$$

Ha a számlálóban a szorzást és összevonásokat elvégezzük, akkor a differenciálhányados számlálójára a következő kifejezést nyerjük:

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}m}\left[\frac{2m}{308625}x^3 + \left(\frac{m}{308625} + 1 + \frac{3m(3+2\mu)}{308625}\right)x^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{m}{308625} + 1\right)(3+2\mu)\,x + 4\,(1+\mu)\right].$$

Mármost, mivel:

$$x = C(1+\mu),$$

azért

$$\frac{dx}{dm} = (1+\mu)\frac{dC}{dm}.$$

De itt a (8) alatti szerint ($l_{\text{opt.}} = l_0$):

$$C = 2\sqrt[3]{\frac{h}{m}}\left[1 - C_2\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right) - C_4\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - C_6\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^3 - \ldots\right]$$

és így

$$\frac{dC}{dm} = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{h}{m^4}}\left[1 - C_2\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right) - C_4\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^2 - C_6(\ldots)^3 - \ldots\right] -$$
$$-2\sqrt[3]{\frac{h}{m}}\,\frac{h}{27\varkappa^3 m^2}\left[C_2 + 2C_4\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right) + \right.$$
$$\left. + 3C_6\left(1 - \frac{h}{27\varkappa^3 m}\right)^2 + \ldots\right] < 0.$$

Eszerint, tehát a

$$\frac{dx}{dm} = (1+\mu)\frac{dC}{dm}$$

differenciálhányados is negatív, amiből következik, hogy a

$$\frac{df(1, m, C, \mu)}{dm}$$

differenciálhányadosnak a felírt számlálója pozitív, mert a szögletes zárójelben pozitív kifejezés áll. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $f(1, m, C, \mu)$ értéke növekszik, ha m nő.

Itt a $\varkappa$ paraméter értékét 1-nek választottuk, de könnyű megmutatni, hogy az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ függvény értéke csökken, ha a $\varkappa$ változó növekszik ($\varkappa \geqq 1$). Írjuk ugyanis fel az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ kifejezést mint a $\varkappa$ változónak racionális tört függvényét, a következő rövidített alakban:

$$f(\varkappa, m, C, \mu) = \frac{a\varkappa + b\varkappa^2}{c\varkappa^3 + d\varkappa^2 + e\varkappa + 1},$$

ahol az

$$a=\frac{1}{C(1+\mu)}\,,\quad b=\frac{3+2\mu}{C^2(1+\mu)^2}\,,\quad c=\frac{m}{308625}\,,$$

$$d=\frac{C(1+\mu)\,m}{308625}+\frac{2}{C^2\,(1+\mu)^2}\quad \text{és}\quad e=\frac{2}{C(1+\mu)}$$

együtthatók most a $\varkappa$-tól független állandóknak tekinthetők. Mivel:

$$\frac{\mathrm{d}f(\varkappa,m,C,\mu)}{\mathrm{d}\varkappa}=\frac{(2b\varkappa+a)(c\varkappa^3+d\varkappa^2+e\varkappa+1)-(3\varkappa^2+2d\varkappa+e)(a\varkappa+b\varkappa^2)}{(c\varkappa^3+d\varkappa^2+e\varkappa+1)^2}=$$

$$=\frac{b(2c-3)\,\varkappa^4+a(c-3)\,\varkappa^3+(be-da)\,\varkappa^2+2b\varkappa+a}{(c\varkappa^3+d\varkappa^2+e\varkappa+1)^2}\,,$$

a számlálóban álló $\varkappa$-ban negyedfokú polinom értékváltozását kell vizsgálnunk. Ehhez először a polinom együtthatóinak előjelét állapítjuk meg. A $\varkappa^4$-nek az együtthatója negatív, mert

$$2c-3=\frac{2m}{308625}-3<0\,,$$

mivel m-nek a lehető legnagyobb értéke (ld. a VI. fejezetet):

$$m=230\,000.$$

A $\varkappa^3$ együtthatója:

$$c-3=\frac{m}{308625}-3<0$$

szintén negatív. A $\varkappa^2$ együtthatója

$$be-da=\frac{(3+2\mu)\,2}{C^3\,(1+\mu)^3}-\frac{m}{308625}-\frac{2}{C^3\,(1+\mu)^3}=$$

$$=\frac{4+4\,\mu}{C^3\,(1+\mu)^3}-\frac{m}{308625}\,.$$

Ez a differencia akkor negatív, ill. nem pozitív, ha

$$\frac{4+4\,\mu}{C^3(1+\mu)^3}\le\frac{m}{308625}\,,$$

vagyis ha

$$C\ge\sqrt[3]{\frac{308625}{m}}\,\sqrt[3]{\frac{4}{(1+\mu)}}\,.$$

De a C-nek előbb felírt hatványsoros előállításából (8) nyomban látható, hogy C minimális értékét $\varkappa = \infty$-re veszi fel, amikor is

$$C = 2\sqrt[3]{\frac{h}{m}}\,(1 - C_2 - C_4 - C_6 - \ldots),$$

ahol (7′) szerint, ha abban $a = 1$:

$$1 - C_2 - C_4 - C_6 - \ldots = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

és így C minimális értéke

$$C_{\text{min.}} = \sqrt[3]{\frac{2h}{m}}.$$

Mivel a (2) egyenlet szerint

$$h = \frac{10^6}{1{,}62},$$

azért

$$C_{\text{min.}} = \sqrt[3]{\frac{10^6}{0{,}81\,m}} = \sqrt[3]{\frac{1234500}{m}},$$

ami sohasem kisebb az előbb C-re nyert alsó korlátnál, ugyanis

$$\sqrt[3]{\frac{308625}{m}}\sqrt[3]{\frac{4}{(1+\mu)}} = \sqrt[3]{\frac{1234500}{m(1+\mu)}} \leq \sqrt[3]{\frac{1234500}{m}} = C_{\text{min.}}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy a $\varkappa$-ban negyedfokú polinomban a $\varkappa^2$ együtthatója is negatív; a $\varkappa$ együtthatója és a konstans tag pedig pozitív. Tehát a polinom együtthatóinak sorozatában pontosan egy jelváltás lép fel, ami azt jelenti, hogy a polinom pontosan egyszer tűnik el, ha $\varkappa$ változik 0-tól ∞-ig. De $\varkappa = 1$-re a polinom értéke:

$$b(2c-3)+a(c-3)+(be-da)+2\,b+a = b(2\,c-1)+a(c-2)+(be-da).$$

Itt a jobb oldalról, amely három tag összege, megmutatjuk, hogy annak értéke negatív. A harmadik tag, $be - da$ (a $\varkappa^2$ együtthatója) mint az előbb megmutattuk negatív. Az első két tag összege

$$b(2c-1)+a(c-2)=\frac{1}{C(1+\mu)}\left[\frac{3+2\mu}{C(1+\mu)}\left(\frac{2m}{308625}-1\right)+\frac{m}{308625}-2\right]$$

pedig akkor éri el legnagyobb értékét, amikor m maximális és így C minimális; tehát ha a (VI. fejezet szerint):

$$m = 230\,000$$

és az előbbiekben levezetett

$$C_{\min}=\sqrt[3]{\frac{1234500}{m}}$$

képlet szerint

$$C=\sqrt[3]{\frac{1234500}{230000}}=\sqrt[3]{5,367}=1,75\ ;$$

továbbá $\mu = 0$. Akkor

$$\frac{3+2\mu}{C(1+\mu)}=\frac{3}{1,75} \quad \text{és} \quad \frac{m}{308625}=0,74523,$$

amely értékekkel

$$b(2c-1)+a(c-2)=$$

$$=\frac{1}{1,75}\left(\frac{3}{1,75}\,0,49046-1,25477\right)=\frac{1}{1,75}\left(\frac{1,47138}{1,75}-1,25477\right)=$$

$$=\frac{1}{1,75}\left(\frac{1,47138}{1,75}-1,25477\right)<0\ .$$

Ez az eredmény azt mondja, hogy $\varkappa = 1$-re a $\varkappa$-ban negyedfokú polinom negatív — ugyanis $(be - da) < 0$ — tehát minden $\varkappa$-ra, amely $\varkappa \geq 1$, a polinom negatív, vagyis a

$$\frac{\mathrm{d}f(\varkappa, m, C, \mu)}{\mathrm{d}\varkappa}$$

derivált számlálója és így maga a derivált is negatív. Ennélfogva az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ függvény monoton csökken, ha $\varkappa$ (≥ 1) növekszik 1-től ∞-ig.

Tehát az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ négyváltozós függvényre vonatkozóan megállapítottuk, hogy annak értéke növekszik, ha az m paraméter nő, és a függvény értéke csökken, ha a $\varkappa$ paraméter növekszik. Válasszuk az m értékét a lehető legnagyobbra és $\varkappa$ legyen a lehető legkisebb, vagyis $\varkappa = 1$. Ekkor $m = 230\,000$ esetében a C paraméter értéke, amint az előzőekben levezettük, minimális, éspedig

$$C = 1{,}75.$$

Írjuk be az $f(\varkappa, m, C, \mu)$ kifejezésébe a $\varkappa = 1$, $m = 230\,000$ és $C = 1{,}75$ értékeket, akkor:

$$f_0(\mu) = f(1; 230000; 1{,}75; \mu) =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{1{,}75(1+\mu)} + \left(\dfrac{1}{1{,}75(1+\mu)}\right)^2 (3+2\mu)}{\dfrac{1+1{,}75(1+\mu)}{308625}\,230000+1+\dfrac{2}{1{,}75(1+\mu)}+2\left(\dfrac{1}{1{,}75(1+\mu)}\right)^2} .$$

Ha ide rövidség kedvéért bevezetjük

$$\lambda = 1{,}75(1+\mu)$$

jelölést, akkor

$$f_0(\mu) = \frac{\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{3+2\mu}{\lambda^2}}{(1+\lambda)\,0{,}745+1+\dfrac{2}{\lambda}+\dfrac{2}{\lambda^2}} .$$

Itt a μ paraméter az l_0 optimális csapágytámaszköz relatív megváltozásának a mértékét jelenti:

$$\mu = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Az $f_0(\mu)$ értékét $\mu = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$-re meghatározva:

$$f_0(0{,}1) = 0{,}2907,$$

$$f_0(0{,}2) = 0{,}2645,$$

$$f_0(0{,}3) = 0{,}2412$$

és

$$f_0(0{,}4) = 0{,}2206.$$

Az optimális orsómerevség relatív megváltozásának a mértékére — ha a csapágytámaszköz az l_0 optimális értékről $(l_0 + \Delta l)$-re változik — levezetett

$$\frac{s(l_0)-s(l_0+\Delta l)}{s(l_0)} = 2\mu^2 f(\varkappa, m, C, \mu)$$

képlet alapján, a maximális lehetséges orsómerevség-változásokra, ha az l_0 optimális csapágytámaszközt hosszának 10, 20, 30 és 40%-ával változtatjuk meg, a következő értéket kapjuk:

$$\frac{s(l_0)-s(l_0+\Delta l)}{s(l_0)}=2\mu^2 f_0(\mu)\cdot 100\,\%,$$

ahonnan az előbb felírt $f_0(0{,}1)$, $f_0(0{,}2)$, $f_0(0{,}3)$ és $f_0(0{,}4)$ értékek alapján,

ha $\mu = 0{,}1$, akkor $2\,\mu^2 f_0(\mu)\cdot 100\% = 0{,}6\%$;

$\mu = 0{,}2$, akkor $2\,\mu^2 f_0(\mu)\cdot 100\% = 2\%$;

$\mu = 0{,}3$, akkor $2\,\mu^2 f_0(\mu)\cdot 100\% = 4\%$

és $\mu = 0{,}4$, akkor $2\,\mu^2 f_0(\mu)\cdot 100\% = 7\%$.

Tehát arra az eredményre jutottunk, hogy az optimális csapágytámaszköz hosszának 40%-os megnövelése is csak 7%-kal csökkenti az orsómerevség értékét. Különben arra a tényre, hogy állandó keresztmetszetű orsó esetében az optimális csapágytámaszköz növelése csak kismértékben változtatja az orsómerevséget, már a [4] tanulmányunkban is rámutattunk.

IRODALOM

1. Lipka, I.: Investigation into the Deformation of Shafts and the Problem of Minimizing Deformation. *Acta Techn. Hung.* **21** (1958).
2. Chvála, B.: Nejvyhodnějsí vzdálenost lozisek vretena soustruhu (The most suitable distance of the spindle bearings of lathes). *Strojirentsví* (1956), IV.
3. Harkányi, I.: The Determination of the Optimum Bearing Distance with Regard to Bearing Stiffness in the Case of Shafts with Constant and Variable Cross Section, respectively. *Acta Techn. Hung.* **33** (1961).
4. Lipka, I.: On the Determination of the Optimum Bearing Distance of Cantilever Shafts with two Supports. *Acta Techn. Hung.* **45** (1964).
5. Harkányi I.: A legkedvezőbb csapágytámaszköz meghatározása eltérő mellső-, illetve hátsó csapágymerevség esetén. *SZIM Közlemények* **6** (1966), I.
6. Kirov, V.—Nikolov, Sz.: Fémforgácsoló szerszámgépek főorsói optimális csapágytámaszközének kiszámítása. *Technika* [Szófia] (1965).
7. Jakkel, O.—Popper, Gy.: Néhány paraméter hatása a legkedvezőbb csapágytámaszközre. *SZIM Közlemények* **6** (1966), IV.
8. Honrath, K.: Werkzeugmaschinenspindeln und deren Lagerungen. *Industrie Anzeiger* (1957), Nr. 80.
9. Piekenbrink, R.: Die Starrheit von Arbeitenspindeln und deren Lagerung. *Industrie Anzeiger* (1947), Nr. 80.
10. Opitz, H.—Honrath, K.: Untersuchungen an Werkzeugmaschinenspindeln-Wälzlagern und hydrostatischen Lagerungen; Köln—Opladen 1964.
11. Pittrof, H.: Beitrag zur Theorie und Konstruktion von Hauptspindellagerungen spanender Werkzeugmaschinen. *Werkstatt und Betrieb* (1963). IV.

Relations between the Optimum Bearing Distance of a Two-Support Cantilever Shaft and Certain shaft and Bearing parameters. The paper deals with deducing theorems on the optimum distance between the bearings, which express the variation of optimum bearing distance if some of the parameters characterizing the shaft and its bearings: shaft diameter, console length and bearing stiffness, change. The author analyses the influence of bearing dimensions on the optimum bearing distance for equal and for inequal front and rear bearing stiffnesses and estimates the reduction of the optimum bearing distance when the equal front and rear bearing stiffnesses are increased. The paper also deals with the influence of the ratio of the bearing stiffness on the optimum bearing distance for different stiffnesses of the two bearings. Finally the paper discusses optimum spindle stiffness and the influence of the change of bearing distance on spindle stiffness.

Beziehungen zwischen der günstigsten Lagerentfernung einer zweifach kragträgerartig gelagerten Welle und gewissen Parametern der Welle und der Lager. In der Arbeit werden solche Zusammenhänge für die optimale Auflagerentfernung abgeleitet, welche deren Änderung für den Fall ausdrücken, daß einige die Welle und die Lagerung charakterisierenden Parameter: Wellendurchmesser, Kraglänge, Lagersteifheit, sich ändern. Die Arbeit analysiert den Einfluß der Lagersteifheiten auf die optimale Lagerentfernung bei gleicher und bei verschiedener Steifheit des vorderen und des hinteren Lagers, und schätzt die Verminderung des optimalen Lagerabstands bei Vergrößerung der miteinander gleichen vorderen und rückwärtigen Lagersteifheit. Ferner wir der Einfluß des Verhältnisses der Lagersteifheiten auf die optimale Lagerentfernung bei verschiedener Steifheit des vorderen und des hinteren Lagers untersucht. Schließlich beschäftigt sich die Arbeit mit der optimalen Spindelsteifheit und dem Einfluß der Änderung der Lagerentfernung auf die Spindelsteifheit.