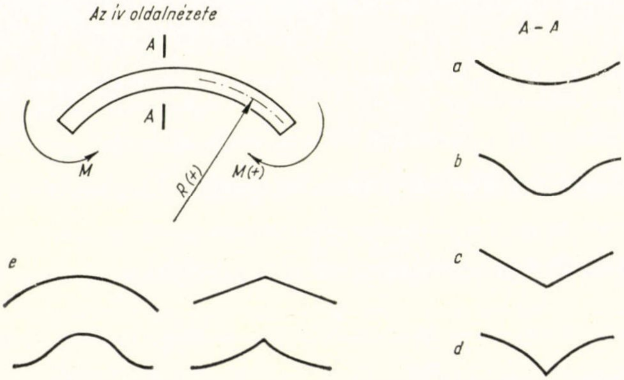
Dr. KOLLÁR LAJOS, a műszaki tudományok kandidátusa

KÖZPONTOSAN NYOMOTT HÉJ-ÍVEK STABILITÁSA

1. Bevezetés

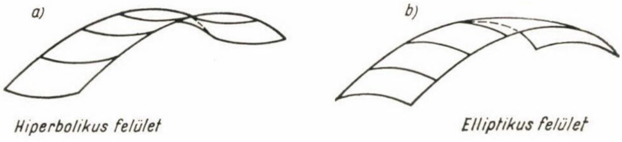
1.1. A dolgozat tárgya. A dolgozat célja: központosan nyomott görbetengelyű vékony rugalmas rudak (a továbbiakban „héj-ívek") stabilitásának vizsgálata az ív saját síkjában. Központos nyomáson azt értjük, hogy a külső erők támaszvonala megegyezik az ívtengellyel. A gyakorlati felhasználás céljából kívánatos lenne, hogy ezt a problémát tetszőleges szimmetrikus ívkeresztmetszet, változó keresztmetszetű ív, tetszőleges ívtengely-alak és tetszőleges megtámasztás esetére megoldjuk. A problémát ilyen általánosságban nem tárgyaljuk. Megmutatjuk azonban, hogy a gyakorlat számára kielégítő pontossággal meg tudjuk határozni egy ilyen általános héj-ív kritikus terhét, ha megoldottuk a következő egyszerűbb feladatot:



1. ábra

Adva van az *1. ábrán* vázolt tetszőleges szimmetrikus keresztmetszetű, hosszirányban körív-tengelyű héj-ív. Az ív keresztmetszete, valamint a héj-ív vastagsága is mindenütt állandó. Az ívre csak a két végén hat két ellentett erőpár, így az ívet nem is kell megtámasztani. Keressük az összefüggést az ívre ható hajlítónyomaték és a görbületváltozás között. A dolgozatban tehát elsősorban ezzel fogunk foglalkozni.

1.2. A héj-ívek viselkedésének leírása. A héj-íveket a mérnöki gyakorlatban térlefedő szerkezetként alkalmazzák *(2. ábra)*. Alakjuk hasonlít a kettősen görbült héjakéhoz, de hosszirányú peremükön nincs ívtartó. Ezért tetszőleges teherre nem lehetnek membránállapotban, hanem keresztirányú nyomatékok ébrednek bennük.



2. ábra

A héj-ívek viselkedése a következőkben tér el a közönséges (tömör keresztmetszetű) rudakétól: Ha a *közönséges rudat* hajlítjuk, akkor a görbületváltozás (χ) és a hajlítónyomaték (M) között a következő összefüggés áll fenn:

$$M = E \cdot J \cdot \chi, \tag{1}$$

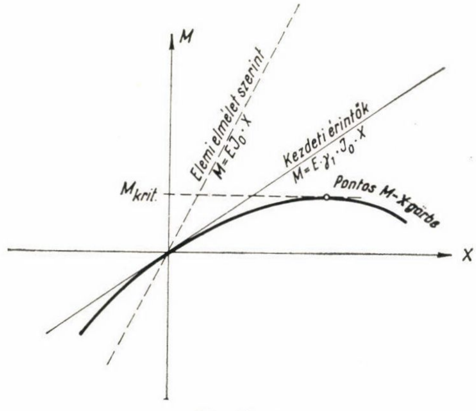
ahol E a rúd anyagának rugalmassági modulusa,
J a rúdkeresztmetszet inercianyomatéka.

Az EJ szorzatot a rúd *hajlítási merevségének* is nevezik. Mi a továbbiakban hajlítási merevségnek fogjuk hívni a hajlítónyomaték és a görbületváltozás arányát.

Igazolni fogjuk, hogy ha a *héj-ívet* hajlítjuk, akkor a hajlítónyomaték és a görbületváltozás között a következő összefüggés áll fenn (3. ábra):

$$M = A(R) \cdot \chi - B(R) \cdot \chi^2 \tag{2}$$

Itt $A(R)$ és $B(R)$ a héj-ív hosszirányú R görbületi sugarától függő kifejezések.



3. ábra

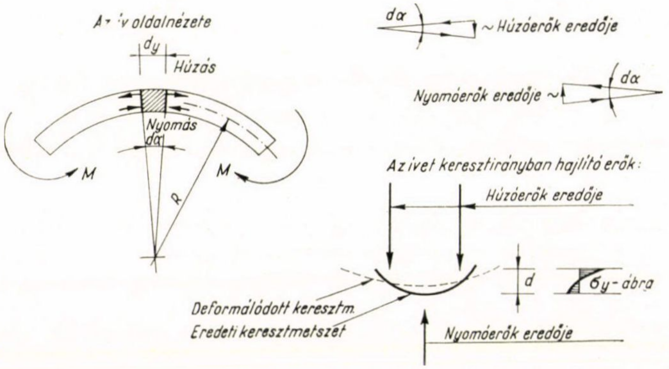
A *3. ábrából* a következő fontos eredményeket olvashatjuk le:

a) A héj-ív a hajlítónyomaték egy bizonyos M_{krit} értékénél *tiszta hajlítás* esetén is elveszti stabilitását;

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

b) Ha kiszámítjuk a héjkeresztmetszet J_0 inercianyomatékát az elemi szilárdságtan szokásos módszerei szerint, s felrakjuk az $M = E \cdot J_0 \cdot \chi$ összefüggést, sokkal meredekebb egyenest kapunk a 3. ábrában, mint a valódi $M(\chi)$ görbe 0-pontbeli érintője. Ez azt jelenti, hogy a ***héj-ív*** hajlításra sokkal *lágyabb*, mint az elemi elmélet szerint várható volna.

Az $M(\chi)$ görbe 0 pontbeli érintőjét úgy jellemezhetjük, hogy a héjkeresztmetszet J_0 „elemi" inercianyomatéka helyett egy csökkentett $\gamma_1 \cdot J_0 = J_1$ „hatékony" inercianyomatékkal kell az $M = E \cdot J_1 \cdot \chi$ összefüggést felírnunk ($\gamma_1 \leqq 1$).



4. ábra

Az áttekinthetőség kedvéért a tárgyalást *két részre bontjuk*. Az *első részben* (ebben a dolgozatban) meg fogjuk határozni a valódi $M(\chi)$ görbe kezdeti érintőjét, vagyis a γ_1 mennyiséget. Ennek segítségével ki tudjuk számítani a *központosan nyomott héj-ívnek* az ív síkjában való kihajlásra mértékadó *kritikus nyomóerejét*. A központos nyomásra való stabilitásmeghatározáshoz ugyanis mindig egy *végtelen közeli*, szomszédos egyensúlyi alakot kell vizsgálni. Végtelen közeli deformált alak azonban végtelen kis görbületváltozásokat jelent, vagyis a pontos $M(\chi)$ görbe helyett a kezdeti érintőt vehetjük. Ebből következik, hogy a héj-ívet központos nyomásra úgy vizsgálhatjuk, mintha közönséges ív lenne, csak az elemi J_0 inercianyomaték helyett a csökkentett $\gamma_1 \cdot J_0$ „hatékony" inercianyomatékot kell behelyettesítenünk az ív kritikus nyomóerejének képletébe.

A *második részben* (következő dolgozatunkban) meghatározzuk a teljes $M(\chi)$ görbét, s ezzel meg tudjuk vizsgálni az ívet *hajlításra*.

Minden számítás nélkül, szemlélettel is beláthatjuk, hogy miért lágyabbak a héj-ívek hajlítással szemben, mint az elemi számítás szerint várható volna. Vegyük szemügyre ugyanis a 4. ábrán vázolt, hosszirányban görbe héjnak tetszőleges helyen levő, két egymástól dy távolságra levő keresztmetszete közti elemi szakaszát. A hosszirányú görbeség miatt a hosszirányú húzó- és nyomófeszültségek az ívtengelyre merőleges eredőt adnak. Ezek a keresztmetszetet (a 4. ábrán vázolt esetben) ki akarják egyenesíteni. A héj ennek a kiegyenlítési törekvésnek mint keresztirányban hajlított lemez áll ellen, csekély hajlítási merevsége miatt csak tetemes alakváltozások árán. Ha a keresztmetszetnek keresztirányban egyáltalán nem lenne hajlítási merevsége, akkor magának az ívnek sem lenne semmi hajlítási merevsége, mert ebben az esetben az ívkeresztmetszet már egészen kis hosszirányú feszültségek hatására is kitérne: teljesen ellapulna (ill. feldomborodna), s így semmi hajlítónyomatékot sem tudna felvenni. A valóságban a héjlemez keresztirányú hajlítási merevsége nem zérus, de mindenesetre kis érték, tehát a keresztmetszet a hosszirányú feszültségek eredőinek hatása elől igyekszik kitérni, s emiatt az ív hajlítási merevsége lényegesen kisebb lesz, mint az elemi elmélet szerint számítható merevség.

Mindebből láthatjuk, hogy a héj-ív hosszirányú hajlítási merevsége nem számítható az elemi szilárdságtan szerint a keresztmetszet eredeti (megterhelés előtti) alakjából, sőt a deformálódott keresztmetszet-alakból sem. A szemlélettel ellentétben az sem növeli a hajlítási merevséget, ha a keresztmetszet a terhelés hatására feldomborodik (tehát az „elemi" szemlélet szerint az inercianyomatéka nőne), hanem a keresztmetszetnek mind az ellapulása, mint a feldomborodása csökkenti a hajlítási merevséget.

Mivel a keresztmetszet ellapulásához vagy feldomborodásához az szükséges, hogy az ív *hosszirányú görbülete miatt* a hosszirányú feszültségeknek legyen az ívtengelyre merőleges eredőjük, könnyen belátható, hogy *egyenes tengelyű* héjkeresztmetszetű rudak kezdetben az elemi elmélet szerint viselkednek, s csak akkor kezdenek ettől eltérni s lesznek lágyabbak, amikor már meggörbültek.

Az elmondottakból az is következik, hogy ha héj-ív keresztmetszetét *meggátoljuk keresztirányú alakváltozásában*, akkor a héj-ív az elemi szilárdságtan szerint fog viselkedni: hajlítási merevsége EJ_0 lesz *(3. ábra)*, és semmiféle *hajlítási* instabilitás nem áll be. Ha pl. több héj-ívet építünk egymás mellé, akkor ezek egymás alakváltozását kölcsönösen gátolják, tehát lényegesen merevebbek, mint az egyedülálló héjívek. Dolgozatunk tehát csak olyan önálló héj-ívekre vonatkozik, melyeknek keresztirányú alakváltozása nincs meggátolva.

A héj-ív nemcsak a leírt módokon veszítheti el *stabilitását* (központos nyomásra az ív síkjában, valamint függőleges síkú hajlításra), hanem központos nyomás esetén tönkremehet *vízszintes síkú kihajlással*, *elcsavarodó kihajlással* és a *héjlemez helyi horpadásával* is. Ezekkel a jelenségekkel a dolgozatban nem foglalkozunk. Konkrét tervezés során azonban ezekre a veszélyekre is figyelemmel kell lenni.

1. 3. Irodalmi áttekintés. Időrendben először *Kármán* [5] adott elméleti megoldást körkeresztmetszetű *görbe* csövek viselkedésére kis hajlítónyomatékok hatására. *Brazier* [2] *egyenes* celluloidcsöveken végzett hajlítókísérletei során elsőnek fedezte fel a hajlítónyomaték növelésével beálló instabilitást, és közelítő elméleti megoldást is adott a jelenségre.

Chwalla [3] *egyenes* cső hajlítási kritikus nyomatékára adott Braziernál pontosabb megoldást. *Belluzzi* [1] és *Funk* [4] az *egyenes tengelyű* kör-, körív- és V-keresztmetszetű rúd kritikus hajlítónyomatékát határozta meg energiamódszerrel. *Weinel* [6] állandó körív-keresztmetszetű, hosszirányban is körív-tengelyű (hiperbolikus) héj-ívet vizsgált tiszta hajlításra. Egyszerűség kedvéért felteszi, hogy a keresztmetszet *lapos*, de nem hanyagolja el a Poisson-számot, ezért már a legegyszerűbb körív-keresztmetszet esetén is bonyolult képleteket kap, s eredményeit nem lehet általánosítani más keresztmetszetekre.

2. Az $M(\chi)$ görbe meghatározása

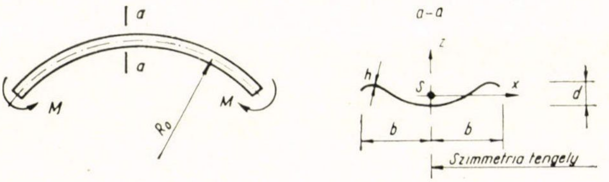
2. 1. *A levezetés feltevései*

A héj-ív anyaga homogén, izotróp és követi a Hooke-törvényt.

Az ív hosszirányú R görbületi sugara nagy a keresztmetszet d magasságához képest ($R \gg d$).

A héj-ív h vastagsága kicsi a többi mérethez képest. Így a keresztmetszet súlypontját, inercianyomatékát stb. mint vonaldarabét számíthatjuk.

Az ívkeresztmetszet *lapos*, azaz a keresztmetszet középvonalát jelentő $z_0\,(x)$ görbe *(5. ábra) ds* ívelemét a vetületi dx elemmel helyettesíthetjük.



5. *ábra*

A *harántkontrakciót* (a Poisson-féle számot) elhanyagoljuk ($\nu = 0$).

A héj-ív saját súlyát a levezetésekben nem vesszük figyelembe, mivel csak az ív hajlítással szemben tanúsított viselkedését akarjuk meghatározni.

Feltesszük, hogy a héj-ív két végén a külső erők a belső feszültségek eloszlásának megfelelően hatnak az ívre. A valóságban ez általában nem teljesül, pl. ha a *2. ábra* szerinti tetőszerkezet vonóvasas ív, akkor a nyomóerőt a két vonóvas koncentráltan adja át, nem egyenletes megoszlásban. Így a héj-ív végét magasfalú tartóként kell méretezni, a héj görbültségéből származó korrekció figyelembevételével. Az ezzel kapcsolatos kérdésekre azonban nem térünk ki.

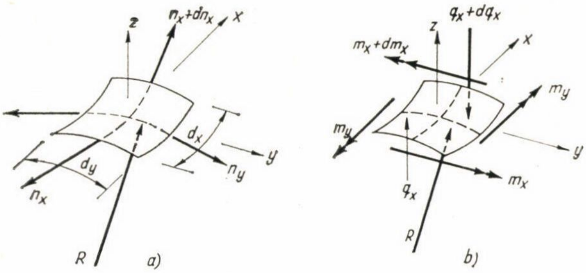
Nem vesszük figyelembe a *nyírási* alakváltozás hatását a függőleges síkú kihajlás kritikus nyomóerejére. Ezt az indokolja, hogy a héj-ívek merevsége nyírással szemben ugyanakkora, mint a közönséges (tömör keresztmetszetű) rudaké, hajlítási merevségük azonban lényegesen kisebb. A nyírási alakváltozás hatása a héj-ívek kritikus nyomóerejére így még kisebb, mint a tömör keresztmetszetű rudakéra.

2. 2. Tetszőleges keresztmetszet deformációja. A héj-ív *(1. ábra)* tengelye, vagyis a keresztmetszetek súlypontjának összekötő vonala R_0 sugarú körív, keresztmetszete pedig az ív hossza mentén állandó, de egyébként tetszőleges $z_0\,(x)$ szimmetrikus görbe *(5. ábra)*. A $z_0 - x$ koordinátarendszer origóját vegyük fel a keresztmetszet S súlypontjában. Az ív két végén működjék két egyenlő nagyságú, de ellenkező értelmű M erőpár. Így a különböző keresztmetszetek egyforma helyzetben lesznek, vagyis joggal feltételezhetjük, hogy az *eredetileg sík keresztmetszetek* alakváltozás után is *síkok maradnak*.

A külső nyomaték és a hosszirányú görbületi sugár az 5. ábrán vázolt értelemben tekintendő pozitívnak.

A héjelem alakváltozásait a keresztmetszet *deformálódás utáni*, egyelőre ismeretlen $z(x)$ alakjával fejezzük ki, ezeket behelyettesítjük az egyensúlyi egyenletekbe, s így differenciálegyenletet kapunk $z(x)$-re.

Az egyensúlyi egyenletek felírásához vágjunk ki az ívből tetszőleges helyen egy $dx \cdot dy$ méretű héjelemet (*6. ábra*, y az ívtengely menti koordináta). A héjelemre ható feszítőerőket a *6/a—b ábrán* szétválasztva tüntettük el. R az ív alakváltozás *utáni* hosszirányú görbületi sugara.



6. ábra

Vetület az x tengelyre:

$$n_x' = 0 \tag{3/a}$$

(az x szerinti differenciálást vesszővel jelölve).

Mivel a héj szélén ($x = \pm b$), $n_x = 0$; így n_x mindenütt zérus! A (3/*a*) egyenletben nem szerepel n_{xy}, mert a keresztmetszetek síkok maradnak, s így n_{xy} mindenütt zérus.

Vetület a z tengelyre:

$$-\frac{n_y}{R} - q_x' = 0\,. \tag{3/b}$$

Nyomaték az y tengely körül:

$$-m_x' + q_x = 0\,. \tag{3/c}$$

Nyomaték az x tengely körül:

$$m_y' = 0\,, \tag{3/d}$$

azaz m_y konstans.

A keresztmetszet szimmetriája és a tiszta hajlítóigénybevétel miatt a többi egyensúlyi egyenlet kiesik, mert a többi feszítőerő zérus.

A (3/*b*) és (3/*c*) egyensúlyi egyenletekből kiküszöböljük q_x-et:

$$m_x'' + \frac{n_y}{R} = 0\,. \tag{4}$$

n_y-t és m_x-et a Hooke-törvény segítségével kifejezzük a fajlagos *alakváltozásokkal* (ε_y a hosszirányú nyúlás, χ_x a keresztirányú görbületváltozás):

$$n_y = E \cdot h \cdot \varepsilon_y \tag{5}$$

$$m_x = \frac{E \cdot h^3}{12} \cdot \chi_x \tag{6}$$

ε_y-t és χ_x-et kifejezzük a keresztmetszet deformálódott alakjával, z-vel:

$$\varepsilon_y = \frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0} \tag{7}$$

(7) egyenlethez a következőket kell meggondolnunk: Mivel az eredetileg sík keresztmetszetek a korábban mondottak szerint síkok maradnak, a hosszirányú megnyúlás a keresztmetszet súlyvonalától való z távolsággal egyenesen, az ív hosszirányú görbületi sugarával pedig fordítva arányos (z/R). A megnyúlást azonban csak az eredeti állapottal (z_0/R_0) mért *eltérés* adja, ezért kell z_0/R_0-t z/R-ből levonni. $R \gg d$ miatt a keresztmetszet minden pontján ugyanazt a hosszirányú görbületi sugarat vehetjük ($R + z \approx R$).

χ_x-et szintén z-vel fejezzük ki:

$$\chi_x = z'' - z_0''. \tag{8}$$

(7)-et és (8)-at (5)-be és (6)-ba helyettesítjük:

$$n_y = E \cdot h \cdot \left(\frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0}\right) \tag{9}$$

és

$$m_x = \frac{E \cdot h^3}{12} (z'' - z_0''.) \tag{10}$$

(9)-et és (10)-et (4)-be visszahelyettesítve z-re a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{E \cdot h^3}{12} (z^{\mathrm{IV}} - z_0^{\mathrm{IV}}) + \frac{E \cdot h}{R}\left(\frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0}\right) = 0. \tag{11}$$

Bevezetjük a keresztmetszet w alakváltozását (függőleges eltolódását):

$$w = z - z_0 \tag{12}$$

(w akkor pozitív, ha $+z$-vel egyező irányú); valamint a héjat geometriai szempontból jellemző β paramétert:

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{h \cdot R}} = \frac{1{,}316}{\sqrt{h \cdot R}} \tag{13}$$

és az ív hosszirányú görbületváltozását:

$$\chi = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}. \tag{14}$$

(Pozitív R_0 esetén χ akkor pozitív, ha $R < R_0$, azaz R csökken, így $+\chi$ $+M$-nek felel meg.) E rövidítések segítségével a (11) egyenletet a következő egyszerűbb alakba írhatjuk:

$$w^{\mathrm{IV}} + 4\beta^4 \cdot w = -4\beta^4 \cdot R \cdot \chi \cdot z_0(x). \tag{15}$$

Ebből a differenciálegyenletből kell a keresztmetszet w alakváltozását meghatároznunk. Az egyenletben w-n kívül minden mennyiség állandó, tehát állandó együtthatójú lineáris inhomogén differenciálegyenletünk van.

Peremfeltételeink w-re a következők:

1. A keresztmetszet közepén a szimmetria miatt a keresztmeszet érintője vízszintes marad:

$$w'(0) = 0. \tag{16}$$

2. A keresztmetszet közepén a szimmetria miatt a keresztirányú nyíróerő zérus:

$$w'''(0) = 0. \tag{17}$$

3. A keresztmetszet szélén a keresztirányú nyomaték zérus:

$$w''(\pm b) = 0. \tag{18}$$

4. Végül a keresztmetszet szélén a nyíróerő zérus:

$$w'''(\pm b) = 0. \tag{19}$$

(15) egyenletünk megegyezik egy $2b$ hosszúságú *rugalmasan ágyazott gerenda* ismert differenciálegyenletével:

$$w^{\mathrm{IV}} + \frac{c}{EJ} \cdot w = \frac{p(x)}{EJ} \tag{20}$$

EJ a gerenda hajlítási merevsége; c a rugalmas ágyazási tényező, vagyis a $w = 1$ egységnyi benyomódáshoz szükséges talpfeszültség; $p(x)$ a gerendára ható külső teher. A rugalmas ágyazást a $p = c \cdot w$ összefüggés jellemzi.

A rugalmasan ágyazott gerenda analógiájával könnyen bebizonyíthatjuk azt a később felhasználandó tételt, hogy a *keresztmetszet súlypontja deformálódás közben helyben marad.* A keresztmetszetnek mint rugalmasan ágyazott gerendának *terhelése* ugyanis (15) szerint z_0-val arányos. Mivel z_0 súlypontjában vettük fel az origót:

$$\int_{-b}^{+b} z_0 \cdot dx = 0.$$

A keresztmetszetnek (mint gerendának) terhelése tehát *egyensúlyi erőrendszer.* Így a gerenda p rugalmas reakciói is egyensúlyi erőrendszert alkotnak, tehát $p = c \cdot w$ miatt

$$\int_{-b}^{+b} p \cdot dx = b \cdot \int_{-b}^{+b} w \cdot dx = 0\,. \tag{20/a}$$

A gerenda (vagyis a keresztmetszet) w elmozdulási görbéjének súlypontja tehát az elmozdulás előtti magasságba, $w = 0$-ba esik. Így a deformálódott $z(x)$ keresztmetszet súlypontja is egybeesik az eredeti súlyponttal.

A (15) differenciálegyenlet w megoldását mint ismeretes, *két részből* kell összetenni: a homogén differenciálegyenlet w_0 megoldásából és az inhomogén egyenlet egy partikuláris w_1 megoldásából:

$$w = w_0 + w_1\,. \tag{21}$$

A *homogén* rész megoldása minden keresztmetszet-alakra ugyanaz:

$$w_0 = A \cdot \operatorname{ch}\beta x \cdot \cos\beta x + B \cdot \operatorname{sh}\beta x \cdot \sin\beta x + C \cdot \operatorname{ch}\beta x \cdot \sin\beta x + + D \cdot \operatorname{sh}\beta x \cdot \cos\beta x. \tag{22}$$

(A, B, C, D, integrálási állandók, ezeket a (16)—(19) peremfeltételekből kell meghatározni.)

Az *inhomogén* egyenletet a különböző z_0 keresztmetszetalakoknak megfelelően esetről-esetre külön kell megoldani.

2. 3. Az $M(\chi)$ görbe és kezdeti érintője. Az eddigiekben az ív hosszirányú χ görbületváltozását ismertnek tételeztük fel, s ennek alapján határoztuk meg a w eltolódást. Most megvizsgáljuk, hogy χ milyen összefüggésben áll az ívre ható külső M hajlítónyomatékkal.

w ismeretében a keresztmetszet által felvett (hosszirányú) M *nyomaték* a belső n_y feszítőerők nyomatékának összegeként a következőképpen számítható (felhasználva a keresztmetszet laposságából származó egyszerűsítési lehetőségeket):

$$M = \int_{-b}^{+b} n_y \cdot z \cdot dx + \int_{-b}^{+b} m_y \cdot dx \,. \tag{23}$$

Mivel a korábban tárgyalt feltevések szerint a héj *vékony*, ezért a (23) kifejezés második tagját, mely a *héjlemez* hajlításából ébredő $m_y = \frac{E \cdot h^3}{12} \chi$ nyomatékot képviseli, egyszerűség kedvéért elhagyjuk. (Ha kivételes esetben a héjkeresztmetszet merevsége olyan kicsi lenne, hogy a lemeznyomaték figyelembevétele a merevséget számottevő mértékben növelné, akkor a héjkeresztmetszetnek (23) első tagjából számítható (hatékony) inercianyomatékához egyszerűen hozzáadjuk a héjlemez $\frac{2 \cdot bh^3}{12}$ inercianyomatékát; l. a számpéldát.)

A következőkben tehát csak az

$$M = \int_{-b}^{+b} n_y \cdot z \cdot dx \tag{24}$$

kifejezéssel foglalkozunk. (9), (12) és (14) alapján:

$$M = E \cdot h \cdot \int_{-b}^{+b} \left(\frac{z^2}{R} - \frac{z \cdot z_0}{R_0} \right) \cdot dx =$$

$$= E \cdot h \cdot \chi \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx + \frac{E \cdot h}{R} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx + E \cdot h \cdot \chi \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx +$$

$$+ \frac{E \cdot h}{R} \cdot \int_{-b}^{+b} w^2 \cdot dx \,. \tag{25}$$

(25) egyenlet adja meg a külső M nyomaték és a hosszirányú χ görbület-változás közötti pontos összefüggést (*3. ábra*). (25) első két tagjában χ az első hatványon szerepel, a második két tagban pedig a négyzeten, mivel (15) szerint w arányos $R \cdot \chi$-vel. Mindegyik tagban szerepel ezenkívül R önmagában, és burkoltan a w_1-ben és a w_0-ban előforduló β-ban is. Így (25) valóban olyan alakú mint (2): $A(R) \cdot \chi$ jelenti (25) első két tagját, $- B(R) \cdot \chi^2$ pedig a harmadik és negyedik tagot.

Minthogy ebben a dolgozatban csak az $M(\chi)$ görbe *kezdeti érintőjét* akarjuk meghatározni, ezért differenciáljuk (2)-t χ szerint:

$$\frac{dM}{d\chi} = \frac{dA(R)}{d\chi} \cdot \chi + A(R) - \frac{dB(R)}{d\chi} \cdot \chi^2 - B(R) \cdot 2 \cdot \chi. \qquad (26)$$

A $\chi = 0$ pontban az érintő hajlásszöge $A(R)$ lesz, vagyis (25) első két tagja, χ-vel osztva. Másrészt a *3. ábrából* láthatjuk, hogy az érintő hajlásszöge $E \cdot \gamma_1 \cdot J_0 = E \cdot J_0$. Így a héj-ív J_1 *hatékony inercianyomatéka:*

$$J_1 = \frac{A(R)}{E} = h \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx. \qquad (27)$$

J_0: (27) jobb oldalának első tagja a keresztmetszet *elemi inercianyomatéka*,

$$J_0 = h \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx. \qquad (28)$$

Ezt (27)-be helyettesítve:

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx. \qquad (29)$$

Mivel az $M(\chi)$ görbe *kezdeti* érintőjét vizsgáljuk, a héj-ív hatékony J_1 inercianyomatékát az *eredeti*, deformálatlan héj-alak *geometriai méreteiből* (z_0, R_0) kell kiszámítanunk. A következőkben tehát β, és az ebben szereplő R mindig a deformáció előtti β_0-t, ill. R_0-t jelentik.

A különböző keresztmetszetek merevség-csökkenésének könnyebb összehasonlítása kedvéért a

$$\gamma_1 = J_1 / J_0 \qquad (30)$$

viszonyszámokat fogjuk meghatározni ($\gamma_1 \leq 1$)

2. 4. A hatékony inercianyomaték meghatározása néhány keresztmetszetre. A tárgyalandó négyféle keresztmetszettípust úgy választottuk meg, hogy lehetőleg minden, a gyakorlatban előforduló keresztmetszet-alakot be tudjon a tervező sorolni vagy az egyik típusba, vagy a két típus közé, s így interpolálni tudjon két megadott eset eredménye között.

2. 41. Körív-alakú keresztmetszet (7. ábra). Minthogy a keresztmetszet feltevéseink szerint *lapos*, ezért egyrészt a körívet *parabolával* helyettesíthetjük, másrészt a keresztmetszet súlypontját a *magasság harmadában* vehetjük fel.

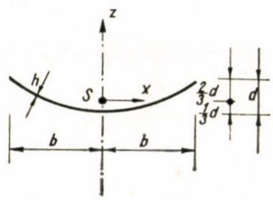
Így a keresztmetszetalak egyenlete a következő:

$$z_0 = d\left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3}\right). \tag{31}$$

z_0-nak ezt a kifejezését (15)-be helyettesítve a differenciálegyenlet *partikuláris megoldása* a következő:

$$w_1 = -R \cdot \chi \cdot z_0 \tag{32}$$

A (16)—(19) peremfeltételi egyenletekből meghatározzuk a (22) homogén megoldásrész állandóit (21)-et figyelembe véve.



7. *ábra*

A számítás végeredménye:

$$A = d \cdot R \cdot \chi \cdot \left[\frac{1}{(\beta\, b)^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta\, b \cdot \cos \beta\, b - \operatorname{ch} \beta\, b \cdot \sin \beta\, b}{\operatorname{ch} \beta\, b \cdot \operatorname{sh} \beta\, b + \cos \beta\, b \cdot \sin \beta\, b}\right] = d \cdot R \cdot \chi \cdot Z_A; \tag{33}$$

$$B = d \cdot R \cdot \chi \cdot \left[\frac{1}{(\beta\, b)^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta\, b \cdot \cos \beta\, b + \operatorname{ch} \beta\, b \cdot \sin \beta\, b}{\operatorname{ch} \beta\, b \cdot \operatorname{sh} \beta\, b + \cos \beta\, b \cdot \sin \beta\, b}\right] = d \cdot R \cdot \chi \cdot Z_B; \tag{34}$$

ha a zárójelben levő dimenzió nélküli mennyiséget Z_A-val ill. Z_B-vel jelöljük.

$$C = D = 0 \tag{35}$$

A konstansok számértékeit különböző βb-kre az *I. táblázatban* állítottuk össze.

A héjkeresztmetszet *elemi inercianyomatéka* (28) szerint (31) felhasználásával:

$$J_0 = h \cdot d^2 \cdot \int_{-b}^{+b} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot dx = \frac{8}{45} \cdot h \cdot d^2 \cdot b = 0{,}1778 \cdot h \cdot d^2 \cdot b\,. \tag{36}$$

A *hatékony inercianyomaték* (29) szerint (32) felhasználásával:

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0(-R \cdot \chi \cdot z_0 + w_0) \cdot dx\,. \tag{37/a}$$

Minthogy az integrál első tagja $-J_0$-val egyenlő, ezért a hatékony inercianyomaték a következő egyszerűbb alakba írható (22), (31), (33) és (34)-et felhasználva:

$$J_1 = \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w_0 \cdot dx = \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3}\right) \cdot w_0 \cdot dx \tag{37/b}$$

Mivel (20/*a*) szerint:

$$\int_{-b}^{+b} w \cdot dx = \int_{-b}^{+b} (w_1 + w_0) \cdot dx = 0\,, \tag{38/a}$$

és (32) szerint:

$$\int_{-b}^{+b} w_1 \cdot dx = -R \cdot \chi \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot dx = 0\,, \tag{38/b}$$

ezért

$$\int_{-b}^{+b} w_0 \cdot dx = 0\,. \tag{38/c}$$

Ezt felhasználva:

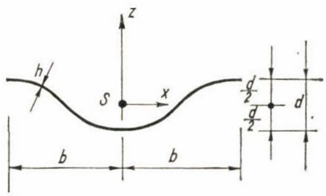
$$J_1 = h \cdot d^2 \cdot \int_{-b}^{+b} \frac{x^2}{b^2} (Z_A \cdot \operatorname{ch} \beta x \cdot \cos \beta x + Z_B \cdot \operatorname{sh} \beta x \cdot \sin \beta x) \cdot dx =$$

$$= \frac{h \cdot d^2 \cdot b}{(\beta b)^3} \cdot [Z_A \cdot (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b - 2 \beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b) +$$

$$+ Z_B \cdot (-\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b + 2 \beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b)]\,. \tag{39}$$

A gyakorlati számítás megkönnyítése céljából kiszámítottuk a (39) kifejezést $\beta\, b$ különböző értékeire. Ennek alapján a II. táblázatban feltüntettük a héj hatékony inercianyomatékát mutató $\gamma_1 = J_1/J_0$ viszonyszámot (l. még a *11. ábrát* is).

2. 42. Cosinus-alakú keresztmetszet (8. ábra)



8. ábra

A keresztmetszet egyenlete az ábrán felvett koordinátarendszerben:

$$z_0 = -\frac{d}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{b} \cdot x\,. \tag{40}$$

Ennek megfelelően a (15) differenciálegyenlet *partikuláris megoldása :*

$$w_1 = -\frac{1}{1 + \dfrac{\pi^4}{4(\beta b)^4}} \cdot R \cdot \chi \cdot z_0\,. \tag{41}$$

A (16)—(19) *peremfeltételi* egyenletekből azt kapjuk, hogy a cosinus-keresztmetszet állandói a körív-keresztmetszet állandóinak

$$-\frac{\pi^2}{4+\dfrac{\pi^4}{(\beta\, b)^4}} \tag{42}$$

-szorosai *(lásd az I. táblázatot).*

A keresztmetszet *elemi inercianyomatéka* (28) szerint:

$$J_0 = \frac{h\cdot d^2}{4}\cdot\int\limits_{-b}^{+b}\cos^2\frac{\pi}{b}\cdot x\cdot dx = 0{,}250\cdot h\cdot d^2\cdot b\,. \tag{43}$$

A *hatékony inercianyomaték* (29) szerint:

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R\cdot\chi}\cdot\int\limits_{-b}^{+b} z_0\cdot\left(-\frac{1}{1+\dfrac{\pi^4}{4(\beta\, b)^4}}\cdot R\cdot\chi\cdot z_0 + w_0\right)\cdot dx =$$

$$= h\cdot d^2\cdot b\cdot\left\{0{,}250\cdot\frac{1}{1+\dfrac{4(\beta\, b)^4}{\pi^4}}+\right.$$

$$+\frac{Z_A}{2}\cdot\left[\frac{\beta\, b\cdot \mathrm{sh}\,\beta\, b\cdot\cos\beta\, b-(\pi-\beta\, b)\cdot\mathrm{ch}\,\beta\, b\cdot\sin\beta\, b}{(\beta\, b)^2+(\pi-\beta\, b)^2}+\right.$$

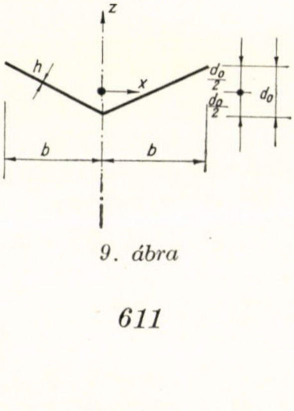
$$\left.+\frac{\beta\, b\cdot \mathrm{sh}\,\beta\, b\cdot\cos\beta\, b+(\pi+\beta\, b)\cdot\mathrm{ch}\,\beta\, b\cdot\sin\beta\, b}{(\beta\, b)^2+(\pi+\beta\, b)^2}\right]+$$

$$+\frac{Z_B}{2}\cdot\left[\frac{\beta\, b\cdot \mathrm{ch}\,\beta\, b\cdot\sin\beta\, b+(\pi-\beta\, b)\cdot\mathrm{sh}\,\beta\, b\cdot\cos\beta\, b}{(\beta\, b)^2+(\pi-\beta\, b)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta\, b\cdot \mathrm{ch}\,\beta\, b\cdot\sin\beta\, b-(\pi+\beta\, b)\cdot\mathrm{sh}\,\beta\, b\cdot\cos\beta\, b}{(\beta\, b)^2+(\pi+\beta\, b)^2}\right]\right\}. \tag{44}$$

(44) számértékeit, illetve a $\gamma_1 = J_1/J_0$ viszonyszámot különböző $\beta\, b$-kre a II. táblázatban adjuk meg (lásd a *11. ábrát* is).

2. 43. V-alakú keresztmetszet (9. ábra). Minthogy a keresztmetszet közepén törés van, ezért *csak a jobb oldalára* végzünk el minden számítást. A két fél-



9. ábra

keresztmetszet deformációjának összeillesztését a (16) és (17) peremfeltételek biztosítják.

A keresztmetszet *jobb oldalának egyenlete* tehát:

$$z_0 = d \cdot \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \right). \tag{45}$$

Így (15) *partikuláris megoldása:*

$$w_1 = -R \cdot \chi \cdot z_0. \tag{46}$$

A (16)–(19) peremfeltételi egyenletekből:

$$Z_C + Z_D = \frac{1}{2 \cdot \beta b}. \tag{47}$$

$$Z_A = \frac{+ \Phi_1 \cdot (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b - \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b) + \Phi_2 \cdot \mathrm{ch}\, \beta b \cdot \cos \beta b}{\begin{gathered}\mathrm{sh}\, \beta b \cdot \sin \beta b\, (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b - \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b) + \\ + \mathrm{ch}\, \beta b \cdot \cos \beta b\, (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b + \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b)\end{gathered}} \tag{48}$$

$$Z_B = \frac{- \Phi_1 \cdot (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b + \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b) + \Phi_2 \cdot \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \sin \beta b}{\begin{gathered}\mathrm{sh}\, \beta b \cdot \sin \beta b\, (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b - \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b) + \\ + \mathrm{ch}\, \beta b \cdot \cos \beta b\, (\mathrm{ch}\, \beta b \sin \beta b + \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b)\end{gathered}} \tag{49}$$

Itt

$$\Phi_1 = Z_C \cdot \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b - Z_D \cdot \mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b, \tag{50}$$

és

$$\begin{aligned}\Phi_2 = Z_C(\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \cos \beta b - \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \sin \beta b) - Z_D(\mathrm{sh}\, \beta b \cdot \sin \beta b + \\ + \mathrm{ch}\, \beta b \cdot \cos \beta b)\end{aligned} \tag{51}$$

(lásd az I. táblázatot).

A keresztmetszet *elemi inercianyomatéka* (28):

$$J_0 = h \cdot d^2 \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot h \cdot d^2 \cdot b = 0{,}1667 \cdot h \cdot d^2 \cdot b. \tag{52}$$

A *hatékony inercianyomaték* (29):

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} z_0 \cdot (-R \cdot \chi \cdot z_0 + w_0) \cdot dx =$$

$$= \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} z_0 \cdot w_0 \cdot dx = \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \int_0^{+b} \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \right) \cdot w_0 \cdot dx \tag{53/a}$$

I. TÁBLÁZAT

Különböző keresztmetszetek A—D állandói

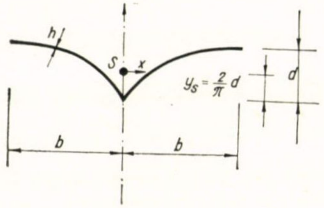
Kereszt-metszet alakja	βb =	1	2	3	4	6	10
Körív	Z_A	—0,29254	—0,0930	—0,01252	+0,0002388	$+1{,}716 \cdot 10^{-4}$	$+2{,}664 \cdot 10^{-7}$
	Z_B	+0,85245	+0,03604	—0,00940	—0,003224	$+9{,}42 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}25 \cdot 10^{-6}$
	$Z_C = Z_D$	0	0	0	0	0	0
Cosi-nus	Z_A	+0,0284	+0,0910	+0,02372	—0,000536		
	Z_B	—0,0830	—0,03526	+0,01778	+0,00724		
	$Z_C = Z_D$	0	0	0	0		
V-alak	Z_A	—0,4605	—0,2642	—0,166105	—0,12492		
	Z_B	—0,1492	—0,232	—0,16604	—0,12471		
	$Z_C = Z_D$	+0,500	+0,250	+0,16667	+0,1250		
Szárny-alak	Z_A	—0,596	—0,3935	—0,27662	—0,21041		
	Z_B	—0,1555	—0,256	—0,20948	—0,17574		
	Z_C	—0,0724	+0,2475	+0,22167	+0,18013		
	Z_D	+0,696	+0,468	+0,29209	+0,21023		

Mivel a (38/a—c) képletek V-keresztmetszet esetére is érvényesek, (53/a) a következőképpen egyszerűsödik:

$$J_1 = \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \frac{x}{b} \cdot w_0 \cdot dx = \frac{h \cdot d^2 \cdot b}{(\beta b)^2} \cdot [-Z_A \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b +$$

$$(+ Z_B \cdot (\operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b - 1) - Z_C \cdot (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b)] \quad (53/b)$$

$\gamma_1 = J_1/J_0$ számértékeit különböző $\beta\, b$-k esetére a II. táblázatban adjuk meg *(lásd a 11. ábrát* is).



10. ábra

2. 44. Szárny alakú keresztmetszet (10. ábra). A keresztmetszetet két negyed sinusvonalból tesszük össze. A számításokat a keresztmetszet közepén levő törés miatt csak a jobb oldalra végezzük el; a két félkeresztmetszet összeillesztését a (16) és (17) peremfeltételek biztosítják.

A keresztmetszet jobb felének egyenlete (a súlypont magassága: $2d/\pi$):

$$z_0 = d \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2\, b} x - \frac{2}{\pi} \right). \quad (54)$$

Így (15) *partikuláris megoldása* :

$$w_1 = R \cdot \chi \cdot d \left(- \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64(\beta\, b)^4}} \cdot \sin \frac{\pi}{2\, b} x + \frac{2}{\pi} \right). \tag{55}$$

A *peremfeltételi egyenletekből* :

$$Z_C = \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64(\beta\, b)^4}} \cdot \frac{\pi}{4\, \beta\, b} \left[1 - \frac{\pi^2}{8(\beta\, b)^2} \right] \tag{56}$$

$$Z_D = \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64\, (\beta\, b)^4}} \cdot \frac{\pi}{4\, \beta\, b} \left[1 + \frac{\pi^2}{8(\beta\, b)^2} \right] \tag{57}$$

és (50), valamint (51) rövidítések felhasználásával:

$$Z_A = \frac{\left[\Phi_1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64(\beta\, b)^4}} \frac{\pi^2}{8(\beta\, b)^2} \right] (\mathrm{ch}\, \beta\, b \cdot \sin \beta\, b - \mathrm{sh}\, \beta\, b \cdot \cos \beta\, b) + \Phi_2 \cdot \mathrm{ch}\, \beta\, b \cdot \cos \beta\, b}{\mathrm{sh} \beta b \cdot \sin \beta b (\mathrm{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \mathrm{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \mathrm{ch} \beta b \cdot \cos \beta b (\mathrm{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \mathrm{sh} \beta b \cdot \cos \beta b)} \tag{58}$$

$$Z_B = \frac{\left[\Phi_1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64(\beta\, b)^4}} \frac{\pi^2}{8(\beta\, b)^2} \right] (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b + \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b) + \Phi_2 \cdot \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \sin \beta b}{\mathrm{sh}\, \beta b \cdot \sin \beta b (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b - \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b) + \mathrm{ch}\, \beta b \cdot \cos \beta b (\mathrm{ch}\, \beta b \cdot \sin \beta b + \mathrm{sh}\, \beta b \cdot \cos \beta b)} \tag{59}$$

(lásd az I. táblázatot).

A keresztmetszet *elemi inercianyomatéka* (28) szerint:

$$J_0 = h \cdot d^2 \cdot 2 \int_0^{+b} \left(\sin \frac{\pi}{2\, b} x - \frac{2}{\pi} \right)^2 \cdot dx = \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \cdot h \cdot d^2 \cdot b = 0{,}18944 \cdot h \cdot d^2 \cdot b\,. \tag{60}$$

A keresztmetszet *hatékony inercianyomatéka* (29) szerint:

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} z_0 \cdot (w_1 + w_0) \cdot dx =$$

$$= J_0 + \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \int_0^{+b} \left(\sin \frac{\pi}{2b} x - \frac{2}{\pi} \right) \cdot (w_1 + w_0) \cdot dx\,. \tag{61/a}$$

(38/a)-t felhasználva.

$$J_1 = J_0 + \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \int_0^{+b} \sin \frac{\pi}{2\,b}\, x \cdot (w_1 + w_0) \cdot dx = h \cdot d^2 \cdot b \left\{ \frac{1}{1 + \frac{64(\beta\, b)^4}{\pi^4}} + \right.$$

$$+ Z_A \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b - \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] +$$

$$+ Z_B \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b - \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b + \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] +$$

$$+ Z_C \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right.$$

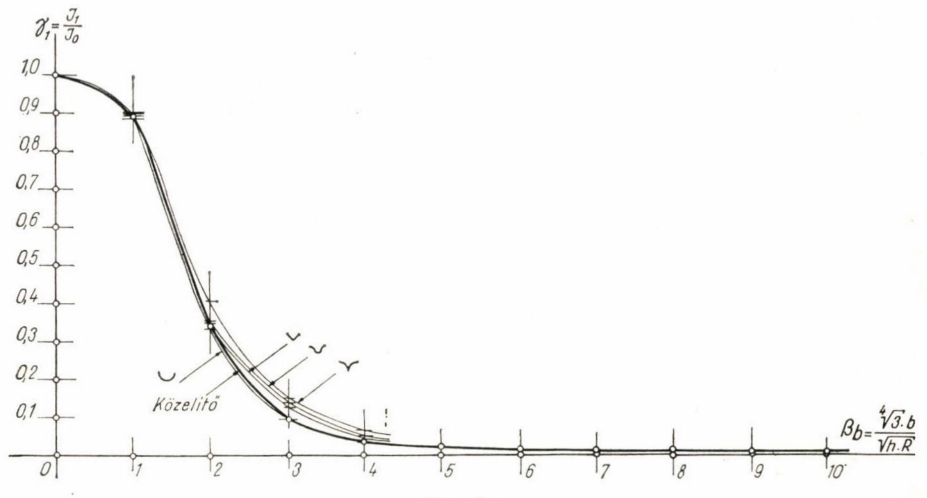
$$\left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b - \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] +$$

$$+ Z_D \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b - \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] \right\} \tag{61/b}$$

(61b) és (60) hányadosát, γ_1-et különböző βb-kre számszerűen a *II. táblázatban* és a *11. ábrán* adjuk meg.

2.5. A különböző keresztmetszetek hatékony inercianyomatékainak összehasonlítása. A *11. ábrából* látható, hogy a különböző keresztmetszetek γ_1-görbéi alig térnek el egymástól. Valamennyi vízszintes érintővel indul, βb növekedtével rohamosan csökken, és $\beta b > 4$ értéknél γ_1 már kisebb mint 0,05, azaz a hatékony J_1 inercianyomaték az elemi J_0 inercianyomatéknak kevesebb mint 5%-a (kivéve a szárny-keresztmetszetet). Ez az oka annak, hogy a II. táblázatot csak $\beta b = 1, 2, 3, 4$ értékekre számítottuk ki, mert ez a szakasz jellemzi a γ_1 görbét. A körív-keresztmetszet γ_1 görbéjének számítását azonban egészen $\beta b = 10$-ig elvégeztük.



11. ábra

Mindezek alapján célszerű egy *közelítő γ_1 görbét* konstruálnunk, amely *minden keresztmetszetre* megadja a hatékony inercianyomatékot, s a tervező mérnök számára elég egyszerű.

Vizsgálataink szerint a

$$\gamma_{1\,közelítő} = \frac{1}{1 + 0{,}120 \cdot (\beta b)^4} = \frac{1}{1 + 0{,}360 \dfrac{b^4}{h^2 \cdot R^2}} \tag{62}$$

görbe néhány %-on belül megközelíti az egyes keresztmetszetek pontos γ_1 görbéjét s általában (különösen nagy βb-knél) a biztonság javára tér el tőlük *(lásd a II. táblázatot és a 11. ábrát).*

3. *Általánosítások. Stabilitásvizsgálat központos nyomásra*

3. 1. Fordított keresztmetszetek. A tárgyalt 1/a—d keresztmetszetek megfordíthatók (1/e ábra), s az eddig mondottak a megfordított keresztmetszetekre is érvényesek. A keresztmetszet megfordításával ugyanis z_0 előjele változik

II. TÁBLÁZAT

Különböző keresztmetszetek hatékony inercianyomatéki szorzói

Keresztmetszet alakja	$\beta b =$	0	1	2	3	4	6	10
Körív	$\gamma_1 =$	1	0,895	0,333	0,093	0,033	0,0073	0,00101
Cosinus	$\gamma_1 =$	1	0,890	0,347	0,1391	0,0468		
V-alak	$\gamma_1 =$	1	0,891	0,351	0,111	0,0467		
Szárny-alak	$\gamma_1 =$	1	0,897	0,4075	0,1493	0,070		
Közelítő	$\gamma_1 =$	1	0,893	0,342	0,0931	0,0315	0,0064	0,000833

meg, ez pedig w előjelét is megfordítja (lásd pl. (32)-t, (41)-et stb.). Így J_1 sem változik (29).

3. 2. Meredekebb keresztmetszetek. Meredekebb keresztmetszetek esetén a modellkísérletek tanúsága szerint korrigálni kell a számítást. Ezt egy későbbi alkalommal szeretnénk tárgyalni.

3. 3. A központosan nyomott héj-ív stabilitása az ív síkjában. A levezetések előtt feltettük, hogy az ív hosszirányú görbületi sugara (R) állandó, s az ív keresztmetszete mindenütt ugyanaz. A valóságban azonban általában változik a hosszirányú görbületi sugár, és sokszor az ív keresztmetszete is, az ív hossza mentén. Ilyenkor azt kell tennünk, hogy több keresztmetszetben kiszámítjuk a hatékony inercianyomatékot az illető keresztmetszet alakjának és az ott érvényes hosszirányú görbületi sugárnak megfelelően, s ezután az ívet közönséges, változó keresztmetszetű ívként kezelhetjük, tehát az ív kritikus H-erejét a megtámasztási módnak megfelelően a statika szokásos módszereivel határozhatjuk meg (lásd a számpéldát).

Eljárásunk ebben az esetben természetesen közelítő lesz s annál kevésbé megbízható, minél hirtelenebbül változik a hosszirányú görbületi sugár és a keresztmetszet. Az eddig végzett modellkísérletek azonban azt mutatják, hogy ez a közelítés a gyakorlati számításokhoz jól használható.

4. Számpélda

Számpéldának válasszunk egy megépült héjat: az Újpesti Bőrenyvgyár tetőelemeit (tervezte 1953-ban Gnädig Miklós, épült 1954-ben).

Az ív hosszmetszete és keresztmetszete is másodfokú parabola (12. ábra). A keresztmetszet d magassága a vállak felé ugyancsak parabola szerint csökken. A keresztmetszetek meredekségét nem vesszük figyelembe.

A főméretek:

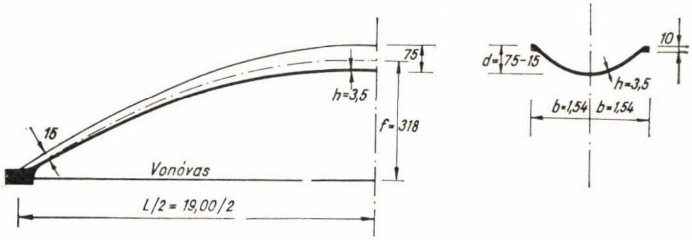
$$h = 3{,}5 \text{ cm}$$
$$b = 154 \text{ cm}$$
$$L = 19{,}00 \text{ m}$$
$$f = 3{,}18 \text{ m.}$$

Maga a héj téglabetétes vasbetonlemez. Az alkalmazott ún. kábeltéglák mérete 21 · 40 cm, a köztük levő köz 3 cm. Az átlagos rugalmassági modulus $E_{átl} = 86{,}6\ \mathrm{t/cm^2}$.

$$f/L = 318/1900 = 0{,}167$$

A kétcsuklósnak tekinthető ív kihajlási hossza ennek megfelelően:

$$L_0 = 0{,}586 \cdot 19{,}00 = 11{,}13\ \mathrm{m}$$



12. ábra

Az ív *inercianyomatékát* a záradékban, $L/4$-ben és a vállban számítjuk ki.

Záradékban : $d = 75$ cm;

$$R = \frac{L^2}{8f} = \frac{19^2}{8 \cdot 3{,}18} = 14{,}1\ \mathrm{m.}$$

(13) szerint : $$\beta b = \frac{1{,}316 \cdot 154}{\sqrt{3{,}5 \cdot 1410}} = 2{,}88$$

(62) szerint : $$\gamma_1 = \frac{1}{1 + 0{,}120 \cdot 2{,}88^4} = 0{,}108$$

(36) szerint: $$J_0 = 0{,}1778 \cdot 154 \cdot 3{,}5 \cdot 75^2 = 5{,}37 \cdot 10^5\ \mathrm{cm^4}$$

$$J_1 = \gamma_1 \cdot J_0 = 0{,}108 \cdot 5{,}37 \cdot 10^5 = 5{,}80 \cdot 10^4\ \mathrm{cm^4}$$

$$J_{lemez} = 2 \cdot \frac{154 \cdot 3{,}5^3}{12} = \qquad 0{,}11 \cdot 10^4\ \mathrm{cm^4}$$

$$J_{záradék} = \qquad = 5{,}91 \cdot 10^4\ \mathrm{cm^4}$$

L/4-ben : $d = 60$ cm; $R = 16{,}60$ m; $\beta b = 2{,}66$; $\gamma_1 = 0{,}142$

$$J_{L/4} = 5{,}01 \cdot 10^4\ \mathrm{cm^4}$$

Vállban : $d = 15$ cm; $R = 24{,}6$ m; $\beta b = 2{,}18$; $\gamma_1 = 0{,}270$

$$J_{váll} = 0{,}690 \cdot 10^4\ \mathrm{cm^4}$$

E három inercianyomaték alapján közelítően meghatározzuk a fél ív „átlagos" inercianyomatékát (pl. lehajlás-egyenlőség alapján):

$$J_{átl} \approx 4{,}67 \cdot 10^4\ \mathrm{cm^4}.$$

Így a rugalmas alapon számított kritikus H-erő:

$$H_{krit} = \frac{\pi^2 \cdot E_{átl} \cdot J_{átl}}{L_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 86{,}6 \cdot 4{,}67 \cdot 10^4}{1113^2} = 32{,}2 \text{ t.}$$

A valóságban keletkező H-erő (180 kg/m² összteherből):

$$H = 3{,}06 \cdot 180 \cdot \frac{19^2}{8 \cdot 3{,}18} = 7{,}82 \text{ t.}$$

A kihajlással szemben való biztonság tehát 32,2/7,82 = 4,12-szeres. A valóságban ezt a biztonságot még növeli a héjperem-ív megvastagítása *(12. ábra)*, amit a számításban nem vettünk figyelembe.

Összefoglalás

A dolgozat vékony, peremükön nem merevített héj-ívek hajlítási merevségét vizsgálja a szokásos rugalmasságtani feltevések mellett. E héj-ívek keresztmetszete a hajlító-igénybevétel hatására ellapul (vagy feldomborodik), s ezért az ív hajlítással szemben tanúsított merevsége általában lényegesen kisebb, mint az elemi elmélet szerint számítható merevség. Elméleti úton meghatározza a hajlítónyomaték és a görbületváltozás közötti összefüggést *tetszőleges szimmetrikus ívkeresztmetszet* esetére, számszerűen megadja az ún. hatékony inercianyomaték értékét a gyakorlatban leggyakrabban előforduló négyféle ívkeresztmetszetre, s egyszerű közelítő képletet is ad a különféle keresztmetszetek hatékony inercianyomatékának gyors meghatározásához. A központosan nyomott héj-ívnek az ív síkjában való stabilitásvizsgálatához az így kiszámított hatékony inercianyomatékot kell figyelembe venni. Végül számpéldán mutatja be az eredmények gyakorlati felhasználását.

IRODALOM:

[1] BELLUZZI, O.: Un caso di instabilità per ovalizzazione nei tubi sollecitati a flessione. Ric. Ingegn. 1. (1933) 79—87.
La stabilità dell'equilibrio delle coperture a due spioventi inflesse longitudinal mente. Ric. Ingegn. 2. (1934) 161—166.
Sulla stabilità dell'equilibrio delle volte Zeiss e Dywidag. Ric. Ingegn. 3. (1935) 35—40.

[2] BRAZIER, L. G.: On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and other „Thin" Sections. Proc. Royal Society, London, Ser. A. Vol. 116. (1927) 104—114.

[3] CHWALLA, E.: Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse. Zeitschr. f. angew. Mat. u. Mech. Bd. 13. (1933) 48—53.

[4] FUNK, P.: Über die durch Krümmung steifgemachten Messbänder. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 14. (1934) 251—52.
Über ein Stabilitätsproblem bei den durch Krümmung steifgemachten Messbändern. Österreichisches Ingenieur-Archiv, Bd. 5. (1951) 387—97.

[5] KÁRMÁN, TH.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichsrohre. VDI-Zeitschrift. Bd. 55. (1911) 1889—95.

[6] WEINEL, E.: Über Biegung und Stabilität eines doppelt gekrümmten Plattenstreifens. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 17. (1937) 366—9.