

AZ EGYENESTENGELYŰ, PRIZMATIKUS RÚD RUGALMAS KIHAJLÁSA, TETSZŐLEGES BEFOGÁSI VISZONYOK ESETÉN

1. Bevezetés

Euler alapvető műve óta számtalan munka foglalkozik az egyenestengelyű, prizmatikus rúd stabilitásának kérdésével. Ennek egyik oka a két rúdvég lehetséges megtámasztási módjának sokfélesége, mely a stabilitást nagymértékben befolyásolja. Az ideális — szabadon elmozduló, csuklós, mereven befogott — megtámasztási alapeseteken kívül igen nagyszámú lehetőséget rejt magában az egyes végeknek elfordulással és eltolódással szemben fennálló rugalmas befogása.

A keretszerkezetek térhódítása nyomán is sokan foglalkoztak a kérdéssel, s a keretek stabilitás vizsgálatát nagy részük az egyes oszlopoknak, mint végükön rugalmasan befogott rudaknak a számítására vezeti vissza.

A rúdelem meglehetősen általános tárgyalását *Mudrak* [1] cikkében lehet megtalálni. Ő elfordulással és rúdtengelyre merőleges eltolódással szemben rúdvégenként különböző merevségű befogás esetére adja meg képletét és grafikonját. A befogás merevségének jellemzésére a Cross-módszer rúdmerevségéhez hasonló tényezőket alkalmaz. Ezek: a befogás egységnyi elforgatásához szükséges nyomaték $[k]$, ill. a rúdtengelyre merőleges eltolásához szükséges erő $[c]$.

Általában azonban egy tetszőleges — jelen esetben a befogást végző — rugalmas tartó a ráható nyomaték következtében nemcsak szögforgást $\left(a_{11} = \frac{1}{k}\right)$, hanem eltolódást $[a_{12}]$ is végez, s hasonlóan a nyíróerő hatása sem csupán eltolódásban $\left(a_{22} = \frac{1}{c}\right)$, hanem egyidejűleg szögforgásban $[a_{21}]$ is megnyilvánul.

A következőkben rúdvégenként tetszőleges befogási egységtényezők $[a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}]$ esetére vizsgáljuk meg a stabilitást. Rugalmas befogásról lévén szó, feltételezhetjük a Maxwell-tétel érvényességét, azaz a_{12} és a_{21} felcserélhetőségét.

Az $a_{12} = 0$ helyettesítéssel természetesen [1] tanulmány képletét kapjuk, míg az egységtényezők speciális $[0, \infty]$ értékei a megtámasztási ill. kihajlási alapeseteket jelölik.

2. A kritikus erő számítására szolgáló képlet

Jelölések:

l a rúd hossza

EJ a rúd merevsége

a_{11} a befogásnak egységnyi nyomaték hatására létrejövő elfordulása

$a_{12} =$

a_{21} a befogásnak egységnyi nyomaték hatására létrejövő eltolódása, ill. a befogásnak egységnyi erő hatására létrejövő elfordulása

a_{22} a befogásnak egységnyi erő hatására létrejövő eltolódása

o, l indexben az alsó ill. felső rúdvéget jelöli



1. ábra

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= a_{11} \frac{EJ}{l} \\ A_{12} &= A_{21} = a_{12} \frac{EJ}{l^2} \\ A_{22} &= a_{22} \frac{EJ}{l^3} \end{aligned} \right\} \text{ a befogási egységtényezők-} \\ \text{nek dimenzió nélküli torzít-} \\ \text{ott értékei}$$

Az 1. ábra ill. a jelölések alapján a kritikus erő számítására az alábbi képletek szolgálnak. Az

$$\begin{aligned} & [1 + A_{12}^0 \lambda^2] [1 + A_{12}^l \lambda^2] [\sin \lambda + (A_{11}^0 + A_{11}^l) \lambda \cos \lambda] - \\ & - \frac{\lambda}{\sin \lambda} [1 - (A_{22}^0 + A_{22}^l) \lambda^2] [\sin \lambda + (A_{11}^0 + A_{11}^l) \lambda \cos \lambda] + \\ & + \frac{1}{\sin \lambda} [\cos \lambda - 1 + A_{12}^l \lambda^2 \cos \lambda - A_{12}^0 \lambda^2] [\cos \lambda - 1 + A_{12}^0 \lambda^2 \cos \lambda - A_{12}^l \lambda^2] - \\ & - A_{11}^0 \lambda [\cos \lambda - 1 + A_{12}^l \lambda^2 \cos \lambda - A_{12}^l \lambda^2] [1 + A_{12}^l \lambda^2] - \\ & - A_{11}^l \lambda [\cos \lambda - 1 + A_{12}^0 \lambda^2 \cos \lambda - A_{12}^0 \lambda^2] [1 + A_{12}^0 \lambda^2] + \\ & + A_{11}^0 A_{11}^l \lambda^3 [1 - (A_{22}^0 + A_{22}^l) \lambda^2] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

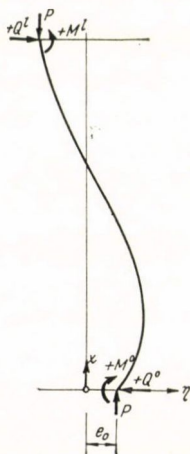
egyenletből a λ ismeretlen kiszámítván a kritikus erő

$$P_{kr} = \frac{\lambda^2 EJ}{l^2}. \quad (2)$$

Az (1) karakterisztikus egyenlet $A_{12}^0 = A_{12}^l = 0$ esetre megegyezik Mudrak [1] cikkében közölt karakterisztikus egyenlettel.

3. Az (1), (2) képletek levezetése.

Vegyük vizsgálat alá a 2. ábra szerinti, deformálódott rúdakat, melynek mindkét vége, a befogás rugalmassága következtében elfordul és el is tolódik.



2. ábra

A vízszintes erővetület alapján

$$|Q^0| = |Q^l| = Q. \quad (3)$$

Az egyes rúdkeresztmetszetekre ható nyomaték kifejezése

$$M = M_0 + P(\eta - l_0) + Q \cdot x. \quad (4)$$

A rugalmas rúd alakváltozása és a nyomaték között fennálló összefüggés alapján

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \eta'' = -\frac{M}{EJ} = -M_0 - P\eta + Pe_0 - Qx \quad (5a)$$

$$\eta'' + \frac{P}{EJ} \eta = -\frac{M_0}{EJ} + \frac{Pe_0}{EJ} - \frac{Q}{EJ} x. \quad (5b)$$

A másodrendű inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása;

$$\kappa^2 = \frac{P}{EJ} \quad (6)$$

jelöléssel

$$\eta = A \sin \kappa x + B \cos \kappa x - \frac{M_0}{P} + e_0 - \frac{Q}{P} x. \quad (7)$$

Az egyenletben szereplő ismeretlen együtthatókat és állandó tagokat a befogási keresztmetszetek elfordulására és eltolódására felírható alábbi feltételekből lehet meghatározni:

$$x = 0 \qquad x = l$$

$$\eta_0 = e_0 = -a_{12}^0 M_0 + a_{22}^0 Q, \qquad \eta_l = -a_{12}^l M^l - a_{22}^l Q, \qquad (8/a)$$

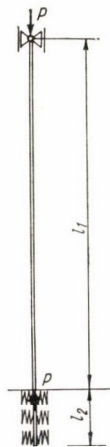
$$\eta'_0 = -a_{11}^0 M_0 + a_{12}^0 Q, \qquad \eta'_l = a_{11}^l M^l + a_{12}^l Q, \qquad (8/b)$$

$$\eta''_0 = -\frac{M_0}{EJ}, \qquad \eta''_l = -\frac{M^l}{EJ}. \qquad (8/c)$$

Fenti [8] jelű feltételi egyenletekbe, η -nak [7] alatt adott teljes megoldását ill. deriváltjait helyettesítve, hat ismeretlent (A, B, e_0, Q, M_0, M^l) tartalmazó, hat egyenletből álló homogén, lineáris egyenletrendszert nyerünk. Ennek csak az esetben van a triviálistól eltérő megoldása, ha az ismeretlenek együtthatóiból alkotott determináns zérussal egyenlő. A determináns zérus voltából adódik az [1] egyenlet. A $\lambda = \kappa l$ jelölésnek bevezetése után a [6] egyenletből a (2) képlet következik.

4. Példa az (1), (2) képletek alkalmazására

Tárgyaljuk a felső végén fix csuklóval megtámasztott, alsó végén l_2 hosszban folytonosan, rugalmasan megtámasztott rúd stabilitását.



3. ábra

E feladat cölöpök vizsgálatánál az alábbi közelítések esetében fordul elő.
1. Az l_2 hosszúságú, talajba ágyazott rész mint folytonosan rugalmasan megtámasztott tartó viselkedik, vagyis az elmozdulás és az elmozdulás helyén fellépő oldalirányú talaj reakció egymással arányosak [2]

$$p = C \cdot \eta$$

A képletben p a talajreakciót
 C az ágyazási együtthatót
 η az elmozdulást jelöli.

2. A nyomóerő a rugalmasan ágyazott részen hajlítás következtében fellépő deformációkat nem növeli tovább.

Eme feltevések mellett a kitűzött feladat a következőképpen tárgyalható. Az (1) jelű karakterisztikus egyenletbe, a felső, fixcsukló befogási rugalmasságának megfelelő $A_{11}^I = \infty$, $A_{12}^I = 0$, $A_{22}^I = 0$ értékeket helyettesítve, s a 0 indexet elhagyva, az alábbi, egyszerűbb képlet nyerhető

$$\lambda \cotg \lambda + \frac{1 + A_{11} \left(1 + \frac{2 A_{12}}{A_{11}} \right) \lambda^2 + A_{11}^2 \left[\left(\frac{A_{12}}{A_{11}} \right)^2 - \frac{A_{22}}{A_{11}} \right] \lambda^4}{A_{22} \lambda^2 - 1} = 0.$$

A befogás rugalmasságát a β összenyomódási modulusú talajba ágyazott d átmérőjű és l_2 hosszúságú tartó végének, az egységnyi terhelésnek hatására létrejövő mozgásai alapján lehet számítani [2]

Az összenyomódási modulus, és a rugalmasan ágyazott tartók elméletében szereplő C ágyazási együttható között Jáky [3] nyomán, $2 d$ mélységű összenyomódó talajréteget figyelembe véve:

$$Cd = \beta$$

összefüggés áll fenn.

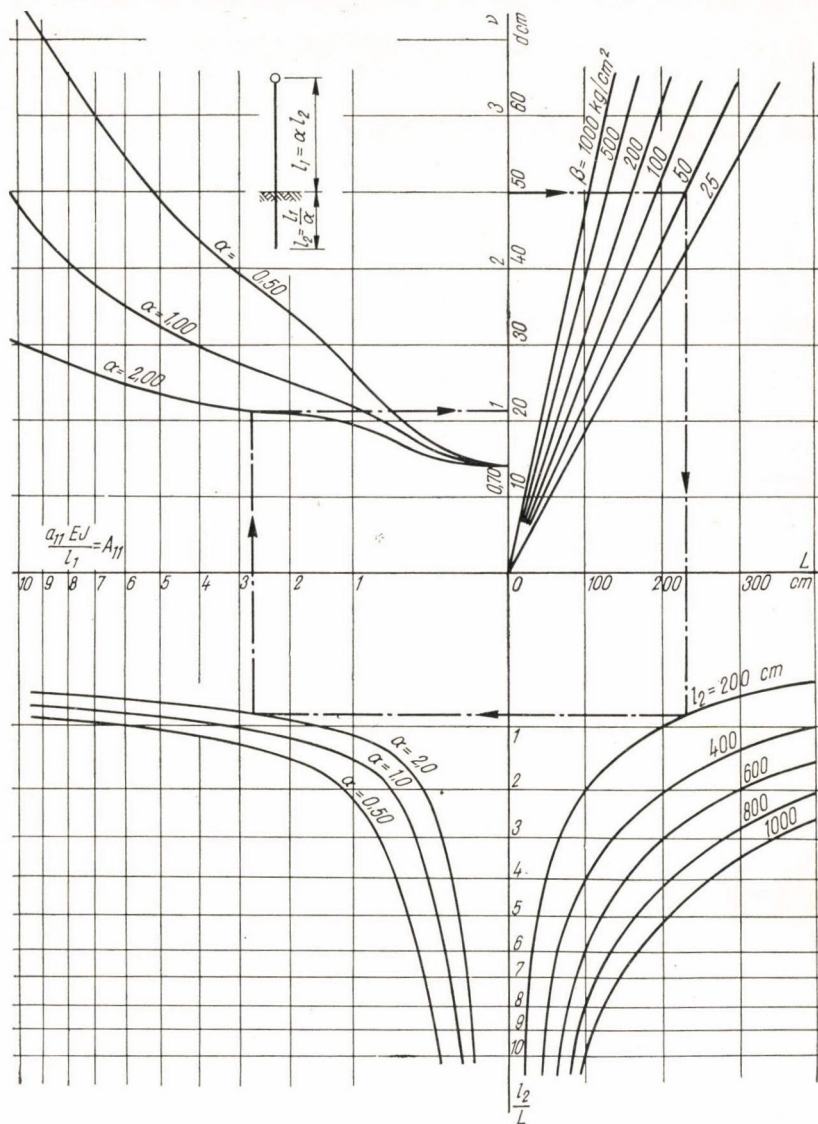
A rugalmasan ágyazott tartók elméletében oly fontos szerepet játszó merevségi hossz (L) viszont $E = 100\,000 \text{ kg/cm}^2$ rugalmassági modulusú, d átmérőjű cölöp esetén [4]

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{Cd}} = \frac{12 d}{\sqrt[4]{\beta}}.$$

Fenti adatokkal most már [2] segítségével kiszámíthatóak a befogási egység tényezők (A_{11} ; A_{12} ; A_{22}) s a karakterisztikus egyenletnek λ -ra történő megoldása a $\nu = \frac{\pi}{\lambda}$ rúdhossznövelő tényező megállapítását lehetővé teszi.

A mellékelt grafikon ν értékeit adja, használatát a bejelölt példa szemlélteti.

$$\left. \begin{array}{l} d = 50 \text{ cm} \\ \beta = 50 \text{ kg/cm}^2 \\ l_1 = 4,0 \text{ m} \\ l_2 = 2,0 \text{ m} \\ a = \frac{l_1}{l_2} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{adatokhoz a grafikonból leolvasható} \\ \nu = 1,1 \end{array}$$



4. ábra

IRODALOM:

1. MUDRAK, W.: Die Knickbedingungen für den geraden Stab. Der Bauingenieur 1941, S. 153
2. PASTERNAK: Die baustatische Theorie biegeffester Balken. Beton und Eisen, 1926.
3. JÁKY J.: Talajmechanika. Budapest. Egyetemi Nyomda, 1944.
4. KÖGLER, SCHEIDIG: Baugrund und Bauwerk. Berlin, 1948