

# MÁGNESES TEREK NEMLINEÁRIS, HETEROPOLÁRIS FORGÓGÉPEK BEN\*

EDWARD A. ERDÉLYI\*\*

[Beérkezett: 1970. november 30-án]

Ha figyelembe vesszük a vasteltődés által okozott nemlinearitásokat, akkor a vilamos forgógépek üzemi tulajdonságainak meghatározására szolgáló szokásos lineáris elméletek nem használhatók. E tanulmány a szerző által kidolgozott, a kétdimenziós, nemlineáris vektorpotenciál-határérték probléma megoldására szolgáló módszereket tartalmazza. Ismerteti a parciális differenciálegyenletek átalakítását differenciaegyenletekké és a megoldásukra kidolgozott numerikus módszereket. Az eljárást kiálló pólusú forgógépekre alkalmazva illusztrálja.

## I. Bevezetés

Forgógépek tervezési módszerei leginkább az úgynevezett mágneses ohm-törvényen és a tapasztalaton alapulnak. Az üresjárási gerjesztés meghatározásához először felveszünk egy légrésindukciót. Ezután megbecsüljük az indukciót a mágneses kör különböző részeiben és a szükséges térerősségeket az anyagok  $B-H$  jelleggörbéiből vesszük. A mágneses feszültségeséseket összeadva nyerjük a gerjesztést. Terhelésnél megkíséreljük megbecsülni a mágneses feszültséget a légrés és a vas különböző részeiben, majd a légrés és a mező alakja alapján pontról pontra megbecsülni az egyes részek mágneses ellenállását. Alapjában véve ez próbálgatási folyamat, amelynek során megpróbáljuk felvázolni a valószínű fluxuscsatornákat azon célból, hogy azok mágneses ellenállását meghatározzuk. Ezt a fáradságos munkát folytatva megkapjuk a mágneses feszültséget egy zárt út mentén és ezt összehasonlítjuk a rendelkezésre álló gerjesztéssel. A kezdeti becsült értékeket ezután megfelelően módosítva az eljárást megismételjük egészen addig, amíg a kívánt egyezést el nem értük.

Ez a kényelmetlen és lassú módszer nem vezet mindig helyes eredményekre és általánosan elismert, hogy a mágneses ohm-törvény nem kielégítő alapkoncepció. Egy szisztematikusabb módszer kidolgozása, amellyel egyenáramú gépek mágneses tere meghatározható, már számos kutatót foglalkoz-

\* A cikk EDWARD A. ERDÉLYI professzor 1970 nyarán, a *Magyar Tudományos Akadémia* tartott előadásának anyaga.

\*\* Villamosmérnök, Colorado Egyetem professzora: Boulder (Colorado). Amerikai Egyesült Államok.

tatott. CARTER [1] klasszikus munkájában a Schwarz—Christoffel transzformáció alapján az egyenáramú gép főpólusa és armatúrája közötti fluxuseloszlás megoldását adta. CARTER matematikai teljesítménye jelentős volt, de csak nagyon egyszerű, idealizált gépkontúrokra alkalmazható.

HAGUE [2] felülvizsgálta és kiterjesztette Carter módszerét a Maxwell-egyenletek közvetlen megoldása alapján. Módszere főleg nem kiálló pólusú gépekre vonatkozik. HAGUE és a korábbi kutatók mind, a térprobléma explicit megoldására törekedtek és így szükségszerűen nagyon idealizált gép keresztmetszetekre szorítkoztak. MOTZ és WORTHY [3] villamosgépek mágneses terének meghatározására szolgáló eljárást ismertettek, amely Southwell relaxációs módszerét alkalmazza. Mindezekben a korai munkákban a vas permeabilitását végtelennek tételezték fel és a diszkrét áramokat folytonos árameloszlással helyettesítették.

BENEDIKT [4] nagy részletességgel írja le és számos jelentős példával illusztrálja az általa kidolgozott nomogramos módszert. BENEDIKT már figyelembe veszi a megfelelő egyenleteknek a vastelítődés által okozott nemlinearitását. A *Coloradó Egyetem* kutató csoportja az elmúlt néhány év során, villamos gépekben levő terek meghatározására kidolgozott egy numerikus módszert. A térjellemzők a forgógép keresztmetszetében mindenhol a Maxwell-egyenletek megoldásából adódnak. A felhasznált Poisson-egyenlet nem lineáris és a nehéz határfeltételeket kielégítő megoldás csoport-relaxációs eljárásokkal kombinált relaxációs módszerrel található meg. E tanulmányban az eljárást terhelt, kiálló pólusú gépben levő mágneses tér meghatározása során mutatjuk be. Teljes mértékben tekintettel vagyunk a telítődésre és a tényleges horonyáramokat vesszük számításba.

Néhány tervező felvetheti, hogy a jelenleg létező módszerek, amelyek a mágneses kört különböző részekre osztják fel, megfelelőek. Véleményünk szerint azonban ez a módszer forgógépek vizsgálatában számos fontos probléma eredményes megoldására nem alkalmas. Több szokásos egyszerűsítés elhagyása és nagysebességű elektronikus számítógépek alkalmazása jelentősen megnövelte a megoldásra alkalmas problémák körét.

Az úgynevezett kéttengely-elmélet alapján a terhelt szinkron gépek elméletét a század elején BLONDEL [5] és mások dolgozták ki. Ezen elméletben az armatúreakció két, egyaránt szinuszos eloszlású komponensre van felbontva. Az egyik komponens amplitúdója a pólus tengelyének irányába, a *hossztengely* irányába, a másiké a pólusok közötti, a *kereszttengety* irányába esik. Blondel elmélete kifejezetten a szuperpozíció elvén alapult, és így nem tudta a vas nemlineáris karakterisztikáját helyesen figyelembe venni. Magának a gépnek üzemi karakterisztikáit vektorábra felhasználásával határozza meg.

SUMEC [6] tökéletesítette ezt a diagramot, bizonyos feltételek bevezetésével figyelembe vette a telítődést, amelyet kiálló pólusú gép üresjárási

karakterisztikáiból becsült meg. DOHERTY és NICKLE [7] klasszikus tanulmányok egész sorában fejlesztették tovább a terhelt szinkron gép elméletét. E munkák mindegyikében a légrés mágneses vezetésének nagyságát a terheléstől függetlennek tételezték fel és mindegyikben szabadon használták a lineáris szuperpozíció elvét. Fluxusképek felrajzolásán alapuló görbesereget publikált WIESEMAN 1926-ban [8], amellyel meghatározta a terhelő áram hatását a légrésindukcióra, feltételezve, hogy szinuszos armaturagerjesztés hat vagy a hossz-, vagy a kereszttengetly irányában.

Általánosan használt közelítés generátorok állandósult és tranziens üzemének egyszerűsített tárgyalásánál a vas permeabilitását végtelennek, vagy állandónak venni. Ennek a feltételezésnek lehet oka az, hogy a két tengely-elmélettel nyert eredmények gyakran nem egyeznek a szinkron gépek mérésekből kapott jellemzőivel.

Nagy változások történtek a villamos gépek tervezésében mióta BLONDEL megalkotta elméletét. A tervezés egyre kevésbé a kísérletezésen alapuló tudománnyá vált. A legmodernebb gépek méretei olyan elképesztően nagyok, hogy a kísérletezés lehetetlenné válik, ugyanakkor viszont az üzemi jellemzőket előre, és a korábbinál pontosabban kell meghatározni.

A kéttengely-elmélet olyan általánosan elfogadott, hogy alkalmazói közül legtöbben már szem elől tévesztették az elmélet megalkotói által alkalmazott egyszerűsítő feltételezéseket. A hossz- és keresztirányú fluxusok, ha figyelembe vesszük a nemlinearitást, nem szuperponálhatók.

Bár néhány tervezőnek szentségtörésnek tűnhet a kéttengely-elmélet feladására vonatkozó javaslat, a következőkben mégis egy olyan — szimmetrikusan terhelt kiálló pólusú gépekben lévő fluxuselozslás meghatározására szolgáló — módszert ismertetünk, amely a nemlineáris vektorpotenciál-egyenlet numerikus megoldásán alapul és nem támaszkodik a linearizáló feltételezéseken nyugvó kéttengely elméletre.

## II. Heteropoláris gépek mágneses terének nemlineáris, parciális differenciál-egyenlete

### 1. Feltételezések

Azon célból, hogy a heteropoláris gépek radiális keresztmetszetében a mágneses indukció meghatározásának roppant nagy volumenű feladatát csökkentsük, a következő egyszerűsítő feltételezéseket tesszük:

a) A heteropoláris gép tengelyirányban végtelen hosszúságú, ily módon a feladat síkproblémává redukálódik;

b) a mágneses anyag izotróp, a telítődési görbe egyértékű, azaz a hiszterézis hatástól eltekintünk;

c) a gerjesztő tekercsek diszkrét áramait a gerjesztő tekercsek keresztmetszetében,  $\mathbf{J}$  vektorral jelzett, egyenletes áramsűrűségű áramtérrel helyettesítjük;

d) a mágneses indukció a gép kontúrjain kívül elhanyagolható.

Nem fogjuk azonban alkalmazni azt a feltételezést, hogy a permeabilitás végtelen nagy, vagy a mágneses indukciótól független nagyságú.

### 2. *A mágneses anyagok alapegyenlete*

A térjellemezők közötti összefüggést megadó mágnesezési görbe általában a következőképpen adott:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1)$$

ahol a  $\mu$  permeabilitás a  $H$  függvénye.

E tanulmányban ezen egyenletnek KING [9] által javasolt másik alakját használjuk:

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B}, \quad (2)$$

ahol  $\nu$  az anyag fajlagos mágneses ellenállása, amely  $B$ -nek a függvénye és nyilvánvalóan reciproka a  $\mu$  permeabilitásnak. Egysége a racionalizált MKS mértérendszerben méter/henry.

### 3. *A vektorpotenciál parciális differenciálegyenlete*

Az eltolási áramok elhanyagolásával az első Maxwell-egyenlet erősáramú frekvenciáknál a következőre redukálódik

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (3)$$

Az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciál rotációja definíció-egyenlete

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (4)$$

Coulomb szerint felvehetjük, hogy

$$\text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Az áramsűrűség-vektor folytonosságára vonatkozó egyenlet

$$\text{div } \mathbf{J} = 0.$$

A (3)—(9) egyenletet a (2) felhasználásával kombinálva

$$\text{rot } (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = 0. \quad (5)$$



Az *a*) feltételezés miatt a tér kétdimenziós, így felírható tehát, hogy

$$B_z = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0;$$

továbbá, hogy

$$J_x = 0, J_y = 0, J_z = J.$$

Így

$$A_x = A_y = 0 \text{ és } \mathbf{A} = A_z.$$

Az (5) parciális differenciálegyenlet kifejtve derékszögű, illetve poláris koordinátarendszerben

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (6)$$

és

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\nu}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial \Phi} \right) = -J. \quad (7)$$

A (6), (7) egyenletekben  $x$ ,  $y$ ,  $r$  és  $\Phi$  ortogonális koordinátákat jelölnek. A koordinátarendszer  $z$  tengelye egybeesik a gép tengelyével.

#### 4. A mágneses indukció számítása

A (6), (7) egyenletek megoldása megadja a vektorpotenciált a heteropoláris gép keresztmetszetében. A  $\mathbf{B}$  mágneses indukció mint az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciál rotációja nyerhető. Derékszögű koordinátákban az indukció komponenseire adódik:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{és} \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (8)$$

Hasonlóan poláris koordinátákban az indukció komponensei

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \Phi} \quad \text{és} \quad B_\Phi = -\frac{\partial A}{\partial r}. \quad (9)$$

Az indukció ezután mint a komponensek négyzetösszegéből vont négyzetgyök számítható.

#### 5. Határfeltételek

A (6) és (7) egyenletek megoldásának a következő határfeltételeket kell kielégítenie:

a) A hossz tengelyben üresjáráskor és tisztán reaktív terhelésnél a vektorpotenciál állandó. A fluxusvonalaknak merőlegeseknek kell lenniök a kereszt tengelyre.

b) Levegő—vas határfelületeken a  $\mathbf{H}$  mágneses térerősség tangenciális és a  $\mathbf{B}$  mágneses indukció normális komponensének folytonosan kell átmennie. Sarkoknál e feltételeknek kell teljesülniök a sarkot alkotó mindkét határfelületen a sarokponttól végtelen közeli távolságban.

c) Áramterek határán az áramot vivő vezető permeabilitása a levegő illetve a vezetőt körülvevő szigetelés permeabilitásával egyezik meg. A  $\mathbf{H}$  tangenciális komponense a lineáris áramsűrűség miatt nem folytonos, a  $\mathbf{B}$  normális komponense folytonos.

d) Terhelésnél a vektorpotenciál kétszeres pólusosztással periódikus függvény marad, tehát egy  $P$  pontbeli  $A_p$  vektorpotenciál nagyságra egyező, előjelre ellentétes lesz az ugyanazon íven, de pólusosztással odébb levő  $P'$  pont  $A'_p$  vektorpotenciáljával.

e) A vektorpotenciál a gép kontúrján kívül és a forgórész belső furatában zérus, feltételezve, hogy a levegő permeabilitása a gépen kívül zérus.

### III. A parciális differenciálegyenlet átalakítása véges differenciákat tartalmazó alakra

#### 1. Diszkrétizálás és rácsháló

A (6) és (7) egyenlet olyan explicit megoldása nem lehetséges, amely tekintetbe veszi a különböző tartományok bonyolult kontúrajait, a határfeltételeket és nemlinearitásokat.

A numerikus megoldás első lépéseként a parciális differenciálegyenletet parciális differenciaegyenletekkel helyettesítsük. Ezért a gép keresztmetszetének folytonos tartományát rácshálózattal helyettesítjük, ahol a rácspontok kicsiny, de véges távolságra vannak egymástól. Ezekben a differencia-egyenletekben az eredeti egyenletek parciális deriváltjait az azokat közelítő algebrai differenciákat tartalmazó kifejezésekkel helyettesítjük. Az eredményű adódó változó együtthatós algebrai egyenletrendszer megoldjuk a vektorpotenciálra. Eredményül az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciál értékeit kapjuk a diszkrét rácspontokban, amely így a nemlineáris probléma közelítő megoldását jelenti.

#### 2. A rácshálózat (1., 2. ábra)

Azért, hogy minimális fáradsággal vagy különleges eljárás alkalmazása nélkül indexelhessük a rácspontokat, korábbi dolgozatoknál már elkerülhetetlennek látszott mind a radiális, mind a transzverzális rácsvonalak kiterjesztése a teljes vizsgált gépkeresztmetszetre. A radiális rácsvonalak számát

általában meghatározzák a radiális vagy közel radiális hornyok és fogak alakja, valamint elhelyezkedése. A rácsvonalakat a határfelületekhez közel kell elhelyezni, hogy a határfeltételeket teljesítsük. Minthogy a sztátor és a rotor konstrukciók által megkívánt rácsvonalak általában nem esnek egybe, jelentős megtakarítás adódik rácspontokban és következésképpen memóriában, ha a sztátoron és a rotoron a saját struktúrájuk által megkívánt különálló rácshálózatot használunk. Ezért tehát kényelmesebb a sztátor és rotor rácshálót egymástól szétválasztani.

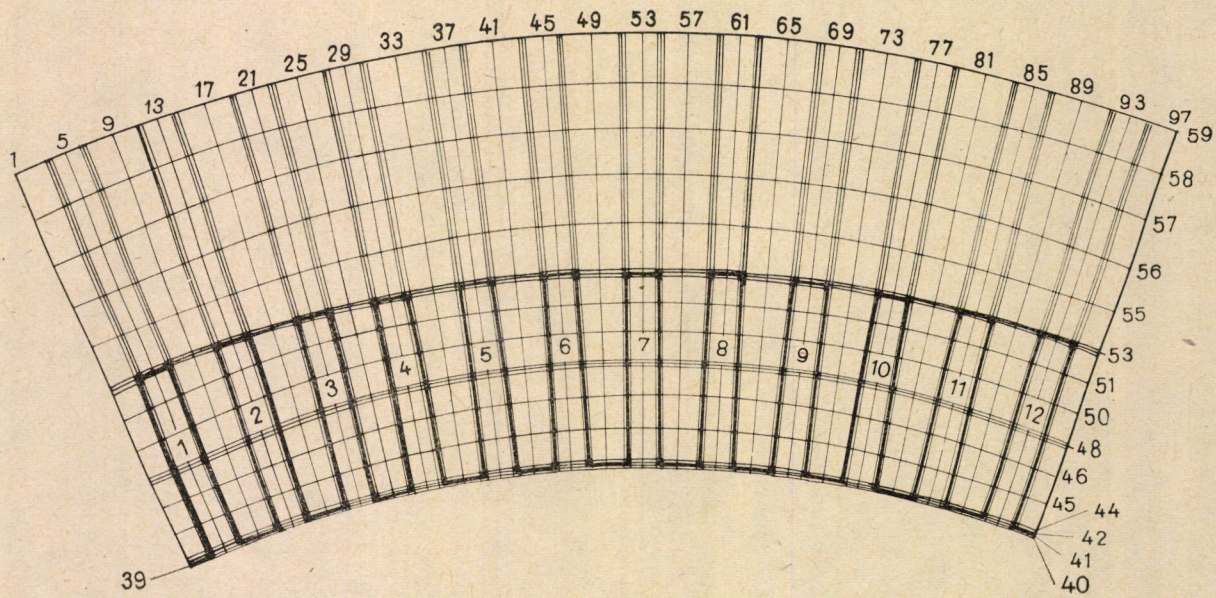
A légrés ebben a rendszerben két poláris rácshálóval van fedve: az egyik a sztátorhoz, a másik a rotorhoz van kötve. A vektorpotenciálok folytonosságát lineáris interpoláló eljárás biztosítja. A sztátor és rotor rácshálóknak két közös köralakú rácsvonala van a légrésben.

A transzverzális kör rácsvonalakat  $K$  betűvel jelöljük, és folytonosan számozzuk. A 2. ábra rotor rácsvonalrendszerének  $K 38$  rácsvonala egybeesik az 1. ábrán látható sztátorrácsháló  $K 40$  rácsvonalával. Hasonlóan a rotorháló  $K 39$  és a sztátorháló  $K 41$  vonalai azonosak. A sztátor-rácshálózat radiális vonalai a sztátor  $K 40$  (rotor  $K 38$  körvonala) körvonalánál végződnek. Hasonlóan minden radiális rotor rácsvonal a rotor  $K 39$  körvonalánál végződik (a sztátor háló  $K 41$  körvonala). A radiális rácsvonalakat, vagy hornyok esetén a horonyoldalakkal párhuzamos rácsvonalakat  $J$  betűvel jelöljük és folytonosan számozzuk.

### 3. Sztátor-rácsháló

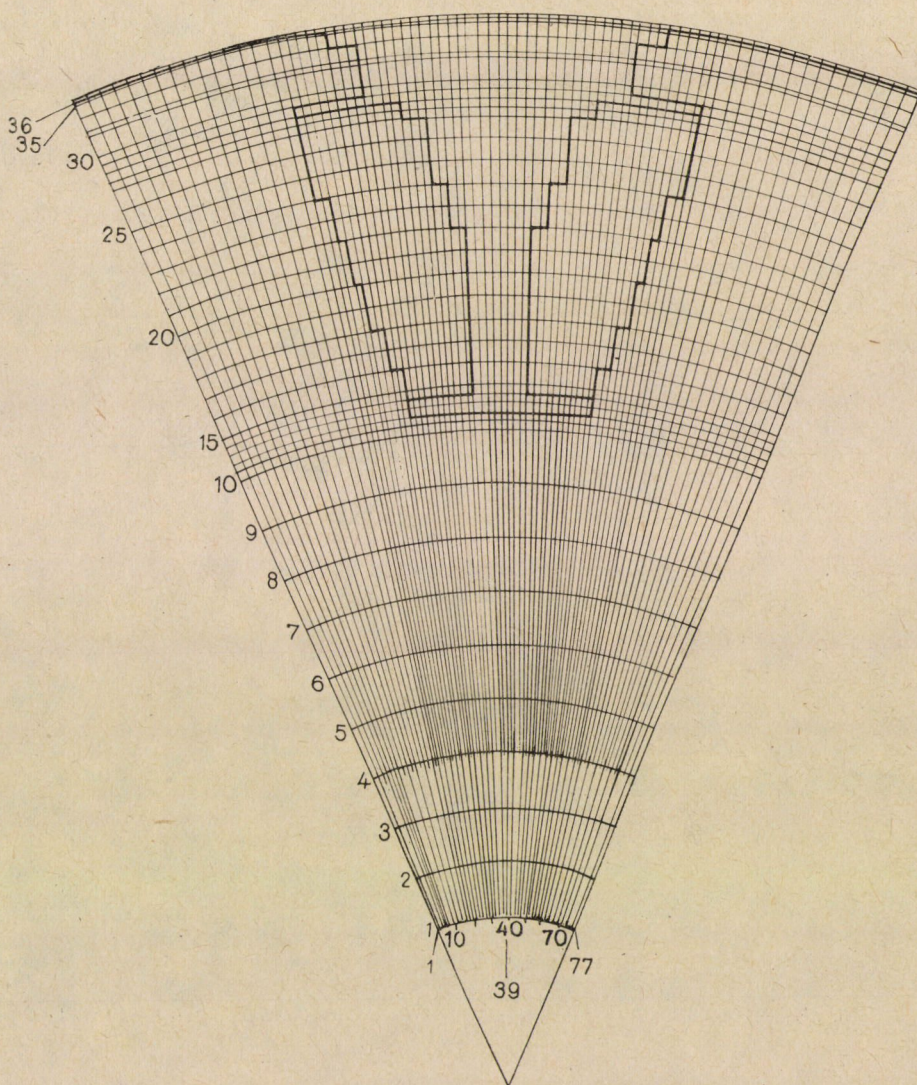
Az 1. ábrán a sztátor félig-meddig köralakú rácsvonalai a  $K 40$  rácsvonallal kezdődnek és a sztátor-kivágás  $K 59$  rácsvonallal ábrázolt külső kontúrjáig terjednek. A  $K 55$ -től  $K 59$ -ig a rácsvonalak körök. A  $K 42$ -től  $K 54$ -ig a rácsvonalak részben körívekből és húrokból állnak, azért mert a sztátor hornyok felületei derékszögű rácsozattal vannak fedve. Így például az 1. ábra  $I$  hornyának  $J$  vonalai 2-től 8-ig a  $K 42$  és  $K 47$  ívek között mind párhuzamosak a horony oldalával. A horony oldalait a  $J 3$  és  $J 7$  vonalak határozzák meg.  $K 42$ -től  $K 47$ -ig a rácsvonalak  $J 2$  és  $J 8$  vonalak közötti részei hurok, amelyek merőlegesek a horonyoldalakra. A horonyoldalakkal párhuzamos  $J$  vonalak, a  $K 40$  és  $K 42$ , illetve  $K 55$  és  $K 59$  rácsvonalak között, mint a középpontból húzott radiális vonalak folytatódnak. Feltételezzük, hogy a hornyok négyszögletesek és a horonyék bevágásoktól eltekintünk. A fogfejeknél tovább finomított rácshálóval a horonyék bevágások okozta telítődést könnyen figyelembe vehetnénk.

A sztátor-fognak  $I$  és  $2$  hornyok között megmaradt részére poláris rácshálót választottunk. Ennek a polár koordinátarendszernek kezdőpontja a  $J 8$  rácsvonal meghosszabbításának metszéspontjában van (a  $2$  horony oldalával párhuzamos). Hasonló különálló poláris rácshálókat használunk a többi,



1. ábra. Állórész-rácsháló





2. ábra. Forgórész-rácsáló

szomszédos hornyok közötti fogrészeknél is. Az ilyen rács elfogadott elnevezése policentrikus. Sztátornál a policentrikus középpontok az állórészfurattal koncentrikus kör kerületére esnek.

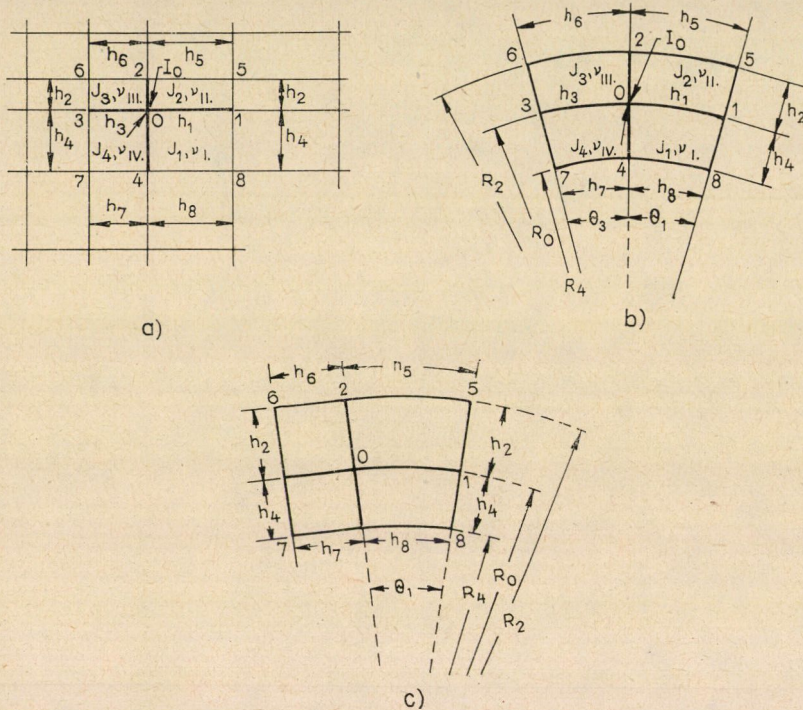
#### 4. Rotor-rácsáló

A 2. ábrán a  $K$  kör rácsvonalak a rotoron 1—39-ig terjednek. A rotoron belső furatot tételeztünk fel az origó és a  $K$  1 vonal között. Ez a fel-



tételezés szükségszerű azért, hogy a differenciál egyenletek és a differencia kifejezések ne váljanak szingulárisak. A rotor rácsrendszer  $K$  vonalai teljes körök, mivel tisztán polár koordináta rendszert használunk a gerjesztő rendszer diszkrétizálására.

$J 1$  és  $J 14$  között két egymást követő radiális rácsvonal közötti távolság  $3/4^\circ$ . Két szomszédos radiális rácsvonal közötti távolság  $J 14$  és  $J 58$  között



3. ábra. Rácsháló csoportok: derékszögű (a), poláris (b) és kombinált (c)

$1/2^\circ$ . A rácsrendszer szimmetrikus a kereszttenegelyre ( $J 39$  vonal), így a  $J 58$  és  $J 72$  közötti vonalak távolsága  $3/4^\circ$ .

### 5. Parciális differencia-algoritmus

A számítóprogram ésszerűsítése céljából előnyös egy differencia-algoritmus kidolgozása, amely minden típusú rácsháló csoportra érvényes — azaz derékszögű, poláris és a 3. ábrán látható a kettőből kombinált koordináta-rendszereknél is.

Az amper-törvény felhasználásával a  $J$ ,  $K$  rácspont  $A_0$  vektorpotenciálja következőképpen fejezhető ki:

$$A_0 = (I_0 + \sum_i \alpha_i A_i) \sum_i \alpha_i; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

Az egyenletben  $\alpha_i$  a háló geometriájának és a mágneses ellenállásoknak a következő függvénye:

$$\alpha_1 = (\nu_2 h_2 + \nu_1 h_4)/2h_1, \quad \alpha_3 = (\nu_3 h_3 + \nu_4 h_4)/2h_3; \quad (11a, b)$$

$$\alpha_2 = [\nu_2(h_1 + h_5) + \nu_3(h_3 + h_6)]/4h_2, \quad (11c, d)$$

$$\alpha_4 = [\nu_4(h_3 + h_2) + \nu_1(h_1 + h_8)]/4h_4.$$

Az  $I_0$  áramtag az áramsűrűségek és a hálócsoport geometriájának függvénye:

$$I_0 = (1/8) [J_1(h_1 + h_8) h_4 + J_2(h_1 + h_2) h + J_3(h_3 + h_6) h_2 + J_4(h_3 + h_2) h_4]. \quad (12)$$

A rácspontok távolságára a következő összefüggés áll fenn. Derékszögű hálónál

$$h_1 = h_8 = h_3, \quad h_2 = h_3 = h_6. \quad (13a, b)$$

Hengeres polár koordinátáknál a  $h_1 - h_8$  rácspontok távolsága

$$h_1 = R_0 \Theta_1, h_2 = R_2 - R_0, h_3 = R_3 \Theta_3, h_4 = R_0 = R_4; \quad (14a, b, c, d)$$

$$h_3 = R_2 \Theta_2, h_6 = R_2 \Theta_3, h_7 = R_1 \Theta_3, h_8 = R_1 \Theta_1. \quad (14e, f, g, h)$$

Az  $I_0$  áramok a (10) egyenletben és (11), (12) egyenletekkel adott állandók tárolva vannak a számítógép memóriájában. Minden iterációhoz csupán a (11) egyenlettel meghatározott állandókat, a (10) egyenlettel meghatározott vektorpotenciálokat és a következőkben ismertetett mágneses ellenállásokat kell meghatározni.

### 6. A mágneses indukciók differencia kifejezései

Egy rácselemben a  $\nu$  fajlagos mágneses ellenállás átlagos értéke a rácselem geometriai középpontjában fellépő  $B$  indukció függvénye. Például a mágneses indukció radiális komponensének átlagos értéke a 3a. ábrán látható 0, 1, 5, 2 rácselemben

$$B_{r1} = \left[ \frac{A_1 - A_0}{2h_1} + \frac{A_5 - A_2}{2h_5} \right]. \quad (15a)$$

### A tangenciális komponens

$$B_{\phi 1} = \left[ \frac{A_1 - A_0 + A_5 - A_2}{2h_2} \right]. \quad (15b)$$

A (15) egyenletekben a  $h$  értékek derékszögű háló esetén a (13a) és (13b) egyenletekből, poláris háló esetén a (14a—h) egyenletekből határozhatók meg. A rácselem geometriai középpontjának indukciója ezután mint az indukció radiális és tangenciális komponense négyzetösszegéből vont négyzetgyök számítható. A  $B$  indukcióhoz tartozó  $\nu$  fajlagos mágneses ellenállás a következőkben leírt numerikus eljárással kapható meg.

#### 7. A mágnesezési görbe számítógépes leképzése

A tapasztalat szerint egyetlen függvénnyel nagyon ritkán érhető el jó közelítés a mágnesezési görbe teljes felhasznált tartományában. Az alkalmazott iterációs eljárás során az indukció túllőhet az erősen telített tartományba is, így megfelelő közelítést kell elérni a telítődési ponton túl is. Ennek elérésére a mágnesezési görbét 2—4 részre kell felbontani, hogy biztosítsuk a relaxációs eljárások jó konvergenciáját. A mágneses ellenállás számítása a telített tartományban — nem megfelelő közelítésnél — nagy értékű fajlagos mágneses ellenállásokhoz vezethetnek, amelyek gátolják a konvergenciát, mivel a telített tartományban a  $B$  indukció kis változásához a  $H$  térerősség nagy változásai tartoznak.

A mágnesezési görbe felosztása könnyen megvalósítható, azonban a számítógép programban biztosítani kell annak érzékelését, hogy a fajlagos mágneses ellenállás vagy egy adott indukcióhoz tartozó mágneses ellenállás számításához a mágnesezési görbe melyik részét kell használni.

Ha már egyszer eltökéltük a mágnesezési görbe felosztását, akkor valójában már nem számít, hogy azt kevesebb vagy több szakaszra bontjuk. Az érzékelési idő független a választott szakaszok számától. A számítási eljárás gyorsításához elkerülhetetlen, hogy minden szakaszban a térerősség vagy az indukció számításához szükséges műveletek száma kicsi legyen. Ez legkönnyebben TRUTT és ERDÉLYI [10] által leírt megfelelően kis szakaszokon belüli lineáris interpolációval érhető el.

## IV. Relaxáció pontról-pontra

### 1. Váltakozó módszer

Miután az  $N$  rácspontokra felírtuk a véges differencia egyenleteket, egy iterációs módszert használunk az  $N$  egyenlet egyidejű szimultán megoldására. Az  $N$  egyenletből álló egyenletrendszer megoldása a potenciálokat



eredményezi az  $N$  rácspontban. A nemlinearitások okozta probléma könynyítésére az iterációs eljárás két lépésre van osztva. Az elsőben a potenciálokat relaxáljuk feltételezve, hogy a mágneses ellenállások az adott helyen nem változnak az iteráció során. A második lépésben az ellenállásokat számítjuk újra a vektorpotenciálokból a később ismertetett módon. Számos programmal nyert tapasztalatok azt mutatták, hogy a vektorpotenciál problémáknál ez három egymást követő lépésben valósítható meg a legjobban, nevezetesen

- a) A potenciálok relaxációja;
- b) az a) eljárás gyorsítása;
- c) a fajlagos mágneses ellenállások alulrelaxációja.

### 2. A potenciálok relaxációja

Kezdeti értékeket veszünk fel a potenciálokra és az ellenállásokra. Az áramok  $J_0$  értékét a (12) egyenlethől határozzuk meg. A potenciálokat relaxáljuk minden rácspontban, tehát az eredeti értéket helyettesítjük a (10) egyenlet algoritmusa alapján számított értékekkel.

### 3. A konvergencia gyorsítása multiplikatív csoportrelaxációval

Ha semmilyen eszközzel sem gyorsítanánk az iterációs eljárások konvergenciáját néhány száz iterációra lenne szükség a vektorpotenciálok végső értékének eléréséhez. Stokes tételén alapuló csoport vagy blokk relaxációs technika alkalmazása szokásos. A *Colorado Egyetemen* az AHAMED [11] által javasolt multiplikatív konvergencia gyorsítást (*MAC*) vezettük be. A gerjesztési törvényt:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (16)$$

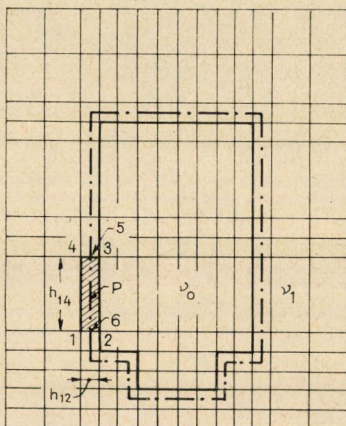
a tér minden tartományában ki kell elégíteni. A *MAC* eljárásnál a tartomány körül alkalmasan választott zárt úton (általában a külső kontúr) képezzük a  $H$  vonalintegrálját az  $r$ -ik iteráció után és ezt  $F(r)$ -rel jelöljük. Az áramsűrűség felületi integrálja (az  $I$  gerjesztés) a független változó. Az  $I$  és  $F(r)$  hányadosát  $C(r)$ -rel jelöljük. A (16) egyenlet általában nem teljesül az  $r$ -ik iterációnál. Az egyezés kieszközlésére az integrálási út mentén minden potenciált megszorozunk  $C(r)$ -rel.

Számos integrálási utat és egy a potenciál korrekciójára szolgáló formulát tartalmazó bővített *MAC* eljárást írnak le ERDÉLYI és mások. REECE [12] arra a következtetésre jutott, hogy a módszer sikeres alkalmazása a felhasználó gyakorlatán és ítéletén múlik és egy megbízható automatikus eljárás valószínűleg gazdaságtalan lenne.

#### 4. A vektorpotenciálok additív gyorsítása

A *Colorado Egyetemen* jelenleg az additív konvergencia gyorsító eljárást (*ACC*) használjuk, amelyet *LA VALLÉE—POUSSIN* és *LION* [13] dolgozott ki. Elméleti bizonyítása azon a feltevésen alapul, hogy a levegőből álló tartományok, „ablakok” zérus mágneses ellenállású vassal teljesen zártak.

Az eljárásnál egy zárt integrálási utat veszünk fel a vashan (4. ábra), amely szorosan körül fogja az ablak kontúrját és képezzük a  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  vonalintegrált a zárt út mentén. A gerjesztési törvény szerint az integrálnak ismét



4. ábra. Az additív konvergencia gyorsításhoz felvett integrálási út

a görbe által közrefogott  $I_c$  árammal kell egyenlőnek lennie. Ez azonban az iteráció kezdeti stádiumában még nem fog teljesülni. Az eredményül adódó különbség az integrációs út súlyozott hosszával elosztva egy  $\Delta A$ -val jelölt mennyiséget ad. Az  $A'$  korrigált vektorpotenciál érték definíciója

$$A' = A + \Delta A. \quad (17)$$

Ha az alkalmazott feltevésünk teljesülne, ennek gyorsítania kellene a vektorpotenciál differencia egyenlet iterációs eljárását. Ekkor a konvergencia ugyanolyan lenne, mintha a tartományok ellenállásdifferenciái kicsinyek lennének.

Számos számítógép program azt mutatta, hogy a gyorsítás ezen módszere a konvergencia javulásához vezethet még ha az idealizálási feltevések pontosan nem is teljesülnek. Valóságos gépeknél mindig ez a helyzet, amelyeknél az ablakok azaz a hornyok nem zártak és a vas mágneses ellenállása nem zérus. A számítások eredményei azt mutatták, hogy a konvergencia additív gyorsítása a túrelaxációk oszcillációját is némileg csillapítja.



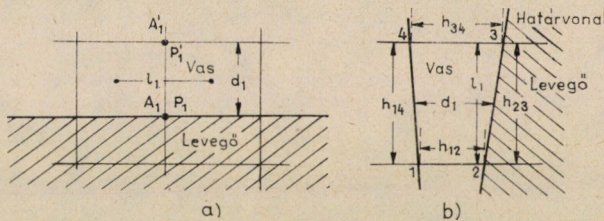
A szerzők a módszert nem terjesztették ki nemlineáris problémákra. Az 5. ábrán alapuló nemlineáris formulát ERDÉLYI [16] és mások dolgozták ki.

$$\Delta A = [I_c + \sum_i (v_{fe})_i (l_i/d_i) (A'_i - A_i) / \sum_i (v_{fe})_i (l_i/d_i)], \quad (18)$$

$$\Delta A = \frac{I_c + \sum_i \left( \frac{v_{fe}}{2} \right)_i \frac{h_{14} + h_{23}}{h_{12} + h_{34}} [A_1 - A_2 + A_4 - A_3]}{\sum_i (v_{fe})_i \frac{h_{14} + h_{23}}{h_{12} + h_{34}}} \quad (18a)$$

és

$$h_{34} = h_{12}; \quad h_{14} = h_{23}.$$



5. ábra. Konvergencia gyorsítása nemlineáris esetben

A (18a) egyenlet egyszerűsödik:

$$\Delta A = \frac{I_c + \sum_i (v_{fe}/2)_i (h_{14}/h_{12}) (A_1 - A_2 + A_4 - A_3)}{\sum_i v_{fe} (h_{14}/h_{12})} \quad (18b)$$

### 5. A mágneses ellenállások alulrelaxációja

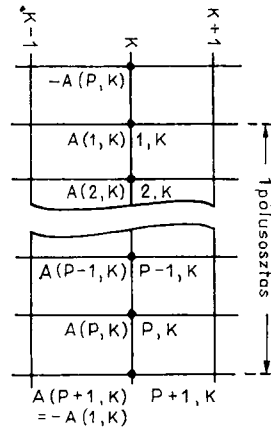
A tapasztalat azt mutatta, hogy (15) egyenletből számolt értékek oszcillációhoz vezethetnek és a konvergencia sebessége csökken. Ezért a  $(r + 1)$ -ik iteráció után a (15) egyenlettel számolt  $v_{r+1}$  mágneses ellenállást alulrelaxáljuk

$$v^{r+1} = (v_{r+1} - v^r) \omega(u) + v^r \quad (19)$$

## V. A szukcesszív sor túlrelaxációs technika (SLOR)

A relaxációs iteráció gyorsabb konvergenciájának biztosítására tanácsos egy pont potenciáljának meghatározásához a négy szomszéd pontnál több pontot figyelembe venni. Ez okból a sor iterációs eljárást vezetjük be. A fent leírt pontról pontra iterációs módszernél egy pont vektorpotenciálja

a négy déli, nyugati, északi és keleti irányba eső szomszéd pont függvénye volt. A sor iterációs módszernél egy rácsvonalon levő pontok potenciáljai a két szomszédos rácsvonal potenciáljaiból adódnak. A sor iterációkon alapuló vektorpotenciál differencia egyenletek az ún. Young-féle  $A$  tulajdonsággal rendelkeznek [14]. Ily módon enyhe túlrelaxáció lehetséges még a mágneses tér nemlineáris kezelésénél is.



6. ábra. Periodicitási feltétel

A pontról pontra relaxációk lassú konvergenciájának kiküszöbölésére a gyorsabban konvergáló *SLOR* eljárásban egy rácsvonal minden pontjának potenciálját egyidejűleg relaxáljuk és ahogy a továbbiakban megmutatjuk túlrelaxálásuk valóban lehetséges.

### 1. Nehézségek a periodicitási feltételek teljesítésében

A potenciálok implicit megoldása egy vonal mentén — ha a határ-feltételek Dirichlet vagy Neumann típusúak — egy tridiagonális mátrixhoz vezet. Ekkor a potenciálok szimpla rekurziós formulával nyerhetők [15]. Terhelésnél mind a sztátor mind a rotor vezetőkben áram folyik és a 6. ábrán látható ún. periodicitási feltételeket ki kell elégíteni. A potenciáloknak egy  $K$  vonalon ki kell elégíteni a következő feltételt:

$$A(J_1K) = -A(J + P_1K),$$

ahol  $2P$  a  $K$  vonalon levő kontúr—periódus rácspontjainak a száma. A potenciálok a  $K$  vonalon az  $r$ -ik iteráció során a következő egyenlethez vehetők:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I} & -g_1(\mathbf{I}) & 0 & 0 & 0 & g_3(\mathbf{I}), \\ -g_3(2) & \mathbf{I} & -g_1(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & -g_1(\mathbf{P}-\mathbf{I}) & \\ g_1(\mathbf{P}) & 0 & & 0 & -g_3(\mathbf{P}) & \mathbf{I} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A(\mathbf{I}, K) \\ A(2, K) \\ A(\mathbf{P}_1 K) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C(\mathbf{I}) \\ C(2) \\ C(\mathbf{P}) \end{vmatrix} \quad (20)$$

vagy

$$|G| |A| = |C|. \quad (20a)$$

A  $g$  és  $C$  együtthatók a következőket jelentik:

$$g_1(\mathbf{I}) = \alpha_i(\mathbf{I}) / \sum_i \alpha_i(\mathbf{I}); \dots g_1(\mathbf{P}) = \alpha_1(\mathbf{P}) / \sum_i \alpha_i(\mathbf{P}), \quad (21a-n)$$

$$g_3(\mathbf{I}) = \alpha_3(\mathbf{I}) / \sum_i \alpha_i(\mathbf{I}); \dots g_3(\mathbf{P}) = \alpha_3(\mathbf{P}) / \sum_i \alpha_i(\mathbf{P}); \quad (22a-n)$$

$$C(\mathbf{I}) = [\alpha_2(\mathbf{I})A(\mathbf{I}, K+1) + \alpha_4(\mathbf{I})A(\mathbf{I}, K-1) + I_0(\mathbf{I}, K)] / \sum_i \alpha_i(\mathbf{I}), \quad (23a)$$

$$C(\mathbf{P}) = [\alpha_2(\mathbf{P})A(\mathbf{P}, K+1) + \alpha_4(\mathbf{P})A(\mathbf{P}, K-1) + I_0(\mathbf{P}, K)] / \sum_i \alpha_i(\mathbf{P}). \quad (23n)$$

Itt  $i = 1, 2, 3, 4$ .

A (20) mátrix elemeit csökkentjük átvive a  $g_3(\mathbf{I})$  és  $g_1(\mathbf{P})$  tagokat az egyenlet jobb oldalára és összevonva őket a  $C$  vektor megfelelő  $C(\mathbf{I})$  és  $C(\mathbf{P})$  tagjaival. A módosított  $C$  vektort  $D$ -vel jelöljük. Ebben a lépésben az  $A(\mathbf{I}, K)^{r-1}$  és  $A(\mathbf{P}, K)^{r-1}$  potenciálokat, amelyek az  $(r-1)$ -ik iterációnál adódnak használjuk az  $r$ -ik iteráció során az  $A(\mathbf{J}, K)^r$  potenciálok számításához:

$$|G'| |A| = |C|, \quad (24)$$

ahol

$$|G'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_3(2) & 1 & -g_1(2) & & \\ & -g_3(3) & 1 & -g_1(3) & \\ & & & & \\ 0 & 0 & & -g_3(\mathbf{P}) & 1 \end{vmatrix} |D| = \begin{vmatrix} D(1) \\ D(2) \\ D(3) \\ \cdot \\ D(\mathbf{P}) \end{vmatrix}. \quad (24a, b)$$

Az új  $|G'|$  mátrix tisztán tridiagonális lesz és a jólismert rekurzív formula használható.

## 2. $A$ vektorpotenciálok túlrelaxációja

Elliptikus parciális differenciálegyenletek relaxációs módszerekkel történő megoldásánál kimutatták, hogy a differencia egyenletek szimultán megoldásának konvergenciája nagy mértékben javítható túlrelaxációs tényezőként ismert súlyozó faktorok alkalmazásával. Ezt a következőképpen használjuk:

$$A'(J, K)_{r+1} = A(J, K)_r + W[A(J, K)_{r+1} - A(J, K)_r]. \quad (25)$$

A (25) egyenletben  $W$  a túlrelaxációs tényező és a  $r$  az befejezett iterációk száma,  $A_{r+1}$  a rácspontban a potenciál új számított értéke.

Ez a módszer használható nemlineáris differenciálegyenletre is, bár jelenleg elméletileg ez nem igazolható. A leggyorsabb konvergenciához tartozó optimális  $W$  érték nemlineáris problémáknál analitikailag nem található meg csupán kísérletileg.

A sor iterációs technika megengedi a túlrelaxációt, mivel az eleget tesz az  $A$  tulajdonságnak. Skalár potenciál problémákon nyert tapasztalatok szerint a túlrelaxáció nemlineáris problémákra is alkalmazható, ha mérsékeljük a túlrelaxációs tényezőt. Növekvő telítődéssel ezt a tényezőt rendszerint csökkenteni kell. Egyenáramú gépen szerzett tapasztalatok alapján a vektorpotenciálok túlrelaxációja alkalmazható, ha a túlrelaxációs tényező 1,3 körül van és biztosítjuk a potenciálok és a maradékok oszcillálásának csillapítását.

### 3. $A$ konvergencia ellenőrzése

A nagy számítási költségek miatt az iteráció nem folytatódik, ha mérnöki szempontból elfogadható eredményeket értünk el. A maradékok definíciója

$$\varrho(J, K) = [A(J, K) - I_0(J, K) + \sum_i (\alpha_i A_i)] / \sum \alpha_i \text{ és } i = 1, 2, 3, 4. \quad (26)$$

Az  $r$ -ik  $SLOR$  iteráció maradékai a következő egyenletből nyerhetők:

$$|\varrho^r(J, K)| = |G'[A^r(J, K)]| \cdot |A^r(J, K)| - |D[A^r(J, K)]|. \quad (27)$$

A szerző jelenlegi programjaiban az  $R_S$  maradékok abszolút értékeinek összege definíció szerint

$$R_S = \sum_K \sum_I |\varrho^r(J, K)|, \quad (28)$$

ahol  $K = 1, \dots, K_{(\max)}$ ;  $J = 1, \dots, J_{(\max)}$

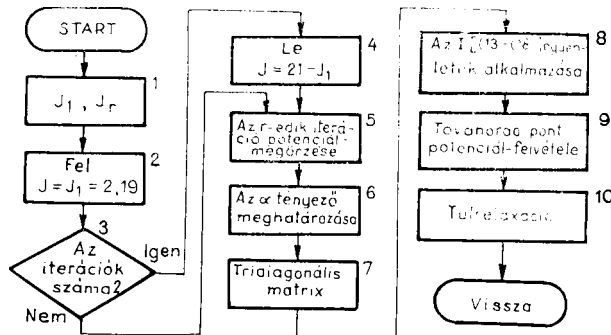
és a maximális  $R_M$  maradékot használjuk mint a konvergencia kritériumát. Ha  $R_S$  és  $R_M$  értékek egyaránt kisebbek egy bizonyos előre meghatározott  $\varepsilon(S)$  és  $\varepsilon(M)$  határnál és mindketten monoton csökkennek, akkor feltételezzük, hogy az  $A$  megfelelő megoldásrendszerét megkaptuk és az iterációt leállítjuk.

### 4. $A$ műveletek sorrendje (7. ábra)

A műveletek sorrendjének megválasztása ahhoz, hogy egy adott terhelési állapot és rotor pozíció mellett a vektorpotenciálokat megkapjuk, számos

előző program tapasztalatai alapján történt. További útmutatásként az alábbi blokkvázlat szerinti számítógép programmal végzett kb. 30 rövid és számos hosszabb futtatás szolgált. A  $K 59$ -tól  $K 1$  rácsvonalakig (vagy az ellenkező irányban) a relaxációs iteráció végrehajtása a következő lépésekben történt:

- szukcesszív sor túlrelaxáció a sztátoron ( $K 59$ -tól  $K 21$ -ig);
- interpoláció a  $K 21$  vonalon;
- szukcesszív sor túlrelaxáció a rotoron ( $K 19$ -tól  $K 1$ -ig);
- minden ablaknál a konvergencia additív gyorsítása csoportrelaxációval;



7. ábra. A számítási folyamat blokkvázlata

- a maradékok számítása minden egyes belső rácspontban;
- a maradékok  $R_S$  abszolút értékei összegének meghatározása;
- az  $R_M$  legnagyobb maradék nagyságának és helyének megkeresése;
- annak vizsgálata, hogy a maradékok  $R_S$  abszolút értékének összege és az  $R_M$  legnagyobb maradék kisebb-e, mint az előre felvett  $\epsilon_S$  és  $\epsilon_M$  mennyiségek.
- a mágneses ellenállások számítása és az új ellenállások alulrelaxációja.

### 5. A számítás befejező részei

Az  $a$ )– $i$ ) lépéseket addig kellett ismételni, amíg a  $h$ ) pontban foglalt feltételek nem teljesültek. Ezután kezdődött a következő befejező eljárás:

$j$ ) az  $a$ ) és  $c$ ) lépések túlrelaxációs tényezőit 1,00-ra csökkentettük és elhagytuk a konvergencia additív gyorsítását ( $d$ ) lépés). Az iterációt folytattuk, amíg az  $f$ ) és  $g$ ) kritériumok monoton csökkentek. A maradékok abszolút összegének növekedésekor az iterációt leállítottuk és kiszámítottuk

$k$ ) a mágneses indukciók radiális komponenseit a rotor felületén. Ezután következett

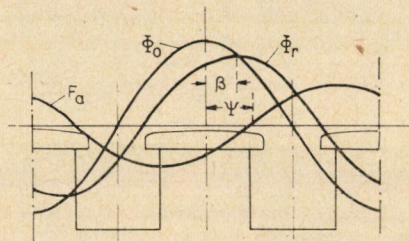


1) a vektorpotenciálok, mágneses ellenállások, maradékok, a maradékok abszolút értékeinek összege, a maximális maradék nagysága és helye és a radiális indukciók kinyomtatása.

## VI A számítások eredményei

### 1. Iterációk pontról pontra

A leírt módszereket számos kiálló pólusú gépre alkalmaztuk. A pontról pontra iteráció módszerét egy háromfázisú generátor légrésében a radiális mágneses indukció meghatározására használtuk. Névleges jellemzők 2750 kVA, 2300 V vonali feszültség, csillag kapcsolás, 60 Hz, 900 fordulat/perc, 8 pólus



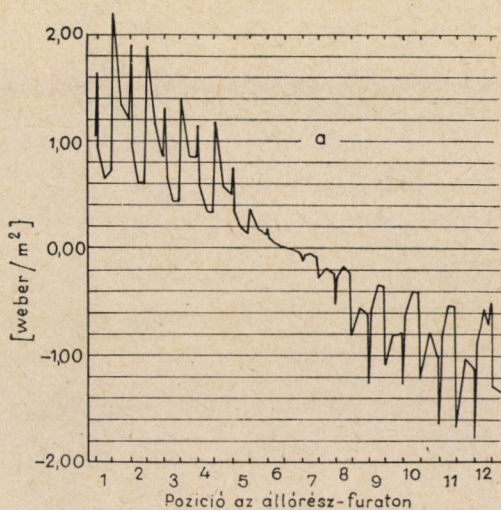
8. ábra. Belső fázisszög

(1. és 2. ábra). A radiális légrésindukciót a névleges 10 500 ampermenet/pólus és a teljes terheléshez tartozó 696 A zérus belső terhelési szögű áramnál határoztuk meg. A probléma nemlineáris jellege miatt a belső teljesítmény szög új fogalmát vezettük be.

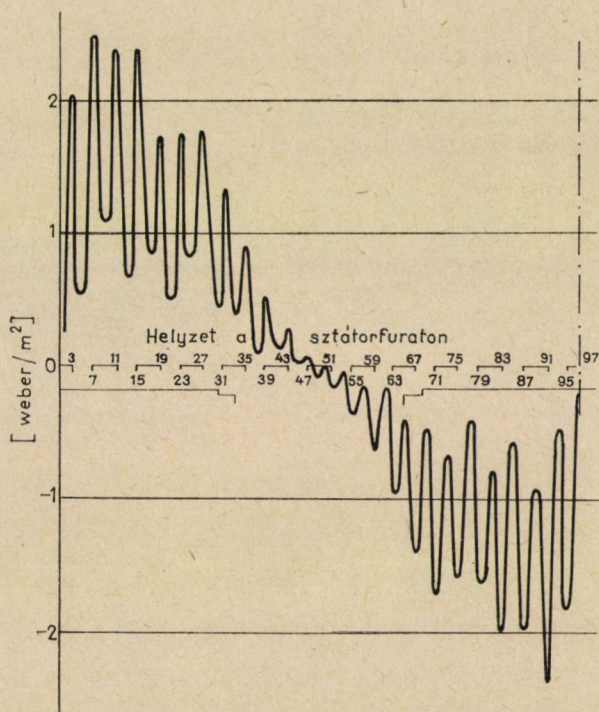
A szinkron gépek nemlineáris analízisének természetéből (8. ábra) következik, hogy  $\psi$  szöget kell független változónak választani és nem a kapcsolásfeszültség-áram szöget, mint ahogy azt telítetlen generátorok lineáris elméleténél tesszük. A javasolt módszernél a belső teljesítménytényezőt kell először megbecsülni, a terhelési szög és teljesítménytényezőhöz tartozó  $\theta$  szög a számítások eredményeiként adódnak.

Egy tipikus eredményt ábrázoltunk a 9. ábrán, amely az armatúra furatnál fellépő radiális légrésindukciót mutatja. Digitál-analóg átalakító berendezést használtunk a görbe felrajzolásához. Ez az ábra nem túlságosan használható a tervező számára, mert a rácsrendszer felvételéből eredő harmonikusokat tartalmaz, így ezt Fourier analízisnek vetettük alá, hogy az eredményeket a gyakorlatnak megfelelő alakban kapjuk meg. Ezután képeztük a harmonikusok összegét a 2. horonyharmonikusokig. A 10. ábrán látható az eredő fluxuseloszlás mint ezen harmonikusok összege.





9. ábra. Radiális légrésindukció (számítógépen nyert eredmény)



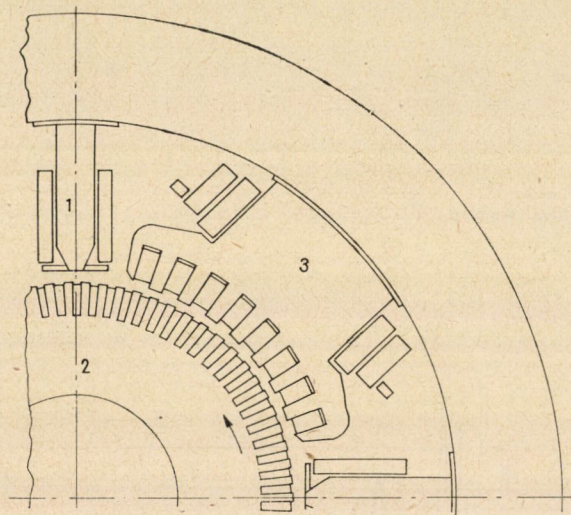
10. ábra. Radiális légrésindukció (harmonikusok összege)



## 2. A SLOR alkalmazása egyenáramú gépekre [16]

Az új SLOR eljárást alkalmaztuk a 11. ábrán vázlatosan feltüntetett 4 pólusú Westinghouse gépre (500 Le, 7500 V, 544 A, 300/900 fordulat/perc). A 11. ábra mutatja az alkalmazott rácshálót egy pólus felére.

A teljes terhelés állapotát négy rotor pozícióban és a kétszeres terhelés állapotát az 1. rotorpozícióban számítottuk. Az áramok és a gerjesztések a következők voltak: armatúra áram 544 A; külső gerjesztés 8300 A-menet;



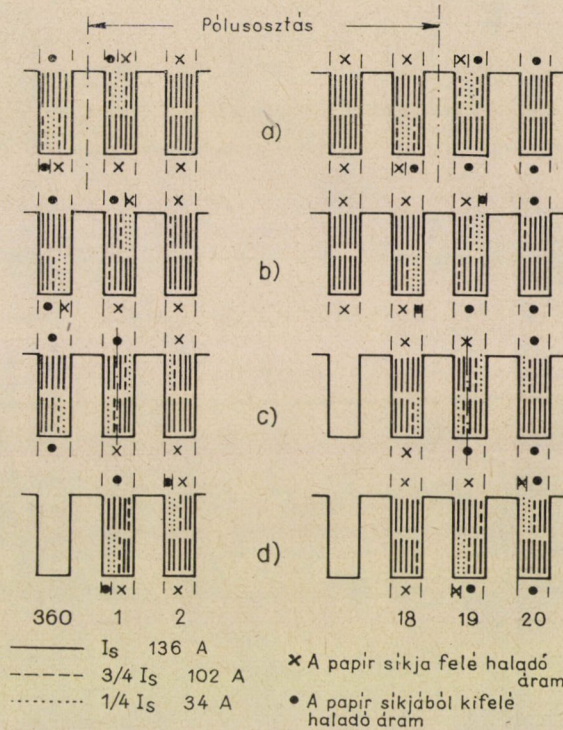
11. ábra. Egyenáramú gép vázlatos keresztmetszete (1 északi segédpólus; 2 a kefetengely; 3 északi főpólus)

kompenzáló tekercs gerjesztése 8720 ampermenet; kompaund gerjesztés 540 ampermenet; segédpólus gerjesztés 5450 ampermenet. A kommutáló zóna vezetőinek árama a 12. ábrán látható.

A vektorpotenciál túlrelaxációs tényezőjét 1,3-re választottuk. Ez az érték az alább ismertetett tapasztalaton alapul. A mágneses ellenállások alulrelaxációs tényezőjét az összes iteráció során 0,1 értékben állandónak tartottuk. A maradékok abszolút értékének összegére előre megadott elfogadható maximumot  $\varepsilon_S = 2,2 \times 10^{-1}$  Wb/m és  $\varepsilon_M = 1,75 \times 10^{-3}$  Wb/m értékre vettük. A számításokat 3 különböző számítógépen végeztük. Az  $\varepsilon_S$  és  $\varepsilon_M$  konvergencia kritériumok eléréséhez átlagosan 90–100 iterációra volt szükség. Az  $\varepsilon_S$  és  $\varepsilon_M$  elérése után 20 iterációt végeztünk túlrelaxáció és a konvergencia gyorsítása nélkül. Általában összesen 110–130 iteráció után fejeződött be a számítás, ily módon minden esetben  $R_S$  és  $R_M$  végső értékei  $\varepsilon_S$  és  $\varepsilon_M$  értékeknél kisebbek voltak.



*Az eredő radiális légrésindukciók.* A 13. ábrán látható az armatúra felületénél a teljes terheléskor fellépő eredő légrésindukció a négy rotor pozícióban. Az egyes radiális rácsvonalak indukcióit egyenes szakaszokkal kötöttük össze, így az eredmény csipkézett. Ez részben a hornyok sarkainak hatásából, részben a rácsháló megválasztásából ered. Hogy használható eredményeket



12. ábra. A kommutáló zóna áramai (a 1. rotor-helyzet, b 2. rotor-helyzet, c 3. rotor-helyzet, d 4. rotor-helyzet)

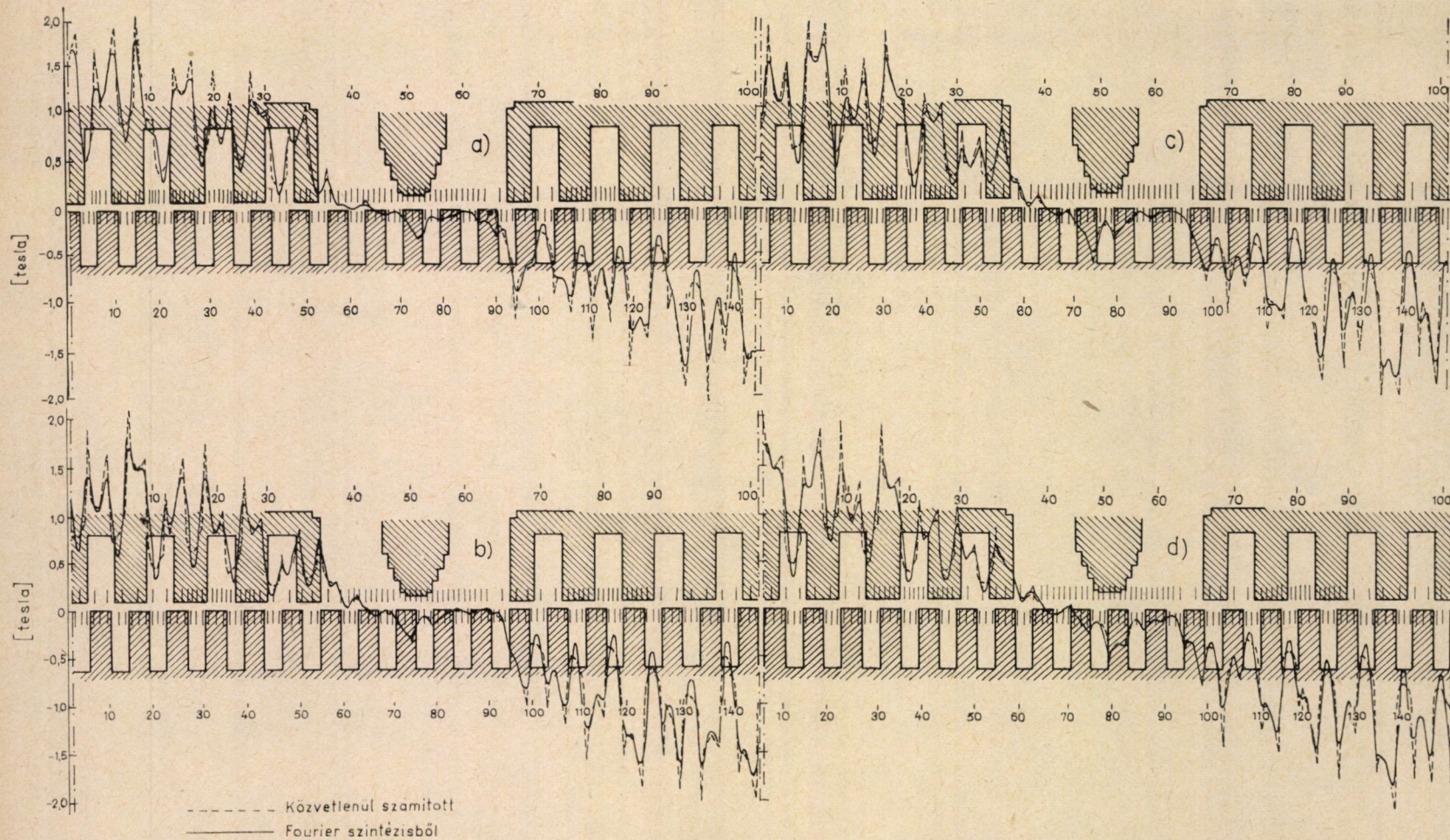
nyerjük, a törtvonallal összekötött indukcióértékeket Fourier analízisnek vetettük alá és a jelentős harmonikusokat a harmadik horonyharmonikusig összegeztük. Az így összerakott görbék vastagon vannak jelölve.

A 13a—13d. és 14. ábrán látható, hogy a kompenzáció ennél a gépnél teljesen tökéletes. A mágneses indukció változása a különböző rotor pozícióknál és változásai a kommutáló zónában világosan láthatók.

### 3. A SLOR alkalmazása nagy szinkron gépre [17]

Az új programot alkalmaztuk egy háromfázisú 82,5 MVA, 16,5 kV, 40 pólus, 60 Hz csillag kapesolású hidrogenerátorra is. A rácsháló a 15. ábrán látható. A nagy plóusszám miatt a generátort kiterítettük. A radiális légrés-

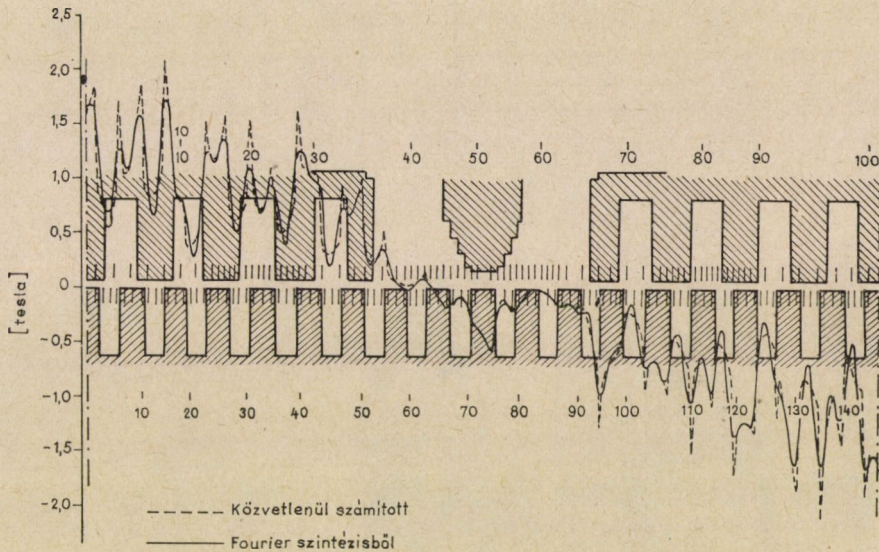






indukciókat és a 16. ábrán látható üresjárású karakterisztikát határoztuk meg. Látható, hogy a számított pontok jól egyeznek a méréssel.

A névleges terhelésnél  $\psi = \pi/6$  belső terhelési szög, 1680 A gerjesztő áram, 2886,75 A/fázis armatúra áram mellett számoltunk. A radiális indukciót a sztátor furaton a 17. ábrán a szaggatott vonalú csipkés görbe ábrázolja. Ennek Fourier analízisével a rácrendszerből adódó harmonikusok elmaradnak. A vektorábra mennyiségeinek kiszámításához meghatároztuk a horony



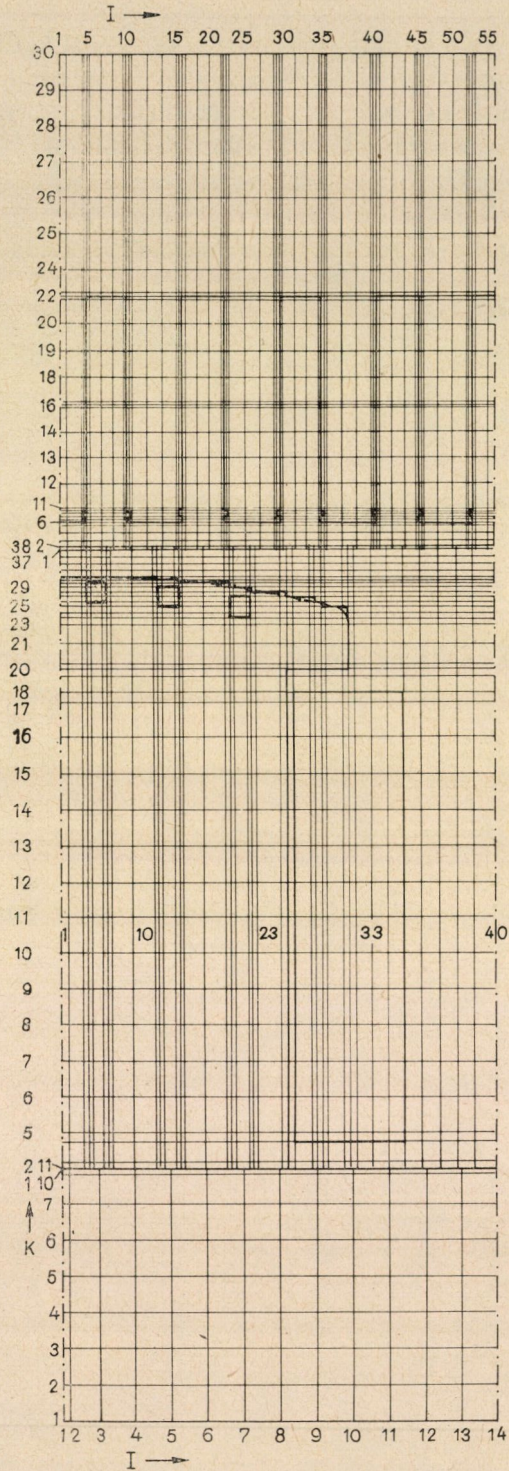
14. ábra. Radiális légrésindukció kétszeres névleges terhelésnél

középpontokat összekötő vonal mentén is az indukciókat, de ez itt nincs feltüntetve.

Az  $E_0$  üresjárású feszültség, amelyet a 18. ábrán látható fluxuselozlás alapján számítottunk 18 892,0 V (vonali). A Fourier analízisből (V. 2.) számított belső (vonali) feszültség 16 931,0 V. A belső teljesítménytényezőt  $\psi = 30^\circ$ -nak vettük. Az üresjárású feszültség  $E_0$  és a belső feszültség közötti szög a Fourier analízisből  $4,76^\circ$ -ra (villamos) adódott. A terhelési szög  $\delta = 12^\circ$  (villamos). A teljesítménytényezőt  $\cos \Theta = 0,951$  (induktív) és az armatúra szórásreaktanciája  $X_{al} = 0,142$  (viszonylagos egység). A vektorábra egyszerű, mivel az összes adatokat a Fourier analízisből megkaptuk (18. ábra).

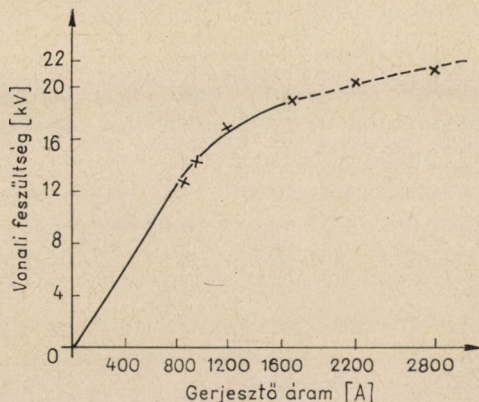
13. ábra. Radiális légrésindukció teljes terhelésnél (a 1. rotor-helyzet, b 2. rotor-helyzet, c 3. rotor-helyzet, d 4. rotor-helyzet)



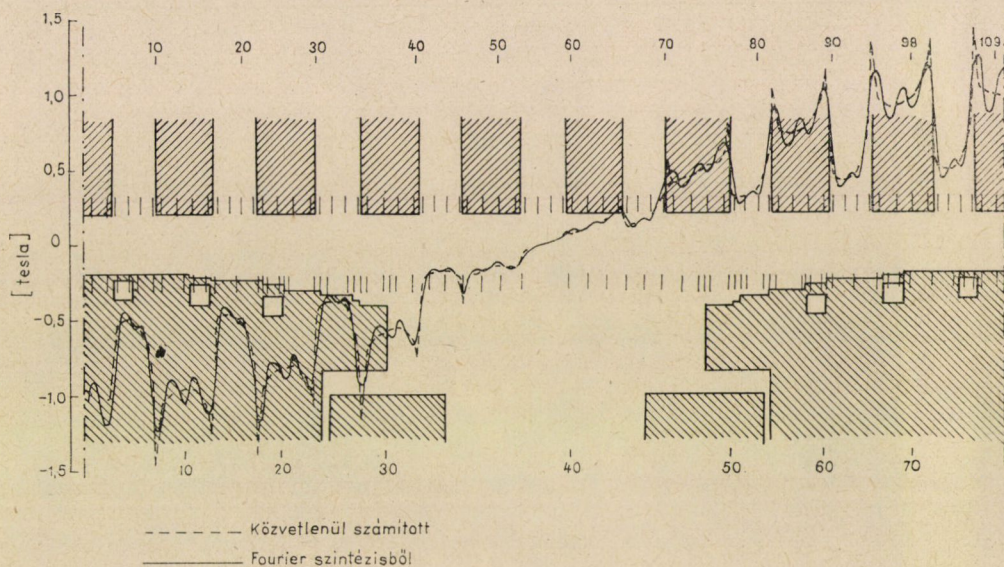


15. ábra. Nagy hidrogén-generátor rácshálózata





16. ábra. Hidrogenerátor üresjárási jelleggörbéje (— — — mért, × számított)



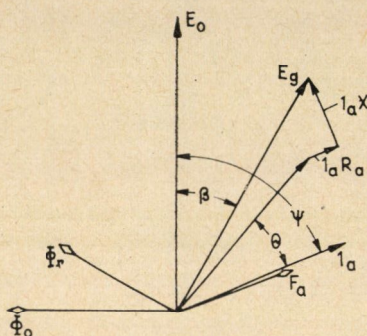
17. ábra. A radiális légrésindukció eloszlása névlegesen terhelt, nagy hidrogenerátorban

#### 4. A fluxusképek

Hogy a fluxuselozslást szemléletesebben lássuk, egy programot készítettünk a fluxusgörbéknek a számítógép és egy  $x-y$  író segítségével történő felrajzolására. Ez az új program a következő lépéseket hajtja végre. Végigpásztazza a keresztmetszet rácsvonalait, hogy az ismertetett módszerrel meghatározott diszkrét vektorpotenciálokból megtalálja az adott mágneses potenciálú pontokat. Ezután az adott vektorpotenciálú helyet tartalmazó rácsban a pont helyét interpolációval határozza meg. A pontok helye derék-



szögű koordinátákkal van kifejezve és miután az összes azonos vektorpotenciálú pontot megtalálta, a koordinátaíró kinyomtatja. Ezt az eljárást számos vektorpotenciál értékre megismételve a fluxusvonalakról átfogó képet nyerünk. Ezzel a rajzoló programmal a teljes terhelésű, 500 lóerős egyenáramú gépen nyert eredmények láthatók a 19. ábrán. A 20a, b, c ábrák mutatják a részletes fluxusképet a kommutáló zónában három különböző rotor pozíció



18. ábra. Vektorábra

mellett. A 21. ábra mutatja a kommutáló zóna fluxusát a névleges terhelés kétszeresénél. A 22. ábrán a 82 MVA, 40 pólusú generátor fluxusképe látható teljes terhelésnél, 0,95 kapacitív teljesítménytényezőnél.

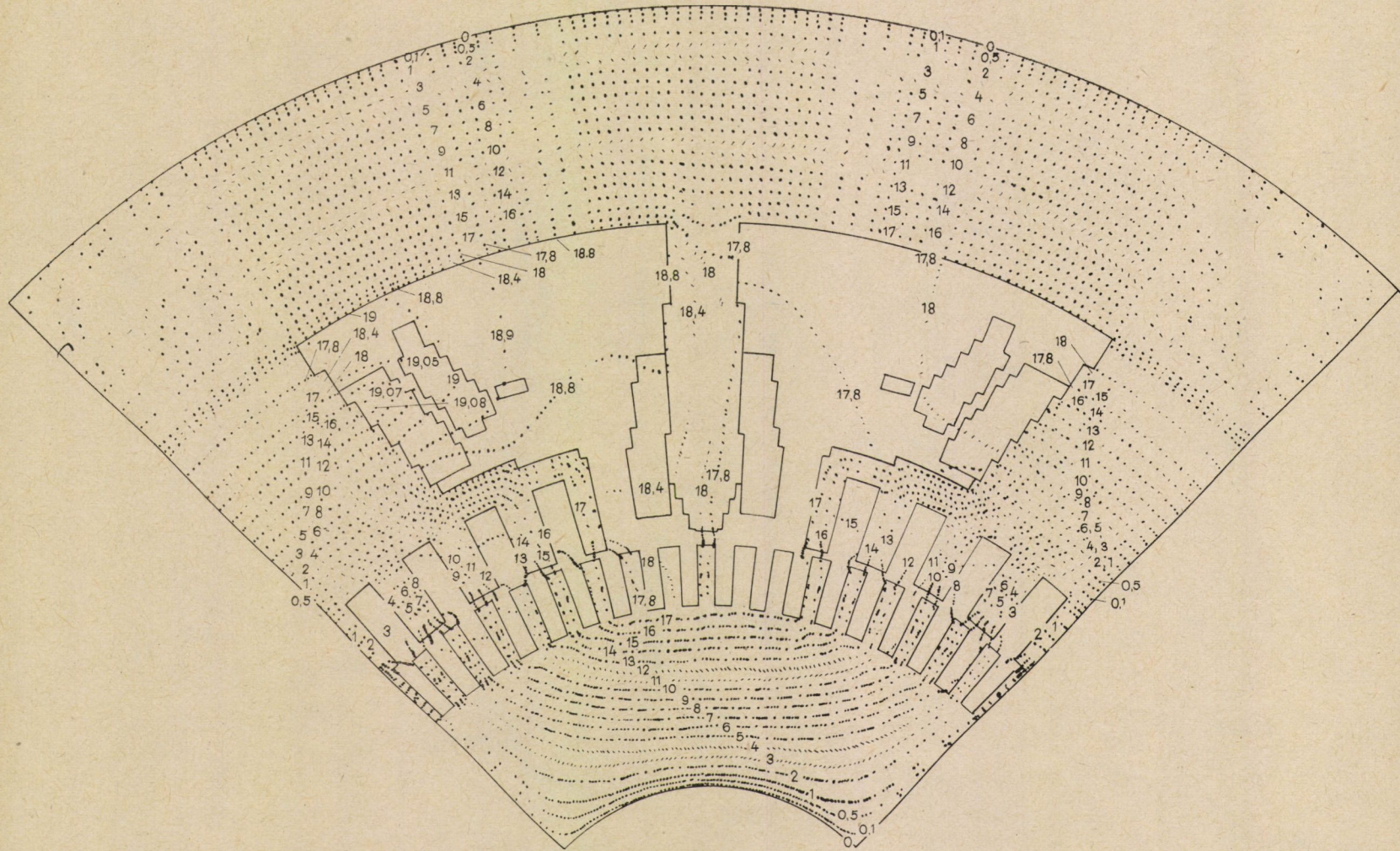
### 5. A SLOR konvergenciájának vizsgálata

A teljes számítás elvégzése előtt kísérleteket végeztünk a konvergencia additív gyorsítása befolyásának vizsgálatára. A 23. ábra világosan mutatja a hatást. A pont-vonásos I görbe az  $R_S$  diagramja az AAC nélkül, a II görbe AAC-vel. A csillapító hatás és  $R_S$  gyorsabb csökkenése tisztán látható. Az integrációs utak akár külön, akár együttesen felvehetők a tartományokra. Bármelyik választás hatása a 24. ábrán látható. A közös integrációs út gyorsabb konvergenciát biztosít.

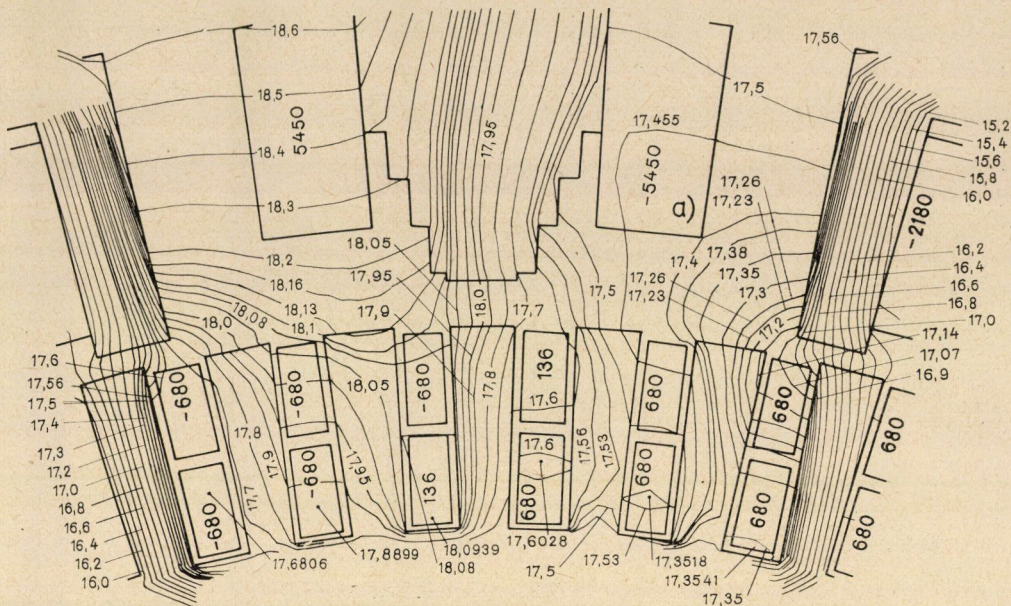
A 25. ábra mutatja a túrelaxációs tényező megválasztásának a konvergencia additív gyorsításával párosult hatását az itterációs eljárásra.  $R_S$  és  $R_M$  viselkedéséből ítélve  $\omega = 1,3$  biztosítja a leggyorsabb konvergenciát.

19. ábra. Fluxuseloszlás névlegesen terhelt egyenáramú gépben (minden vektorpotenciál-érték  $10^{-2}$ -nel szorzandó)

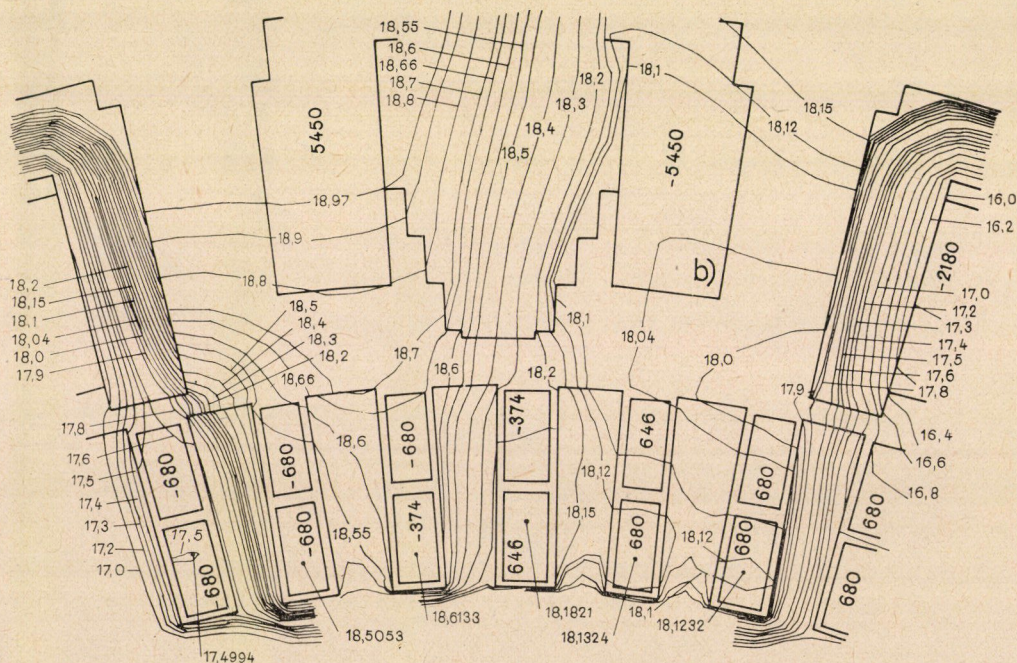






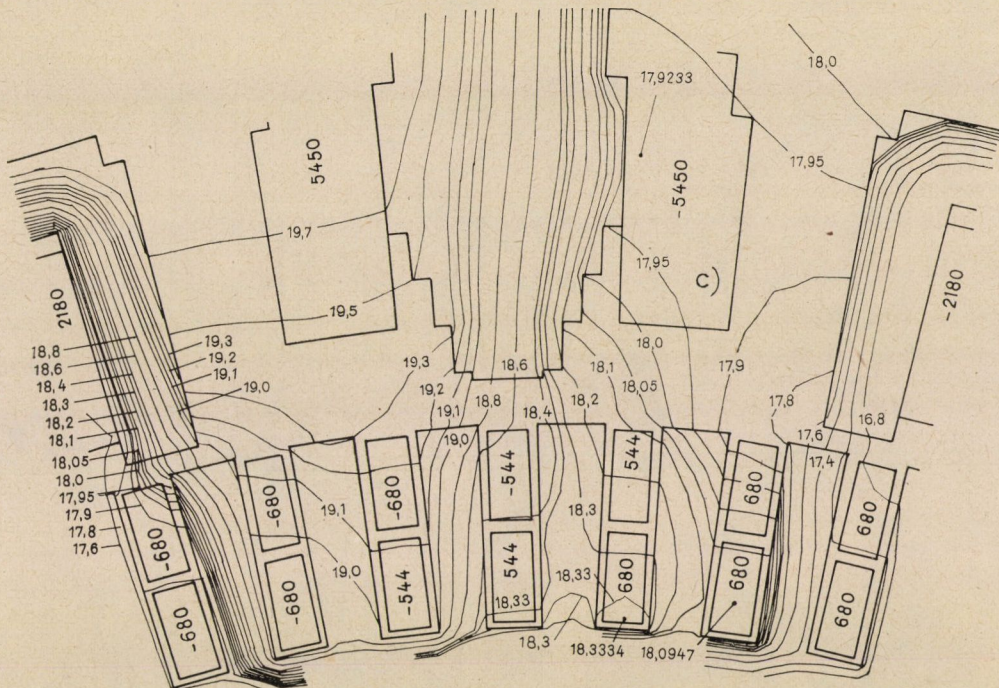


20. ábra. Fluxeloszlás a kommutáló zónában (a 1. rotor-helyzet,

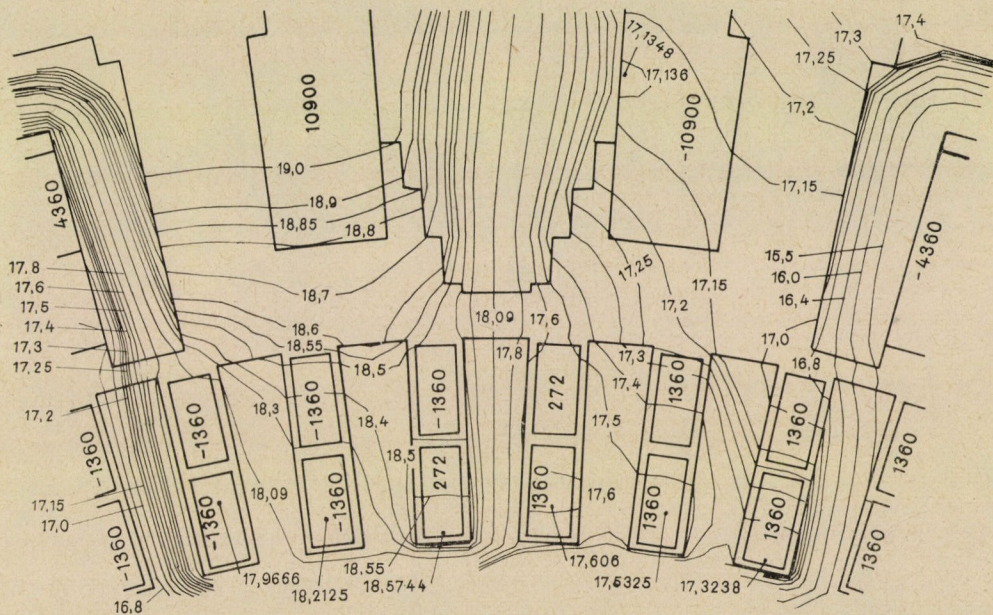


b 2. rotor-helyzet,



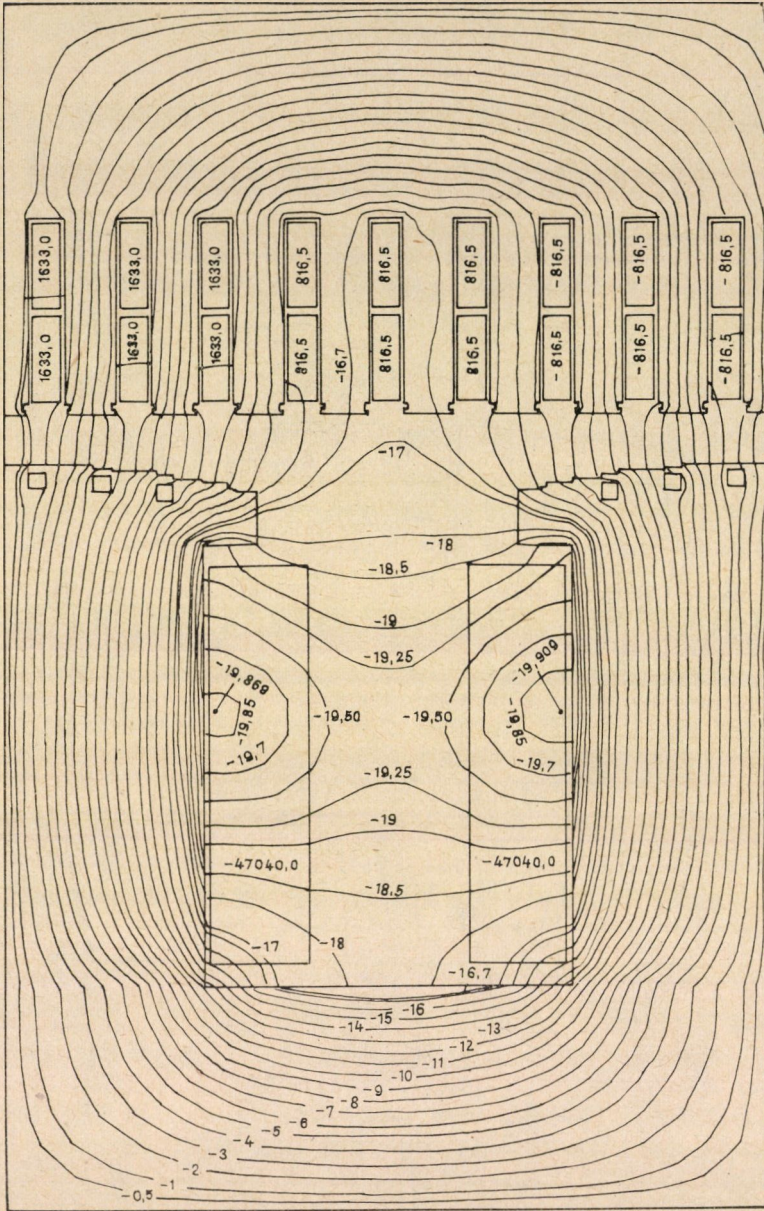


c 3. rotor-helyzet; minden vektorpotenciál-érték  $10^{-2}$ -nel szorzandó)



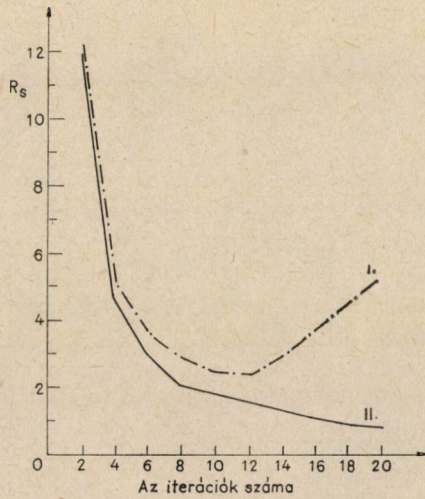
21. ábra. Fluxeloszlás a kommutáló zónában kétszeres terhelésnél



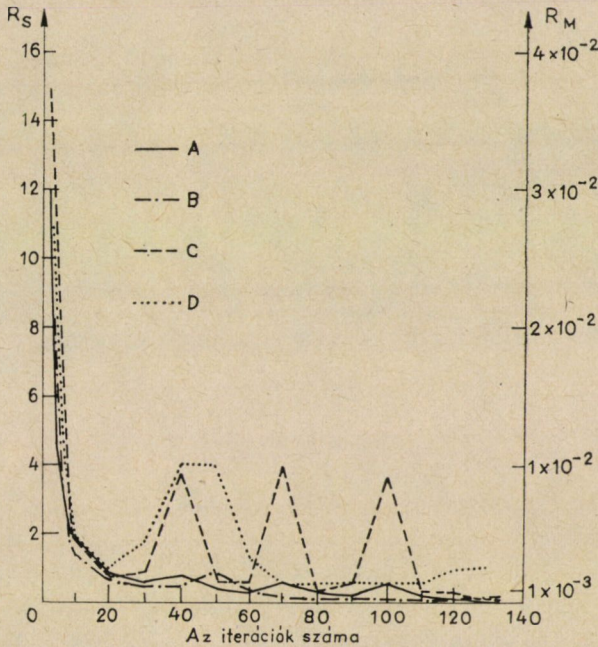


22. ábra. Fluxeloszlás nagy hidrogenerátorban teljes terhelésnél (minden vektor-potenciál-érték  $10^{-2}$ -nel szorzandó)



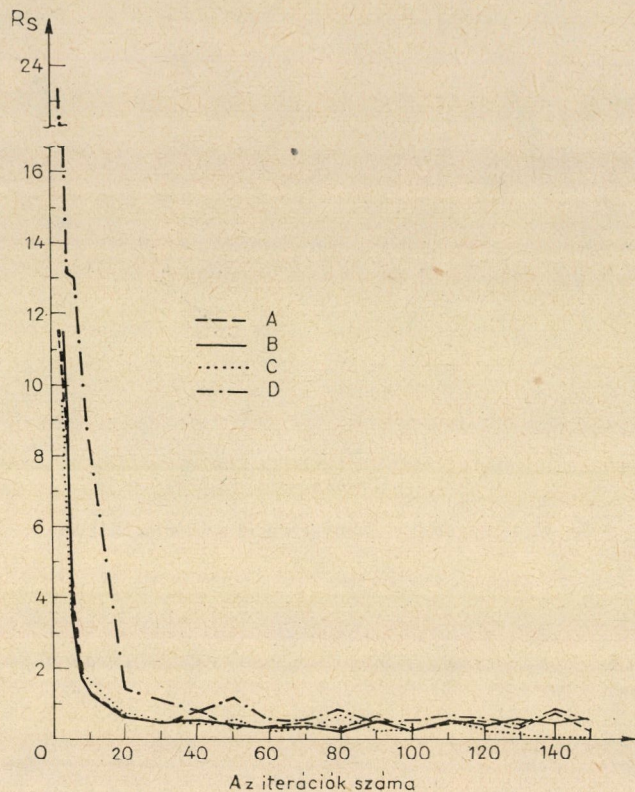


23. ábra. Az additív konvergencia gyorsítás hatása



24. ábra. Különálló és közös integrálási utak (—  $R_S$ , túlrelaxációs tényező 1,3, a  $Hdl$  vonalintegrál közös úton képezve, 1. rotor-helyzet; -.-.-  $R_S$ , túlrelaxációs tényező 1,3, a  $Hdl$  vonalintegrál különálló úton képezve, 1. rotor-helyzet; - - - -  $R_M$ , túlrelaxációs tényező 1,3, a  $Hdl$  vonalintegrál közös úton képezve, 1. rotor-helyzet; . . . .  $R_M$ , túlrelaxációs tényező 1,3, a  $Hdl$  vonalintegrál különálló úton képezve, 1. rotor-helyzet)





25. ábra. A túrelaxációs tényező hatása a konvergenciára (a túrelaxációs tényező értéke: — — — 1,0; — 1,2; ..... 1,3; -.-.- 1,5)

Ezt a tényezőt már más vizsgálatoknál is alkalmaztuk és nagyon hasznosnak bizonyult.

### VII. Következtetések

Villamos berendezések mágneses vektorpotenciáljának számítására az itt ismertetett eljárás, amely szukcesszív sor túrelaxációból, additív konvergencia gyorsításból és a maradékok folytonos ellenőrzéséből áll, jó konvergencia gyorsassággal rendelkezik. A maradékok és a potenciálok oszcillációja kis amplitúdójú marad. Sikerült kísérletileg megtalálni a forgógép problémák számára alkalmas túrelaxációs tényezőket.

## REFERENCES

1. CARTER, F. W.: Airgap Induction. *Electrical World* 38 (1901), 884—888
2. HAGUE, B.: The Principles of Electromagnetism Applied to Electrical Machines. Dover, New York 1962
3. MOTZ, H.—WORTHY, W. D.: Calculation of Magnetic Field by Southwell's Relaxation Method. *J. Instn. Elect. Engrs* (Part 2) 92 (1946), 522—528
4. BENEDIKT, O.: Die nomographische Methode der Berechnung komplizierter und stark gesättigter magnetischer Kreise elektrischer Maschinen. Akadémiai Kiadó, Budapest 1960
5. BLONDEL, A. E.: On the Armature Reaction of Alternators. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 129 (1899), 586—589
6. SUMEC, J.: Impedance Drop of Polyphase Synchronous Generators. *Elektrotechnische Zeitschrift* 31 (1910), 1174—1177 and 32 (1911), 77—80
7. DOHERTY, R. E.—NICKLE, C. A.: Synchronous Machines (Part I and Part II „An Extension of Blondel's Two-Reaction Theory”) *Transaction AIEE* 44 (1925), 403—418
8. WIESEMAN, R. W.: Graphical Determination of Magnetic Fields. *Trans AIEE* 46 (1927), 141—151
9. KING, R. W. P.: Fundamental Electromagnetic Theory. Dover, New York 1963; 139
10. TRUTT, F. C.—ERDÉLYI, E. A.—HOPKINS, R. E.: Representation of the Magnetization Characteristic of D. C. Machine for Computer Use. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems* PAS-87 (1968), 665—669
11. ERDÉLYI, E. A.—AHAMED, S. V.—HOPKINS, R. E.: Nonlinear Theory of Synchronous Machines On-Load. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems* PAS-85 (1966), 792—801
12. REECE, P.: Some Experiences with the Application of Block Relaxation to the Automatic Iteration of Finite Difference Equation. IEE Coll. of Computers to Field Analyses, London 1967; 4/1—4/13
13. AHAMED, S. V.: Acceleration of Convergence of Numerical Solutions of Vector Field Problems. *Computer Journal* 8 (1965), 73—76
14. YOUNG, D.: The Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations (Modern Mathematics for the Engineer). MacGraw-Hill Book Co. Inc., New York 1961; 373—419
15. McCRACKEN, D. D.—DORN, W. S.: Numerical Methods and Fortran Programming. John Wiley & Sons Inc., New York 1964; 398
16. ERDÉLYI, E. A.—FUCHS, E. F.: Nonlinear Magnetic Field Analysis of DC Machines, Part I (Theoretical Fundamentals). IEEE Winter Power Meeting, New York (N. Y.) January 25—30 1970; Paper 70 TP 183  
FUCHS, E. F.—ERDÉLYI, E. A.: Nonlinear Magnetic Analysis of DC Machines, Part II (Application of the Improved Treatment); *ibidem* Paper 70 TP 184  
ERDÉLYI, E. A.—FUCHS, E. F.—BINKLEY, D. H.: Nonlinear Magnetic Field Analysis of DC Machines, Part III (Equipotential Plots Drawn by Computer); *ibidem* Paper 70 TP 185
17. FUCHS, E. F.—ERDÉLYI, E. A.: Steady State Reactances and Magnetic Fields in Non-linear Large, Saturated Waterwheel Alternators Determined from Flux Plots. Record 22nd Southwestern IEEE Conference, Dallas (Texas) April 1970; 387—391

**Magnetic Fields in Nonlinear Heteropolar Rotating Machines.** When the non-linearities caused by iron saturation are considered, the usual linear theories for the determination of the performance characteristic of rotating electrical machines cannot be used. In this paper methods are developed by the author for solving the boundary value problem of the non-linear two-dimensional vector potential. The transformation of the practical differential equations into difference equations is explained and numerical methods developed to obtain solutions. The procedure is illustrated by applications to heteropolar salient rotating machines.

**Magnetische Felder in nichtlinearen, heteropolaren Drehmaschinen.** Werden die durch die Sättigung des Eisens verursachten Nichtlinearitäten in Betracht gezogen, so sind die zur Bestimmung der Betriebseigenschaften von elektrischen Drehmaschinen verwendeten üblichen linearen Theorien nicht anzuwenden. Die vorliegende Arbeit enthält die vom Verfasser ausgearbeiteten Verfahren zur Lösung des Grenzwertproblems des zweidimensionalen nichtlinearen Vektorpotentials und die Umwandlung der partiellen Differentialgleichungen in Differenzgleichungen sowie die zu deren Lösung ausgearbeiteten numerischen Verfahren. Das Verfahren wird in Bezug auf Drehmaschinen mit hervorstehenden Polen dargestellt.