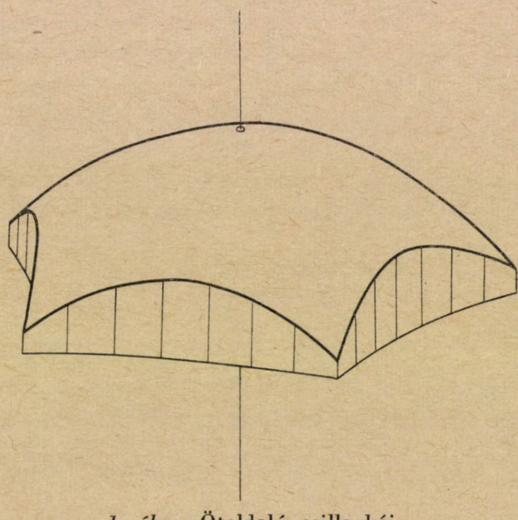
KÖRSZIMMETRIKUSAN TERHELT CSILLAGSOKSZÖG ALAPRAJZÚ FORGÁSPARABOLOID HÉJAK

CSONKA PÁL*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1970. november 25-én]

I. Bevezetés

A szabályos sokszögalaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloid héjak peremívei aránylag csekély ívmagasságúak, ami több szempontból előnytelen. Ez a kedvezőtlen körülmény azáltal küszöbölhető ki, ha a héj alaprajzi idomaként szabályos sokszög helyett olyan idomot választunk, melynek oldalai befelé íveltek.



1. ábra. Ötoldalú csillaghéj

Ha a befelé ívelt oldalú szabályos alaprajzú idom ún. *csillagsokszög* [1], az építészeti előnyökhöz számítástechnikai előnyök is társulnak. Ez az előny, valamint a csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid héjak érdekes építészeti megjelenése (1. ábra) indokolttá teszi, hogy az efféle héjak — a *csillaghéjak* — erőtani vizsgálatára alkalmas számító eljárást ismertessünk.

II. Feltevések

Az alábbi fejtegetésekben feltételezzük, hogy a héj szegélyén körbefutó abroncsszerű peremtartó készül, és azt teljes hosszában falazat vagy

* Prof. Dr. Csonka Pál, Budapest XI., Bartók B. út 31.

sűrűn egymás mellett álló oszlopok támasztják alá. Ily alátámasztás híján a körbefutó peremtartót vonóvasas ívekkel kell helyettesíteni.

Számításainkat a héjak ún. membránelméletének szokásos feltevéseire alapozzuk. A héj és peremtartó csatlakozásánál az alakváltozási kényszereknek a héj erőjátékát zavaró hatását figyelmen kívül hagyjuk.

A héjra ható teherként csak körszimmetrikus elrendezésű folytonos megoszló függőleges erőket veszünk számításba.

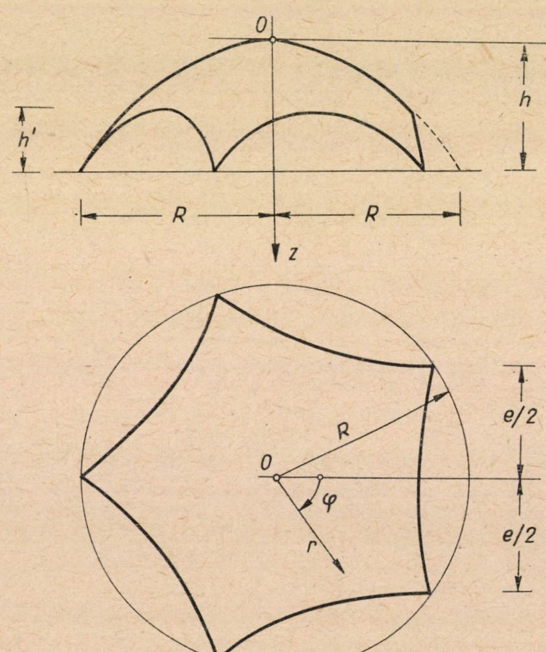
III. Alapismeretek

Az n oldalú ($n = 3, 4, 5, \ldots$) *csillagsokszög* egyenlete a 2. ábrán feltüntetett $O(r, \varphi)$ poláris koordinátarendszerben

$$-\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{n} \cdot \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi = 0\,, \tag{1}$$

az n oldalú csillagsokszög fölé mint alaprajz fölé szerkesztett *csillaghéj* középfelületének egyenlete az $O(r, \varphi, z)$ hengeres koordinátarendszerben pedig:

$$z = h \frac{r^2}{R^2}\,. \tag{2}$$



2. ábra. Az $O(r, \varphi, z)$ koordinátarendszer

A fenti képletekben R a középfelület sarokpontjainak rádiuszvektorát, h pedig a héj magassági méretét jelenti.

A vizsgálandó héjak $F = F(r, \varphi)$ feszültségfüggvénye a Pucher-féle differenciálegyenletnek, vagyis a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{R^2}{2h} g = 0 \tag{3}$$

egyenletnek tartozik megfelelni. Ez az egyenlet a g teherfüggvényre megoldott alakban így írható:

$$g = -\frac{2h}{R^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \equiv -\frac{2h}{R^2} \Delta F . \tag{4}$$

A fenti képletekben g a héjra ható függőleges megoszló tehernek az *alaprajz* területegységére vonatkoztatott fajlagos értékét jelenti.

Az $F = F(r, \varphi)$ feszültségfüggvény a feladat (3) differenciálegyenletén felül teljesíteni tartozik a héj különleges megtámasztását kifejező kerületi feltételt is. Ez a feltétel teljes hosszában fallal alátámasztott, abroncsszerűen körbefutó peremtartóval bíró héjak esetében [2] az

$$F_{\text{perem}} = 0 \tag{5}$$

egyenlettel, függőleges oszlopokkal alátámasztott, abroncsszerűen körbefutó szegélytartó esetében pedig az

$$F_{\text{perem}} \cong 0 \tag{6}$$

egyenlettel fejezhető ki. Ha az (5), illetve (6) alatti feltétel teljesül, a héj körbefutó szegélytartójában semmiféle, illetve legfeljebb lényegtelen hajlító- és csavarónyomatékok jönnek létre.

A vizsgálandó héj feszültségfüggvényét ismerve, a héj sugár- és ív-iránya *redukált* feszítőerői a következő képletekkel számíthatók [3]:

$$\begin{aligned} n_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} , \\ n_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) , \\ n_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} . \end{aligned} \tag{7}$$

IV. Segédfüggvények

A kitűzött feladat megoldása tetszőleges körszimmetrikus terhelés esetében zárt alakban nem fejezhető ki, miért is a pontos megoldás helyett közelítő megoldáshoz kell folyamodnunk. A közelítő számítás céljaira három olyan segédfüggvényt vezetünk be, amelyek mindegyikéhez, mint feszültségfüggvényhez, forgásszimmetrikus megoszlású függőleges teherrendszer rendelhető, és amelyek mindegyike egyúttal megfelel az (5) kerületi feltételnek is.

1. *Az első segédfüggvény*

Első segédfüggvényül az [1] dolgozatból ismert feszültségfüggvény $1/g_0$-szorosát választjuk. Az első segédfüggvény tehát

$$F^{\mathrm{I}} = -\frac{R^4}{8h}\left(-\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right). \tag{8}$$

A fenti függvénynek mint feszültségfüggvénynek a (2) alattiak szerint az alábbi n_r^{I}, $n_{r\varphi}^{\mathrm{I}}$, n_φ^{I} redukált feszítőerők felelnek meg:

$$\begin{aligned} n_r^{\mathrm{I}} &= -\frac{R^2}{4h}\left[1-(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right], \\ n_{r\varphi}^{\mathrm{I}} &= -\frac{R^2}{4h}(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\sin n\varphi, \\ n_\varphi^{\mathrm{I}} &= -\frac{R^2}{4h}\left[1+(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

A (8) függvényhez mint feszültségfüggvényhez rendelhető teherrendszer a (4) képlet szerint

$$g^{\mathrm{I}} = 1, \tag{10}$$

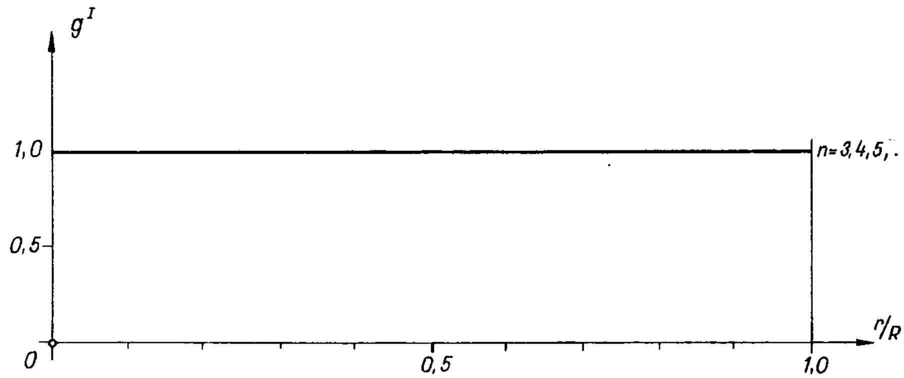
vagyis konstans értékű. Diagramja a 3. ábrán látható.

2. *A második segédfüggvény*

Második segédfüggvényül az első segédfüggvénynek a

$$-\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\left(\varphi + \frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= -\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi$$



3. *ábra.* A g^I teherrendszer diagramja

kifejezéssel való szorzatát vezetjük be:

$$F^{II} = -\frac{R^4}{8h}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}-\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right).$$

A szorzást elvégezve

$$F^{II} = -\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^2-\frac{4}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\cos^2 n\varphi\right].$$

Innen a

$$\cos^2 n\varphi = \frac{1+\cos 2n\varphi}{2}$$

összefüggés felhasználásával

$$F^{II} = -\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^2-\frac{2}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}(1+\cos 2n\varphi)\right]. \quad (11)$$

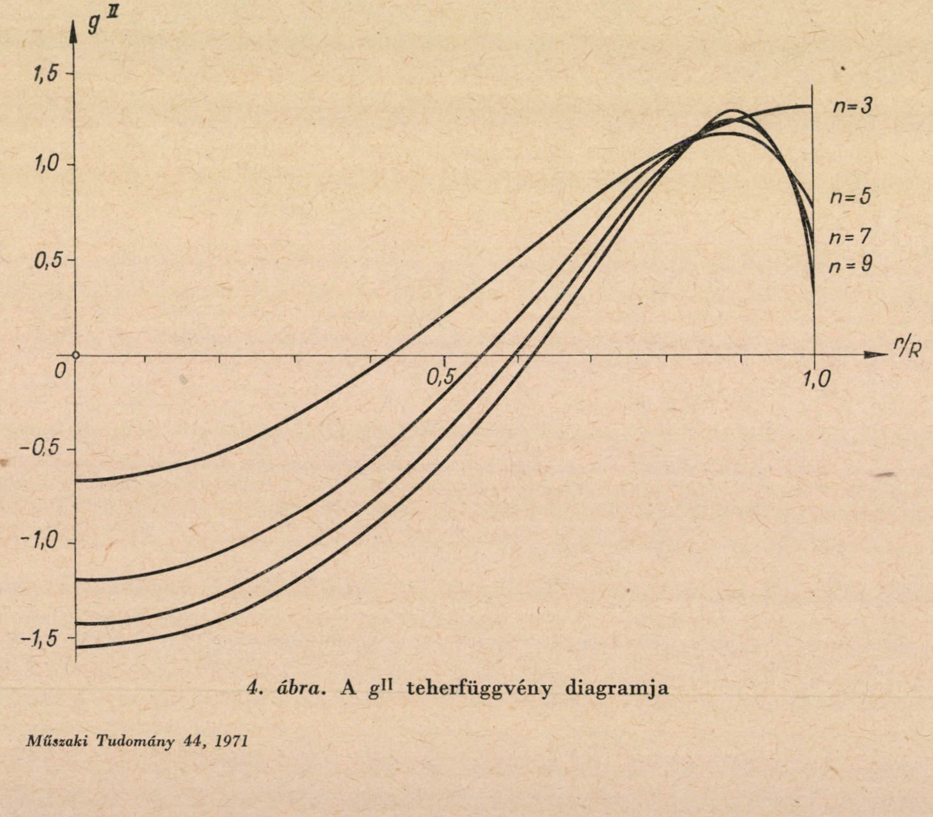
Ha feszültségfüggvényül ezt a függvényt választjuk, és az ehhez tartozó n_r^{II}, $n_{r\varphi}^{II}$, n_φ^{II} redukált feszítő erőket a (7) képletek szerint meghatározzuk, azt találjuk, hogy

$$n_r^{II} = -\frac{R^2}{2h}\left(-\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\cos 2n\varphi\right),$$
$$n_{r\varphi}^{II} = -\frac{R^2}{2h}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\sin 2n\varphi, \tag{12}$$
$$n_\varphi^{II} = -\frac{R^2}{2h}\left(-\frac{n-2}{n} + 3\frac{r^2}{R^2} - \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\cos 2n\varphi\right).$$

A második segédfüggvénynek megfelelő teherrendszer a (4) képlet szerint:

$$g^{II} = 2\left(-\frac{n-2}{n} + 2\frac{r^2}{R^2} - \frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\right). \tag{13}$$

Ez a teherrendszer szintén forgásszimmetrikus elrendezésű. Diagramja különböző oldalszámú csillaghéjak esetében a 4. ábrán látható. Egyes ordinátái az I. táblázatból vehetők ki.



4. ábra. A g^{II} teherfüggvény diagramja

I. táblázat

A g^{II} segédfüggvény értéke

r/R	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
0	−0,667	−1,000	−1,200	−1,333	−1,429	−1,500	−1,556	−1,600
0,05	−0,657	−0,990	−1,190	−1,323	−1,419	−1,490	−1,546	−1,590
0,10	−0,627	−0,960	−1,160	−1,293	−1,389	−1,460	−1,516	−1,560
0,15	−0,578	−0,910	−1,110	−1,243	−1,339	−1,410	−1,466	−1,510
0,20	−0,510	−0,840	−1,040	−1,173	−1,269	−1,340	−1,396	−1,440
0,25	−0,424	−0,750	−0,950	−1,083	−1,179	−1,250	−1,306	−1,350
0,30	−0,323	−0,641	−0,840	−0,973	−1,069	−1,140	−1,196	−1,240
0,35	−0,207	−0,514	−0,710	−0,843	−0,939	−1,010	−1,066	−1,110
0,40	−0,078	−0,368	−0,561	−0,694	−0,789	−0,860	−0,916	−0,960
0,45	0,061	−0,207	−0,393	−0,524	−0,619	−0,690	−0,746	−0,790
0,50	0,208	−0,031	−0,208	−0,335	−0,429	−0,500	−0,556	−0,600
0,55	0,360	0,155	−0,007	−0,128	−0,220	−0,290	−0,346	−0,390
0,60	0,514	0,347	0,206	0,095	0,007	−0,062	−0,116	−0,160
0,65	0,666	0,539	0,426	0,330	0,250	0,185	0,132	0,089
0,70	0,813	0,725	0,645	0,570	0,504	0,446	0,398	0,357
0,75	0,950	0,894	0,850	0,804	0,758	0,714	0,674	0,639
0,80	1,074	1,036	1,024	1,012	0,994	0,972	0,948	0,924
0,85	1,179	1,136	1,145	1,163	1,177	1,184	1,186	1,183
0,90	1,261	1,178	1,179	1,209	1,247	1,282	1,314	1,340
0,95	1,314	1,140	1,083	1,079	1,101	1,135	1,174	1,216
1,00	1,333	1,000	0,800	0,667	0,571	0,500	0,444	0,400

3. *A harmadik segédfüggvény*

A harmadik segédfüggvényt oly módon állítjuk elő, hogy az első segédfüggvényt a

$$-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\left(\varphi+\frac{2\pi}{3n}\right)=$$

$$=-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right)$$

és a

$$-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\left(\varphi-\frac{2\pi}{3n}\right)=$$

$$=-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right)$$

kifejezéssel megszorozzuk:

$$F^{III}=-\frac{R^4}{8h}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right)\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right)\right].$$

A szorzást elvégezve azt találjuk, hogy

$$F^{\mathrm{III}} = -\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^3 - \frac{3}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{n^3}\cdot\frac{r^{3n}}{R^{3n}}(\cos^3 n\varphi - 3\cos n\varphi\cdot\sin^2 n\varphi)\right].$$

Ámde

$$\cos^3 n\varphi - 3\cos n\varphi\cdot\sin^2 n\varphi = \cos 3\, n\varphi,$$

úgyhogy

$$F^{\mathrm{III}} = -\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^3 - \frac{3}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{n^3}\cdot\frac{r^{3n}}{R^{3n}}\cos 3\, n\varphi\right]. \tag{14}$$

Az F^{III} segédfüggvényhez mint feszültségfüggvényhez a (7) alattiak szerint az alábbi redukált feszítőerők tartoznak:

$$n_r^{\mathrm{III}} = -\frac{3R^2}{4h}\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 - 2\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} + \frac{n-2}{n^2}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}} + \frac{1-3n}{n^2}\cdot\frac{r^{3n-2}}{R^{3n-2}}\cos 3n\varphi\right],$$

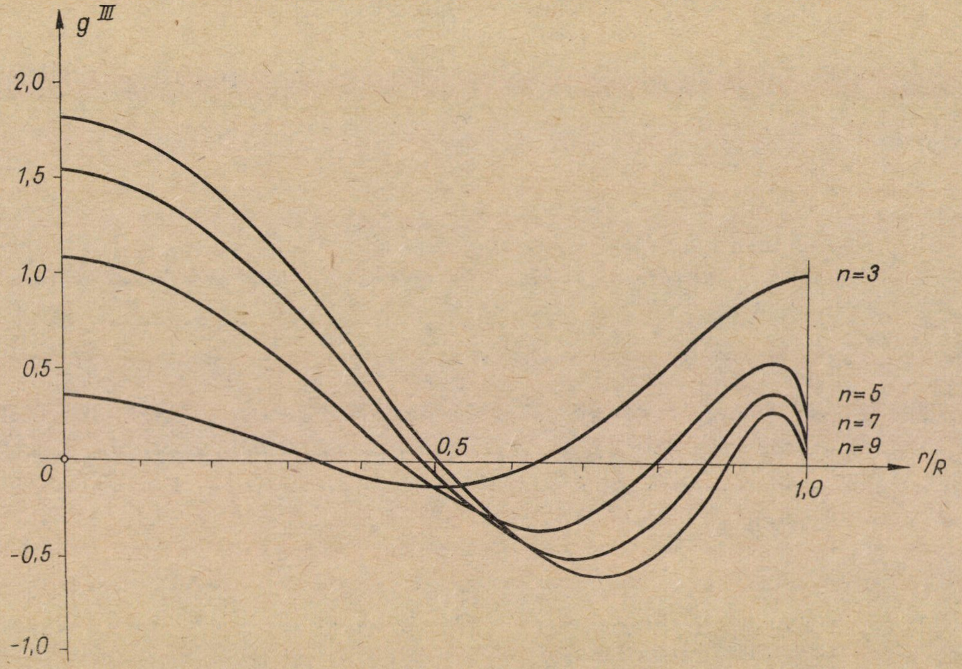
$$n_{r\varphi}^{\mathrm{III}} = -\frac{3R^2}{4h}\cdot\frac{3n-1}{n^2}\cdot\frac{r^{3n-2}}{R^{3n-2}}\sin 3n\varphi, \tag{15}$$

$$n_\varphi^{\mathrm{III}} = -\frac{3R^2}{4h}\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 - 6\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2}{R^2} + \frac{5r^4}{R^4} + \frac{(n-2)(2n-1)}{n^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}} - \frac{1-3n}{n^2}\cdot\frac{r^{3n-2}}{R^{3n-2}}\cos 3n\varphi\right].$$

Az F^{III} segédfüggvényhez a (4) képlet szerint a következő teherrendszer rendelhető:

$$g^{\mathrm{III}} = 3\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 - 4\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2}{R^2} + 3\frac{r^4}{R^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\right]. \tag{16}$$

Ez a teherrendszer forgásszimmetrikus elrendezésű. Diagramja különböző oldalszámú csillaghéjak esetében az 5. ábrán látható. A teherfüggvény egyes ordinátái a II. táblázatból vehetők ki.



5. *ábra.* A g^{III} teherfüggvény diagramja

II. táblázat

A g^{III} segédfüggvény értéke

r/R	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
0	0,333	0,750	1,080	1,333	1,531	1,688	1,815	1,920
0,05	0,323	0,735	1,062	1,313	1,509	1,665	1,792	1,896
0,10	0,294	0,691	1,009	1,254	1,446	1,598	1,722	1,825
0,15	0,248	0,620	0,923	1,158	1,342	1,490	1,609	1,709
0,20	0,189	0,524	0,806	1,028	1,202	1,342	1,456	1,550
0,25	0,121	0,410	0,665	0,868	1,030	1,160	1,267	1,355
0,30	0,050	0,284	0,505	0,686	0,832	0,950	1,048	1,129
0,35	−0,016	0,152	0,333	0,488	0,616	0,720	0,807	0,879
0,40	−0,073	0,023	0,159	0,284	0,390	0,478	0,552	0,614
0,45	−0,111	−0,091	−0,007	0,083	0,164	0,234	0,294	0,345
0,50	−0,125	−0,182	−0,155	−0,103	−0,049	0,000	0,044	0,083
0,55	−0,109	−0,239	−0,270	−0,261	−0,238	−0,211	−0,185	−0,160
0,60	−0,059	−0,252	−0,341	−0,377	−0,387	−0,385	−0,379	−0,369
0,65	0,026	−0,215	−0,356	−0,436	−0,481	−0,507	−0,521	−0,529
0,70	0,147	−0,123	−0,305	−0,426	−0,505	−0,559	−0,596	−0,622
0,75	0,298	0,020	−0,185	−0,336	−0,445	−0,525	−0,585	−0,630
0,80	0,471	0,203	−0,003	−0,166	−0,294	−0,394	−0,473	−0,536
0,85	0,651	0,401	0,216	0,064	−0,062	−0,168	−0,256	−0,330
0,90	0,820	0,574	0,421	0,302	0,201	0,114	0,036	−0,032
0,95	0,948	0,658	0,520	0,435	0,372	0,322	0,278	0,239
1,00	1,000	0,563	0,360	0,250	0,184	0,141	0,111	0,090

V. A feladat megoldása általában

A IV. alatt megismert segédfüggvények felhasználásával a feladat keresett feszültségfüggvényét — közelítésképpen — a következő alakban szerkesztjük meg:

$$F^* = c_1 F^{\mathrm{I}} + c_2 F^{\mathrm{II}} + c_3 F^{\mathrm{III}}. \tag{17}$$

Ebben a képletben a c_1, c_2, c_3 ismeretlen együtthatókat jelentenek. Utóbbiaknak oly értéket kell tulajdonítanunk, hogy az F^* közelítő feszültségfüggvénynek megfelelő

$$g^* = c_1 g^{\mathrm{I}} + c_2 g^{\mathrm{II}} + c_3 g^{\mathrm{III}} \tag{18}$$

teherrendszer lehetőleg kevéssé térjen el a tényleges $g = g(r)$ teherrendszertől.

A fenti követelmény legegyszerűbben *kollokációval* biztosítható. A kollokáció helyéül három alkalmas $r =$ konst kört választunk s azt írjuk elő, hogy e körök mentén

$$g^* = g \tag{19}$$

legyen. Ily módon három lineáris egyenletet kapunk. Ezekből a c_1, c_2, c_3 együtthatókat kiszámíthatjuk.

A c_1, c_2, c_3 együtthatók meghatározására célszerűen használható az ismert Ritz—Galerkin-féle eljárás is. Ez az adott esetben az

$$\int_0^R (g^* - g)^2 \, dr = \min!$$

feltétel teljesítését teszi szükségessé. A fenti követelmény nyilván akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} &\int_0^R (g^* - g)^2 g^{\mathrm{I}} \, dr = 0\,, \\ &\int_0^R (g^* - g)^2 g^{\mathrm{II}} \, dr = 0\,, \\ &\int_0^R (g^* - g)^2 g^{\mathrm{III}} \, dr = 0\,. \end{aligned} \tag{20}$$

A c_1, c_2, c_3 együtthatók legcélszerűbb értékét ebből a három lineáris egyenletből határozhatjuk meg. A számítás során az integrál kifejezések értékét numerikus eljárással célszerű megállapítani.

VI. Önsúlyteher esete

Ha a héj falvastagsága állandó, és a héjfalnak a *középfelület* területegységére vonatkoztatott fajlagos értéke $p_0 =$ konst, az *alaprajz* területegységére vonatkoztatott teherérték:

$$g = p_0 \sqrt{1 + (dz/dr)^2}\,.$$

Ez a teherérték a

$$\frac{dz}{dr} = 2\frac{h}{R} \cdot \frac{r}{R}$$

összefüggés felhasználásával így fejezhető ki:

$$g = p_0 \sqrt{1 + 4\frac{h^2}{R^2} \cdot \frac{r^2}{R^2}}\,. \tag{21}$$

Minthogy a g teherrendszer folytonos és körszimmetrikus elrendezésű, a feladat megoldására az V. alatt ismertetett eljárások alkalmazhatók.

A Ritz—Galerkin-féle eljárás alkalmazása esetében a c_1, c_2, c_3 együtthatókra a III—VI. táblázatokban közölt értékek adódnak.

III. táblázat

A c_1, c_2, c_3 együtthatók értéke $n = 3$ és $n = 4$ oldalú csillaghéjak esetében

h/R	$n = 3$			$n = 4$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0
0,25	1,0225	0,0438	0,0265	1,0328	0,0471	0,0237
0,30	1,0322	0,0622	0,0364	1,0469	0,0665	0,0327
0,35	1,0436	0,0832	0,0470	1,0631	0,0884	0,0424
0,40	1,0566	0,1067	0,0580	1,0815	0,1127	0,0526
0,45	1,0710	0,1324	0,0691	1,1019	0,1390	0,0629
0,50	1,0869	0,1601	0,0800	1,1241	0,1670	0,0732
0,55	1,1041	0,1896	0,0907	1,1481	0,1965	0,0834
0,60	1,1225	0,2207	0,1009	1,1736	0,2273	0,0933
0,65	1,1422	0,2532	0,1106	1,2006	0,2592	0,1028
0,70	1,1629	0,2870	0,1197	1,2290	0,2920	0,1119
0,75	1,1847	0,3219	0,1282	1,2586	0,2356	0,1205

IV. táblázat

A c_1, c_2, c_3 együtthatók értéke $n = 5$ és $n = 6$ oldalú csillaghéjak esetében

h/R	$n = 5$			$n = 6$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0
0,25	1,0399	0,0471	0,0190	1,0446	0,0457	0,0151
0,30	1,0568	0,0663	0,0261	1,0634	0,0643	0,0207
0,35	1,0763	0,0880	0,0337	1,0851	0,0853	0,0266
0,40	1,0983	0,1119	0,0417	1,1095	0,1083	0,0327
0,45	1,1225	0,1377	0,0497	1,1363	0,1330	0,0388
0,50	1,1489	0,1650	0,0577	1,1653	0,1591	0,0448
0,55	1,1771	0,1937	0,0655	1,1965	0,1865	0,0505
0,60	1,2072	0,2234	0,0729	1,2295	0,2148	0,0558
0,65	1,2389	0,2541	0,0800	1,2642	0,2440	0,0608
0,70	1,2721	0,2856	0,0867	1,3006	0,2738	0,0654
0,75	1,3067	0,3176	0,0930	1,3383	0,3041	0,0695

V. táblázat

A c_1, c_2, c_3 együtthatók értéke $n = 7$ és $n = 8$ oldalú csillaghéjak esetében

h/R	$n = 7$			$n = 8$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0
0,25	1,0478	0,0441	0,0122	1,0501	0,0425	0,0100
0,30	1,0680	0,0620	0,0166	1,0712	0,0597	0,0135
0,35	1,0911	0,0821	0,0213	1,0955	0,0791	0,0172
0,40	1,1171	0,1041	0,0260	1,1226	0,1002	0,0209
0,45	1,1457	0,1277	0,0306	1,1525	0,1229	0,0244
0,50	1,1766	0,1527	0,0350	1,1847	0,1468	0,0276
0,55	1,2097	0,1788	0,0391	1,2192	0,1717	0,0306
0,60	1,2448	0,2057	0,0429	1,2556	0,1974	0,0331
0,65	1,2816	0,2334	0,0462	1,2939	0,2238	0,0352
0,70	1,3200	0,2616	0,0491	1,3338	0,2506	0,0369
0,75	1,3599	0,2903	0,0516	1,3753	0,2779	0,0381

VI. táblázat

A c_1, c_2, c_3 együtthatók értéke $n = 9$ és $n = 10$ oldalú csillaghéjak esetében

h/R	$n = 9$			$n = 10$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0
0,25	1,0519	0,0411	0,0083	1,0532	0,0399	0,0070
0,30	1,0737	0,0577	0,0112	1,0755	0,0560	0,0093
0,35	1,0987	0,0764	0,0141	1,1012	0,0741	0,0117
0,40	1,1267	0,0968	0,0170	1,1300	0,0938	0,0139
0,45	1,1575	0,1186	0,0196	1,1613	0,1149	0,0159
0,50	1,1907	0,1416	0,0220	1,1953	0,1371	0,0175
0,55	1,2262	0,1655	0,0240	1,2316	0,1602	0,0188
0,60	1,2637	0,1902	0,0256	1,2698	0,1840	0,0197
0,65	1,3030	0,2154	0,0267	1,3100	0,2083	0,0201
0,70	1,3441	0,2412	0,0274	1,3519	0,2330	0,0200
0,75	1,3866	0,2672	0,0277	1,3953	0,2581	0,0195

VII. Hóteher esete

Ha a héjra egyenletesen megoszló hóteher hat, a feladat feszültségfüggvénye zárt alakban a következőképpen fejezhető ki [1]:

$$F^{(0)} = \frac{R^4 g_0}{8h}\left(-\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right). \tag{22}$$

A fenti képletben g_0 a hótehernek az *alaprajz* területegységére vonatkoztatott fajlagos értékét jelenti.

A szóban forgó esetben a héj redukált feszítő erőire a következő képletek adódnak:

$$n_r^{(0)} = -\frac{R^2 g_0}{4h}\left[1-(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right].$$

$$n_{r\varphi}^{(0)} = -\frac{R^2 g_0}{4h}(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-1}}\sin n\varphi\,, \tag{23}$$

$$n_\varphi^{(0)} = -\frac{R^2 g_0}{4h}\left[1+(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right].$$

VIII. Számpéldák

Az ismertetett számító eljárások alkalmazását két számpéldán mutatjuk be. A számpéldák tárgyául a *szokásosnál meredekebb* csillaghéjakat választunk, mert azt óhajtjuk igazolni, hogy a javasolt eljárások még ezekben a *szélsőséges* esetekben is kellő pontosságúak.

A vizsgálandó csillaghéjak egyike *ötoldalú*, másika *kilencoldalú*. A héj geometriai adatai mindkét esetben azonosak:

$$R = 20{,}0 \text{ m}, \qquad h = 14{,}0 \text{ m}.$$

A héjra ható teherként mindkét esetben azonos erőrendszert tételezünk fel. A héjfal önsúlyát a *középfelület* területegységére vonatkoztatott

$$p_0 = 200 \text{ kp/m}^2$$

fajlagos értékkel, a héjra ható hóterhet pedig az *alaprajz* területegységére vonatkoztatott

$$g_0 = 80 \text{ kp/m}^2$$

fajlagos értékkel vesszük számításba.

1. *Ötoldalú csillaghéj* (6. ábra)

A feladatot először *kollokációval* oldjuk meg. Illesztési helyekül az

$$r = 0{,}25\ R, \qquad r = 0{,}65\ R, \qquad r = 0{,}95\ R$$

köröket választjuk. Az önsúlyterhet a hóteherrel összegezve egyidejűleg vesszük számításba. Az így képzett teherösszeg értéke

az $r = 0{,}25\ R$	helyen:	291,99 kp/m²,
az $r = 0{,}65\ R$	helyen:	350,41 kp/m²,
az $r = 0{,}95\ R$	helyen:	412,80 kp/m².

Ez esetben az F^{I}, F^{II}, F^{III} segédfüggvényeknek megfelelő g^{I} illetve g^{II}, g^{III} teherértékek a (10) képlet, illetve az I. és II. táblázat szerint:

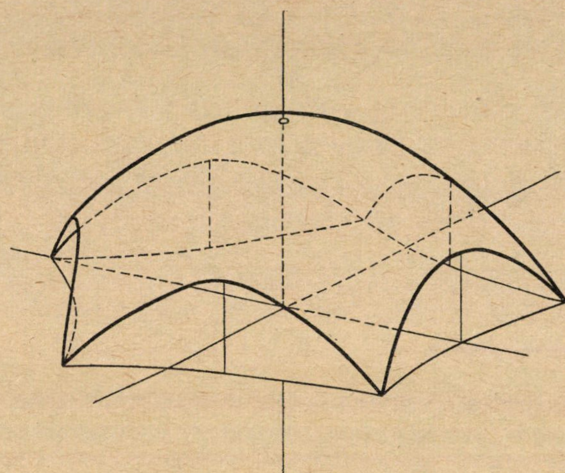
az $r = 0{,}25\ R$	helyen:	1,0,	—1,179,	0,665;
az $r = 0{,}65\ R$	helyen:	1,0,	0,426,	—0,356;
az $r = 0{,}95\ R$	helyen:	1,0,	1,083,	0,520.

A fenti értékek felhasználásával a három kollokációs egyenlet:

$$1{,}0\, c_1 - 1{,}179\, c_2 + 0{,}665\, c_3 = 291{,}99 \text{ kp/m}^2,$$
$$1{,}0\, c_1 + 0{,}426\, c_2 - 0{,}356\, c_3 = 350{,}41 \text{ kp/m}^2,$$
$$1{,}0\, c_1 + 1{,}083\, c_2 + 0{,}520\, c_3 = 412{,}80 \text{ kp/m}^2.$$

Ebből a három egyenletből

$$c_1 = 333{,}33 \text{ kp/m}^2$$
$$c_2 = 61{,}22 \text{ kp/m}^2$$
$$c_3 = 25{,}30 \text{ kp/m}^2.$$



6. ábra. Ötoldalú csillaghéj

Ezekkel az értékekkel számítva a közelítő teherfüggvény:

$$g^* = 333{,}33\, g^{\mathrm{I}} + 61{,}22\, g^{\mathrm{II}} + 25{,}30\, g^{\mathrm{III}}. \tag{24}$$

Ha a szóban forgó feladatokat a *Ritz—Galerkin eljárással* óhajtjuk megoldani, a c_1, c_2, c_3 együtthatókat a IV. táblázatból vehetjük ki:

$$c_1 = (1{,}2729 \cdot 200) + 80 = 334{,}58 \text{ kp/m}^2,$$
$$c_2 = 0{,}2856 \cdot 200 = 57{,}12 \text{ kp/m}^2,$$
$$c_3 = 0{,}0867 \cdot 200 = 17{,}34 \text{ kp/m}^2.$$

Ezen értékek figyelembevételével a közelítő teherfüggvény:

$$g^* = 334{,}58\, g^{\mathrm{I}} + 57{,}12\, g^{\mathrm{II}} + 17{,}34\, g^{\mathrm{III}}. \tag{25}$$

A javasolt számító eljárások pontosságának ellenőrzésére a héj különböző $r =$ konst körei mentén kiszámítottuk a közelítő g^* teherfüggvény értékét, valamint az

$$\varepsilon = \frac{g - g^*}{g}$$

hibahányadost. A számítás eredményét a VII. táblázat tartalmazza. E táblázatból megállapítható, hogy mindkét javasolt számító eljárás pontossága

VII. táblázat

A g^* teherérték, valamint az ε hibahányados értéke az ötoldalú csillaghéj esetében

r/R	Kollokációs eljárással számítva		Ritz—Galerkin eljárással számítva	
	g^*	ε	g^*	ε
0,00	287,18	−0,026	284,62	−0,016
0,05	287,34	−0,024	284,88	−0,015
0,10	287,83	−0,021	285,67	−0,013
0,15	288,71	−0,015	287,02	−0,009
0,20	290,05	−0,008	289,01	−0,005
0,25	291,99	0	291,70	+0,001
0,30	294,67	+0,006	295,20	+0,002
0,35	298,26	+0,015	299,63	+0,010
0,40	302,99	+0,020	305,12	+0,013
0,45	309,06	+0,023	311,83	→0,014
0,50	316,69	+0,022	319,87	+0,013
0,55	326,08	+0,019	329,35	+0,009
0,60	337,33	+0,011	340,29	+0,002
0,65	350,41	0	352,59	−0,006
0,70	365,07	−0,014	365,94	−0,016
0,75	380,66	−0,029	389,74	−0,053
0,80	395,96	−0,041	392,87	−0,033
0,85	408,89	−0,046	403,56	−0,032
0,90	416,17	−0,036	409,07	−0,018
0,95	412,80	0	405,30	+0,018
1,00	391,41	+0,077	386,35	+0,089

messzemenően kielégíti a gyakorlat igényeit. A g és g^* teherértékek közt jelentősebb eltérés csak a sarkok közelében, ott is csak egy egész szűk körzetben mutatkozik.

3. *Kilencoldalú csillaghéj* (7. ábra)

A feladatot ismét először *kollokációval* oldjuk meg. Ha a kollokáció helyéül ugyanazokat a köröket választjuk, mint az ötoldalú csillaghéj esetében, az ott ismertetett számításhoz hasonló számítással a c_1, c_2, c_3 együtthatókra a következő értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned} c_1 &= 348{,}45 \text{ kp/m}^2, \\ c_2 &= 52{,}54 \text{ kp/m}^2, \\ c_3 &= 9{,}58 \text{ kp/m}^2. \end{aligned}$$

Ezen értékek felhasználásával a közelítő teherfüggvény:

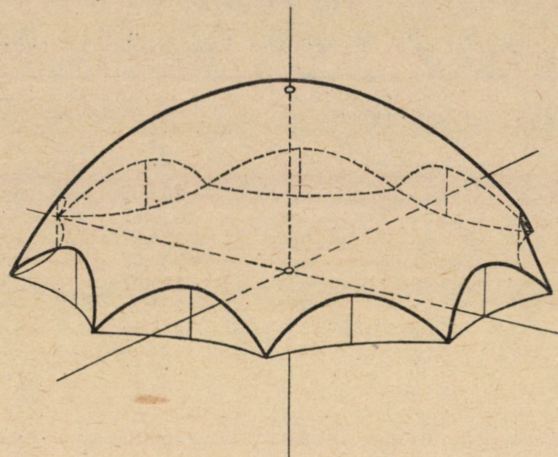
$$g^* = 348{,}45\ g^{\mathrm{I}} + 52{,}54\ g^{\mathrm{II}} + 9{,}58\ g^{\mathrm{III}}. \tag{26}$$

Ugyanezt a feladatot a *Ritz—Galerkin-eljárással* is megoldottuk. Ez esetben a c_1, c_2, c_3 együtthatókat a VI. táblázatból vehetjük ki:

$$\begin{aligned} c_1 &= (1{,}3441 \cdot 200) + 80 = 348{,}82 \text{ kp/m}^2, \\ c_2 &= 0{,}2412 \cdot 200 = 48{,}24 \text{ kp/m}^2, \\ c_3 &= 0{,}0274 \cdot 200 = 5{,}48 \text{ kp/m}^2. \end{aligned}$$

A fenti értékek felhasználásával a közelítő teherfüggvény:

$$g^* = 348{,}82\ g^{\mathrm{I}} + 48{,}24\ g^{\mathrm{II}} + 5{,}48\ g^{\mathrm{III}}. \tag{27}$$



7. *ábra*. Kilencoldalú csillaghéj

A közelítő g^* teherértékeket, valamint az

$$\varepsilon = \frac{g - g^*}{g}$$

VIII. táblázat

A g^* teherérték, valamint az ε hibahányados a kilencoldalú csillaghéj esetében

r/R	Kollokációs eljárással számítva		Ritz—Galerkin eljárással számítva	
	g^*	ε	g^*	ε
0,00	284,10	−0,015	283,74	−0,013
0,05	284,40	−0,014	284,10	−0,013
0,10	285,32	−0,012	285,16	−0,011
0,15	286,86	−0,009	286,96	−0,009
0,20	289,07	−0,005	289,49	−0,006
0,25	291,99	−0	292,79	−0,003
0,30	295,67	+0,003	296,90	+0,000
0,35	300,19	+0,008	301,84	+0,003
0,40	305,63	+0,012	307,68	+0,005
0,45	312,09	+0,013	314,47	+0,006
0,50	319,68	+0,014	322,26	+0,006
0,55	328,52	+0,012	331,13	+0,004
0,60	338,72	+0,007	341,14	+0,000
0,65	350,41	0	352,34	−0,005
0,70	363,64	−0,010	364,73	−0,013
0,75	378,27	−0,022	378,13	−0,022
0,80	393,73	−0,035	391,95	−0,030
0,85	408,30	−0,045	404,61	−0,035
0,90	417,82	−0,040	412,38	−0,027
0,95	412,80	0	405,37	+0,018
1,00	372,86	+0,121	370,86	+0,126

hibahányados értékét a héj különböző r = konst körei mentén a VIII. táblázatban tüntettük fel. Mint látható, mindkét javasolt eljárás pontossága ebben az esetben is teljesen kielégítő. Most is csupán a héj sarokrészén van a g és g^* teherértékek közt számottevő különbség, de ez az eltérés is a sarokponttól távolodva rohamosan csökken.

IRODALOM

1. CSONKA P.: Csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloidhéjak. *Műsz. Tud.* **42** (1970), 243—256.
2. CSONKA, P.: Membrane Shells with Vertically Supported Edge Beam. Simplified Calculation Methods of Shell Structures. *Proceedings of the Colloquium on Simplified Calculation Methods. Brussels*, September 4—6; 1961. North Holland Publishing Company, Amsterdam 1962. 219—234.
3. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Springer-Verlag, Wien 1959.
4. CSONKA, P.: Paraboloid Shell of Revolution Star-Polygonal in Plan. *Acta Techn. Hung.* **68** (1970), 319—334.

Axi-Symmetrically Loaded Paraboloid Shells of Revolution Star-Polygonal in Plan
Present paper deals with paraboloid shells of revolution star-polygonal in plan, in order to determine their membrane forces caused by axisymmetrically distributed, continuous vertical forces, such es dead load and uniformly distributed snow load. As an approximate solution of the problem, author establishes the stress function by a linear combination of three auxiliary functions. To each of these functions corresponds an axisymmetrically distributed vertical load system and each of them exactly satisfies the boundary conditions of the problem. For the case of dead load paper presents tables containing the expedient values of the unknown coefficients of the linear combination. In the case for uniformly distributed snow load the exact solution of the problem is expressed by simple closed formulae.

Achsensymmetrisch belastete Rotationsparaboloidschalen mit sternförmigem Grundriß.
Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Bestimmung der Membrankräfte von achsensymmetrisch belasteten Rotationsparaboloidschalen, die durch achsensymmetrisch verteilte Vertikalkräfte, wie z. B. Eigengewicht oder gleichmäßig verteilte Schneelast entstehen. Die Spannungsfunktion des Problems wird durch eine Linearkombination von drei Hilfsfunktionen angenähert, deren jede einem achsensymmetrisch verteilten vertikalen Lastsystem entspricht und gleichzeitig die Randbedingungen des Problems genau befriedigt. Für Eigengewicht enthält der Aufsatz Tafeln mit empfehlbaren Werten für die unbekannten Koeffizienten der Linearkombination. Für den Fall gleichmäßig verteilter Schneelast ist die exakte Lösung durch einfache, geschlossene Formeln ausgedrückt.