

DR. BÖLCSKEI ELEMÉR, a műszaki tudományok doktora,

## SZILÁRD TESTEK ALAPVETŐ REOLÓGIAI TULAJDONSÁGAIRÓL

### 1. A dolgozat tárgya

A reológia az anyagok különféle okokból létrejövő alakváltozásának, ill. az alakváltozás időbeli lefolyásának törvényeit vizsgálja. A vizsgált anyag szilárd, folyékony vagy gáznemű egyaránt lehet. E dolgozat csupán a szilárd testek reológiai viselkedésével foglalkozik, mert a műszaki tudományok szempontjából annak a kérdésnek a megválaszolása döntő fontosságú, hogy a szilárd testek a különféle reológiai változást előidéző okok (az idő, a feszültség, a hőmérsékletváltozás) hatására, milyen alakváltozásokat (nyúlásokat, szögtorzulásokat) szenvednek.

A szilárdságtan elsősorban a feszültségek hatására létrejövő alakváltozásokkal foglalkozik. A feszültségek és a nyúlások közötti összefüggés jellemzésére mindeddig az ún. nyúlás-feszültség diagram szolgált. Kimutatjuk, hogy az időtől független nyúlás-feszültség diagram szilárdságtani kérdések általános tárgyalására csak ideálisan rugalmas anyag esetében használható. Ezzel szemben, ha az anyag alakját külső erőhatás nélkül változtatja (pl. zsugorodik), vagy a feszültségek hatására lassú alakváltozást szenved, vagy plasztikus sajátságokkal rendelkezik, ill. remanens alakváltozásai vannak stb., akkor a nyúlások és feszültségek közötti közvetlen összefüggést az időtől is függő új kapcsolattal kell helyettesíteni.

### 2. Általános reológiai alapfogalmak

#### 2.1 Reológiai változások okairól

A szilárd testek alakváltozásai általában három fő okra vezethetők vissza. Ezek az alábbiak:

a) Az anyagok önmagukban is reológiai változásokat szenvedhetnek, vagyis a terheletlen és állandó hőmérsékletű testek az időben minden külső ok nélkül is változtathatják alakjukat (pl. a beton zsugorodása, a könnyűfém-ötvetetek öregedése stb.). Ezen látszólag pusztán az idő hatására létrejövő alakváltozást a továbbiakban természetes alakváltozásnak fogjuk nevezni.

b) Közismert tény, hogy a testek a *feszültségek* hatására alakjukat megváltoztatják. A feszültségek hatására létrejövő alakváltozásnak két fajtája ismeretes. Az első a reverzibilis rugalmas alakváltozás, a második az irreverzi-

bilis alakváltozások csoportja, amelybe a remanens, a lassú, a plasztikus stb. alakváltozásokat soroljuk. Valamely test egy adott pontjában uralkodó feszültségállapot jellemzésére, az ún. feszültségtenzor ( $\Sigma$ ) szolgál, amely a szokásos jelölésekkel

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

alakú, ahol  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  az  $x, y, z$  irányú normál feszültséget, míg  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$  a nyírófeszültséget jelöli. A feszültségtenzor szimmetrikus, vagyis

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

E tenzor egyes elemei a vizsgált pont helyzetét meghatározó  $x, y, z$  koordinátától és ha a feszültségállapot időben változó, az időtől  $t$ -től függenek, tehát a feszültségtenzor elemeinek mindegyike négy változós függvény, vagyis

$$\sigma_x = f_1(x, y, z, t); \tau_{xy} = f_2(x, y, z, t) \text{ stb.}$$

c) Ismeretes az is, hogy a testek a *hőmérsékletváltozás* hatására is megváltoztatják alakjukat. A test egyes pontjaiban az időben változó hőmérséklet ( $T$ ) leírására egy szintén négyváltozós függvény szolgál, vagyis

$$T = g(x, y, z, t).$$

## 2.2 Az alakváltozás jellemzése

Valamely test egy adott pontjában létrejövő alakváltozásokat viszont az

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

tenzorral jellemezhetjük, ahol  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  az  $x, y, z$  irányú fajlagos nyúlást, míg  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$  a koordináta irányok közötti eredetileg  $90^\circ$ -os szög torzulását jelentik. A szimmetrikus alakváltozási tenzor egyes elemei általánosságban tehát szintén négyváltozós függvények, vagyis pl.

$$\varepsilon_x = h_1(x, y, z, t); \gamma_{xy} = h_2(x, y, z, t) \text{ stb.}$$

Végeredményben tehát *a különféle anyagú szilárd testek különféle okokból létrejövő alakváltozása fizikai jelenség, s mint ilyen, a test valamely pontjának térbeli helyzetét meghatározó három hosszúság-dimenziójú koordinátának, továbbá egy negyedik idő-dimenziójú koordinátának függvénye.*

## 2.3 A reológia alapkérdése

A reológia feladata a testek alakváltozását előidéző okok — vagyis az idő, a feszültségek és a hőmérsékletváltozás — hatására létrejövő alakváltozások meghatározása. A matematika nyelvén fogalmazva *megállapítandó a függő*

változónak tekinthető alakváltozási tenzor és a független változónak tekinthető idő, feszültségtenzor és hőmérsékletváltozás közötti kapcsolat. Szándékosan nem mondunk függvényt, mert mint később kimutatjuk, e mennyiségek között nem az eddigi szóhasználat szerinti függvény-függvénye kapcsolat, hanem egy magasabbrendű, a továbbiakban kapcsolatnak nevezett összefüggés áll fenn. E kapcsolat független változója ui. nem csupán az egy számmal jellemezhető  $t$  idő, hanem a  $\Sigma$  tenzor, ill.  $T$  mennyiség időbeli változását leíró tetszés szerinti függvény is. E kapcsolat

$$E = \Phi [t, \psi [\Sigma], \chi [T]] \quad (1)$$

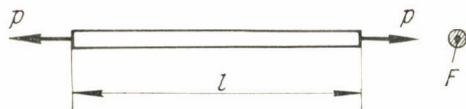
alakban írható, ahol egy új matematikai jelölést a

$$\psi [\Sigma], \text{ ill. } \chi [T]$$

vezettünk be. E jellel egy olyan kapcsolatot kívánunk szimbolizálni, ahol a független változó maga egy tetszés szerinti függvény.

### 3. Egyenes tengelyű rudak reológiai viszonyai

Az elmondottakból is kitűnik, hogy a reológiai okok következtében létrejövő alakváltozás pontos leírása teljes általánosságban igen bonyolult. Annak érdekében, hogy a reológiai jelenségeket világosan követni tudjuk, induljunk ki az egyenes tengelyű állandó keresztmetszetű (prizmatikus) rúd egyszerű esetéből (1. ábra), és tétélezzük fel a következőket:



1. ábra

a) A rúd alakját terhelés és hőmérsékletváltozás nélkül is az idő függvényében változtatja, és e változás a rúd minden pontjában azonos.

b) A rudat mindkét végén egyenlő nagyságú, de ellentétes értelmű húzó- vagy nyomóerő központosan terheli. Tétélezzük fel, hogy a feszültségek eloszlása a keresztmetszet mentén egyenletesnek tekinthető, továbbá azt, hogy a rúd nyomóerő hatására bekövetkező kigömbülését súrlódásmentes támaszokkal megfelelő módon megakadályozzuk, tehát a kihajlás jelensége nem következhet be.

c) Tétélezzük fel végül azt, hogy a rúd hőmérsékletváltozása egyenletes, vagyis annak minden keresztmetszetében és keresztmetszetének minden pontjában ugyanolyan nagyságú hőmérséklet uralkodik.

E feltételek következtében eredeti feladatunk lényegesen egyszerűsödik, mert a rúdban homogén lineáris feszültségi állapot uralkodik, s hőmérsékletváltozása egyenletes. Ezért, ha a keresztirányú kontrakcióra nem vagyunk tekintettel, az alakváltozás is homogén lineáris lesz, vagyis a rúd csak hossz-tengelyével párhuzamos alakváltozást szenved. A feszültségállapot, ill. az alakváltozási állapot jellemzésére a fenti 6—6 elemet tartalmazó tenzor helyett

egy-egy változóval leírható homogén — tehát az  $x, y, z$  koordinátáktól független — lineáris feszültségi, ill. alakváltozási állapot létesül. Ez esetben az alakváltozást előidéző feszültség egyetlen adattal ( $\sigma$ ) s az alakváltozás ugyancsak egy adattal, a rúd tengelyével párhuzamos fajlagos nyúlással ( $\varepsilon$ ) jellemezhető.

Az (1) összefüggés helyett tehát ez esetben az

$$\varepsilon = \Phi [t, \psi [f(t)], \chi [g(t)]] \quad (2)$$

összefüggés írható fel, ahol  $\Phi [ ]$  az anyag minőségét kifejezésre juttató kapcsolat, míg a független változók

$$\begin{aligned} t &= \text{idő} \\ \sigma = f(t) &= \text{a rúdban fellépő időben változó tengelyirányú feszültség} \\ T = g(t) &= \text{a rúd időben változó hőmérséklete.} \end{aligned}$$

### 3.1 A reológiai változásokat előidéző okok leírása

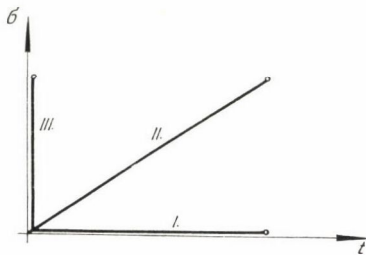
A fentiekben a reológiai változások három fő okát vizsgáltuk.

Elsőként az időt (folyó időt) említettük, amely rajtunk kívül álló egy számmal jellemezhető független változó.

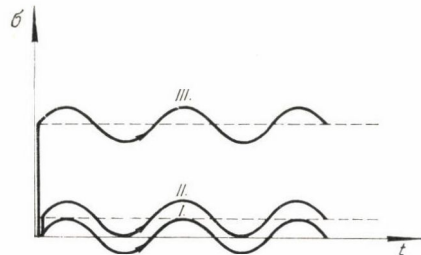
A második ok a feszültség, amelyet mi idézünk elő (pl. egy kísérletnél a szakítógépen). A feszültség változása tehát időben tőlünk függően tetszőszerint változó lehet. Egytengelyű feszültségállapot esetében a teher időbeli változását a

$$\sigma = f(t)$$

függvénnyel írhatjuk le. A továbbiakban az egyszerűbb tárgyalás érdekében kikötjük, hogy csupán olyan terhelési folyamatokkal foglalkozunk, amelyeknél a  $\sigma = f(t)$  függvény előjelet nem vált. Más szóval a  $\sigma = f(t)$  függvényt ábrázoló görbe teljes egészében az első tér negyedben van. A 2., 3., ill.



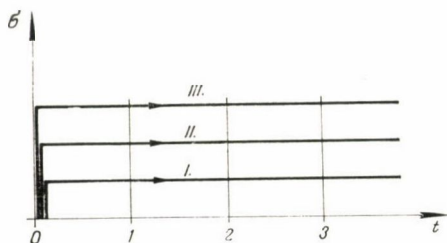
2. ábra



3. ábra

4. ábrán néhány példát mutatunk be a terhelés időbeli változtatására. A 2. ábrán az I. vonal a terheletlen rúd esetét a II. vonal egy olyan rúd esetét tünteti fel, amelynél a teher egyenletesen, fokozatosan növeljük, míg a III. vonal elvileg végtelen kis idő alatt végrehajtott pillanatnyi terhelést jelent. A 3. ábra ugyancsak három terhelési folyamatot tüntet fel. Az I. a lengőszilárdság, a II. a lüktetőszilárdság, végül a III. adott alsó és felső határok közötti fáradás vizsgálatára alkalmas. A 4. ábrán a  $t$  tengellyel párhuzamos I., II., ill. III. vonal különböző nagyságú, de időben állandó feszültségek hatására létrejövő

lassú alakváltozás vizsgálatára használható fel. Végül utalunk a 6. ábrára, amelyen fokozatos terhelésváltozás mellett a II.-vel jelzett vonal tetszés szerinti alakú, de egyértékű  $\sigma = f(t)$  görbét — ún. terhelési folyamatot — tüntet fel.



4. ábra

A harmadik ok a hőmérsékletváltozás. Ez szintén tőlünk függ. A rúd hőmérsékletét ui. időben tetszés szerinti módon az előző bekezdésben tárgyaltakhoz hasonlóan akár lineárisan, akár görbe vonal szerint változtathatjuk, vagy állandó hőmérsékleten tarthatjuk.

A rúd hőmérséklete tehát

$$T = g(t)$$

az időtől függő egyértékű egyváltozós függvénnyel jellemezhető.

Az elmondottakból világosan kitűnik, hogy a vizsgált test valamely pontjában a reológiai változásokat előidéző okok mindegyike az idő függvényének tekinthető.

Fentiek után szükséges egy lényeges körülményre külön és hangsúlyozottan rámutatni. A képlékenységtan ugyanis egy és több paraméteres terheket ismer. Ez a megkülönböztetés indokolt akkor, ha a terheket csak erő, ill. hosszúság dimenziójú térbeli koordinátáktól tesszük függővé. (Pl. egy kéttámaszú tartó teljes hosszán működő egyenletesen megoszló teher és egy adott pontban ható  $P$  összpontos teher, abban az esetben, ha intenzitásuk egymástól függetlenül változik az eddigi felfogás szerint két paraméteres terhelés.) Ha azonban fentiek alapján figyelemmel vagyunk a terhek időbeli változására, akkor e terhek mindegyike egy közös paraméternek, az időnek lesz függvénye, s a jelenségeket ezen egyetlen paraméter, az idő függvényében tárgyalhatjuk. (Pl. a fent említett kéttámaszú tartóra működő egyenletesen megoszló terhet  $t_0$  időponttól egyenletesen és fokozatosan növeljük, tehát  $p = f_1(t)$ . Majd egy adott  $t_1$  időpontban helyezük rá a tartóra az összpontos terhet, amelynek nagysága időben változó, tehát  $P = f_2(t)$  lesz.)

Természetesen elképzelhetők olyan látszólag több paraméteres terhek is, amelyeknél nemcsak a terhek nagysága, hanem helyzete is változik. (Pl. különösen nyomott rúd esetében egyidejűleg növelhetjük a terhelőerő nagyságát és annak központosságát.) Mindkét változást az idő függvényének foghatjuk fel, s ez esetben e látszólag kétparaméteres terhelés is egy közös paraméternek, az időnek lesz függvénye.

*Tehát a tartóra ható, helyzetüket és nagyságukat időben tetszés szerint változtató terhek mindig egy paraméteres időfüggvények; s nem ideálisan rugalmas anyagú tartók erőjátékának korrekt vizsgálata ezen egyetlen paraméter — az idő — függvényében hajtható végre.*

### 3.2 A szilárd testek alakváltozásai

A reológia alaptörvénye szerint a valóságban minden anyagi test változó mértékben ugyan, de az összes reológiai sajátságokkal rendelkezik. További vizsgálatainkban olyan képzelt anyagokkal fogunk foglalkozni, amelyek a reológiai sajátságok közül csupán eggyel rendelkeznek, s feltételezzük, hogy az összes többi reológiai sajátsága megszűntek. Ezen anyagokat attól függően, hogy melyik reológiai sajátsággal ruháztuk fel,

- ideálisan természetes alakváltozó
- ideálisan rugalmas (elasztikus)
- ideálisan maradó (remanens)
- ideálisan lassú alakváltozó
- ideálisan plasztikus
- ideálisan termikus

stb. anyagoknak fogjuk nevezni.

A továbbiakban tehát ezen csak egy-egy reológiai sajátsággal rendelkező ideális anyagokat fogjuk külön-külön tárgyalni.

#### 3.21 Ideálisan természetes alakváltozó testek

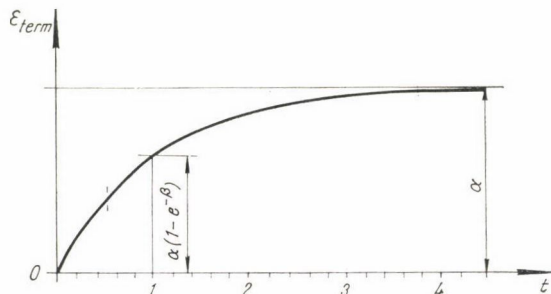
Természetes alakváltozás alatt az újonnan előállított anyagok minden külső ok nélkül létrejövő időben változó mértékű — a legtöbbször fokozatosan csökkenő — megrövidülését, ill. megnyúlását értjük. E jelenség egyes anyagoknál elhanyagolhatóan csekély mértékű (pl. fémek), míg másoknál számottevő alakváltozást idéz elő (pl. a cementhabarcs, a beton zsugorodása).

Egyenes tengelyű rúd egyszerű esetében a természetes alakváltozást az

$$\varepsilon = j(t)$$

függvénnyel írhatjuk le, ahol

- $j$  az anyagtól függő függvénykapcsolat,
- $t$  az idő pedig a független változó.



5. ábra

Például cementhabarcsnál, betonnál és rokon jellegű anyagoknál a természetes alakváltozást leíró függvény mérések alapján megállapított értéke (5. ábra)

$$\varepsilon_n = j(t) = a(1 - e^{-\beta t}),$$

ahol  $a$  a  $t = \infty$  időpontban fellépő fajlagos hosszváltozás  
 $\beta$  a görbe alakjára jellemző szám.

Tehát mindkét állandó mérések útján megállapítható anyagjellemző.

### 3.22 Ideálisan rugalmas testek

Ideálisan rugalmas alakváltozásnak nevezzük a szilárd testek feszültség hatására létrejövő azon alakváltozását, amely az előidéző feszültség megszűnte után ugyancsak megszűnik. Tehát a test eredeti alakját visszanyeri, vagyis a tehermentesítés azonos törvényszerűség szerint zajlik le. Röviden úgy fogalmazhatjuk, hogy az ideálisan rugalmas alakváltozás teljes egészében reverzibilis. Az ideálisan rugalmas alakváltozás során a nyúlások és feszültségek között kölcsönös és egyértelmű kapcsolat áll fenn. E kapcsolatot az

$$\varepsilon_r = k(\sigma)$$

egyenlettel jellemezhető, melyet grafikusán az  $(\varepsilon, \sigma)$  tengelykereszt síkjában egy, a koordináta-rendszer kezdőpontján átmenő diagram, az ún. nyúlás-feszültségdiagram ábrázol.

Az ideálisan rugalmas alakváltozásokra vonatkozó fenti megállapításokat változatlanul megtartva létesítsünk a nyúlások és feszültségek között ismét kölcsönös és egyértelmű kapcsolatot, de oly módon, hogy az  $\varepsilon_r = k(\sigma)$  összefüggést nem közvetlenül, hanem paraméteres formában írjuk fel.

Természetes paraméterként az időt választjuk. A rúdban fellépő feszültséget az időben tetszés szerint változtathatjuk, s e változást a

$$\sigma = f(t)$$

függvénnyel írhatjuk le. Ideálisan rugalmas alakváltozás esetében a nyúlások és feszültségek között kölcsönös és egyértelmű kapcsolat áll fenn, amelyet az

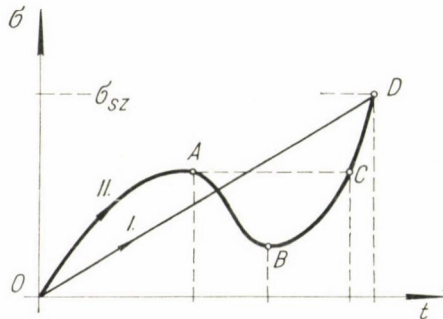
$$\varepsilon_r = k(\sigma)$$

ill. az

$$\varepsilon_r = k[f(t)]$$

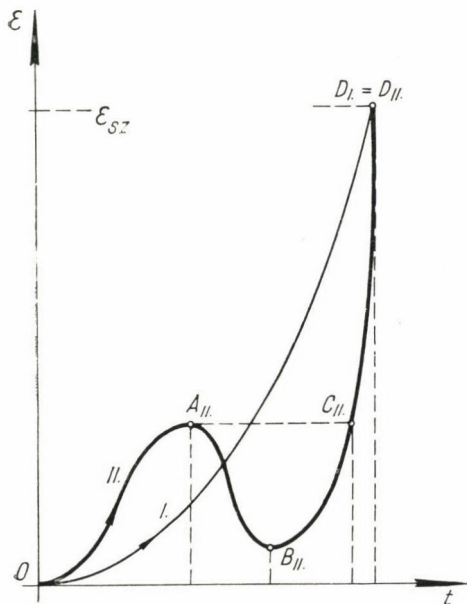
összefüggéssel írhatunk le.

Az időparaméter felhasználásával felírt összefüggést grafikusán is ábrázolhatjuk. A rúdra ható erőt — illetve ennek megfelelően a rúd keresztmetszeteiben állandónak feltételezett feszültséget — az idő függvényében fel-

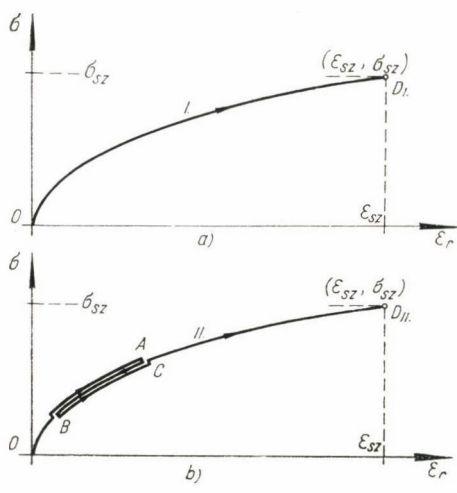


6. ábra

rajzolva a 6. ábrát kapjuk. A  $(t, \sigma)$  tengelykereszt síkjában rajzolt tetszés szerinti vonal egy-egy terhelési folyamatnak felel meg. A 6. ábrán rajzolt I. jelű vonal a feszültségek fokozatos és egyenletes növelését tünteti fel, míg a II. vonal esetében a feszültségek változása egy harmadrendű parabola szerint történik. A 7. ábrán e terhelési folyamatoknak megfelelően a nyúlások változását tüntettük fel a  $(t, \varepsilon)$  tengelykereszt síkjában. Ha ugyanis ismerjük az ideálisan rugalmas anyag nyúlásfeszültség diagramját, kiszámíthatjuk, ill. megszerkeszthetjük a 7. ábrán feltüntetett görbéket, melyek közül az I. az I., II. pedig a II. jelű terhelési folyamatnak felel meg.



7. ábra



8. ábra

Megjegyezzük, hogy ideálisan rugalmas anyag esetében, minthogy a nyúlások és feszültségek között kölcsönös és egyértelmű összefüggés áll fenn, a 6. ábrán levő  $D$  pontba bármilyen folyamat révén jutottunk is el, a 7. ábrán az ennek megfelelő  $D_I$  és  $D_{II}$  pont azonos lesz.

Megszerkeszthető e két terhelési útnak megfelelő  $\varepsilon_r = k(\sigma)$  diagram is, melyet I terhelési folyamat esetében az jellemez, hogy az egész görbét csupán egyszer jártuk be (8a ábra). A II terhelési út esetében viszont a  $B-A$ ,  $A-B$ , ill.  $B-C$  szakaszon ugyanazon a vonalon járva haladtunk végig, tehát e szakaszon háromszor mentünk végig (8b ábra).

E tárgyalásmód esetében a rugalmassági modulus is az idő függvényeként jelentkezik. A pillanatnyi rugalmassági moduluson a feszültségek nyúlások szerinti differenciálhányadosát értjük, vagyis

$$E(t) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_r}$$



A paraméteres formában megadott függvények differenciálási szabálya szerint

$$E(t) = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{d\varepsilon_r}{dt}} = \frac{\frac{df(t)}{dt}}{\frac{d}{dt} k [f(t)]} = \frac{f'}{k' \cdot f} = \frac{1}{k'}$$

*Példa* : Az elméleti rugalmasságtan olyan ideálisan rugalmas anyaggal dolgozik, amelynek nyúlás-feszültség diagramja a koordináta-rendszer kezdőpontján átmenő ferde egyenes. Ennek az  $\varepsilon$  tengellyel bezárt szöge arctg  $E$ . Ez esetben a viszonyok ugyan egyszerűbbek, de lényegében a fent általánosságban tárgyalt ideálisan rugalmas alakváltozás speciális esetéről van szó.

A terhelési folyamat

$$\sigma = f(t)$$

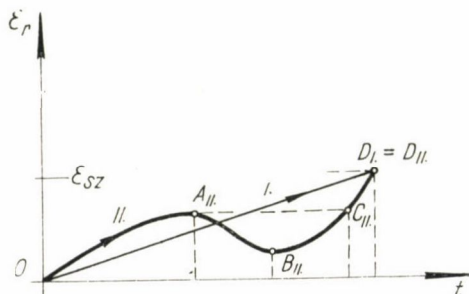
$$\varepsilon_r = k(\sigma) = \frac{\sigma}{E}$$

vagyis

$$\varepsilon_r = k[f(t)] = \frac{f(t)}{E}$$

A rugalmassági modulus pedig

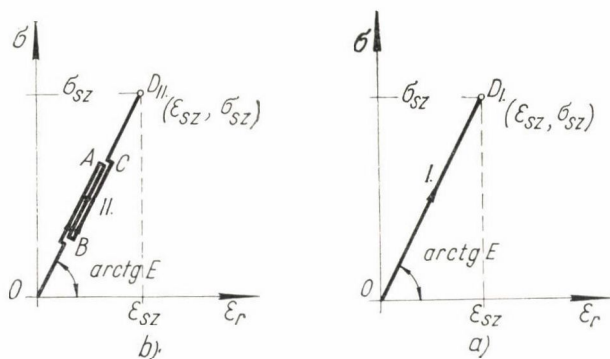
$$E(t) = \frac{1}{k'} = E = const.$$



9. ábra

Ez esetre is elkészítettük az időparaméter függvényében ugyanazon két terhelési folyamatra vonatkozó (6. ábra) fajlagos nyúlások görbéjét (9. ábra), és ábráztuk a 10a, ill. 10b ábrán a megfelelő nyúlás-feszültség diagramokat is.

E tárgyalásmód esetében könnyen igazolható az a közismert tény, hogy a szuperpozíció törvénye az ideálisan rugalmas anyagok közül is csupán azoknál érvényes, amelyeknek nyúlás-feszültség diagramja ferde egyenes szerint változó.



10. ábra

### 3.23 Ideálisan maradó alakváltozású testek

Maradó alakváltozásnak nevezzük azt a — valóságban önállóan nem létező — alakváltozást, melynek nagysága a terhelési folyamat során a rúdra működött legnagyobb feszültségtől ( $\sigma_{\max}$ -tól) függ és az jellemzi, hogy a feszültség legnagyobb érték alá történő csökkentése, ill. teljes megszüntetése után is megmarad. Ez az alakváltozás tehát nem reverzibilis, és a nyúlások és feszültségek között már nincs kölcsönös és egyértelmű kapcsolat, hisz ez az alakváltozás nem a pillanatnyi feszültségnek, hanem a rúd terhelési folyamata alatt elért legnagyobb feszültségnek függvénye. Ez az alakváltozás az anyag legnagyobb feszültségének hatására létrejövő szerkezeti átalakulása, amelynek a szakadó nyúlás szab felső határt.

$$\varepsilon_m = l(\sigma_{\max})$$

Ha ismeretes a terhelési folyamat

$$\sigma = f(t)$$

ennek alapján meghatározható a

$$\sigma_{\max} = m(t)$$

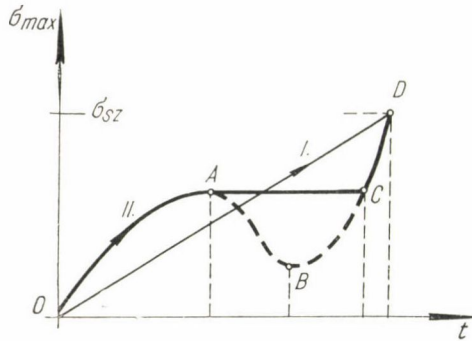
és így

$$\varepsilon_m = l[m(t)]$$

összefüggés.

Vizsgáljuk meg az alábbi példát. A feszültségek változása történetük ismét a 6. ábrán bemutatott I., ill. II. terhelési folyamat szerint. E terhelési folyamatokhoz tartozó könnyen megszerkeszthető  $\sigma_{\max}$  görbéket a 11. ábra tünteti fel. Monoton növekvő terhelés esetében, azaz ha a vizsgált tartományban  $\frac{d\sigma}{dt} \neq 0$  (pl. I. terhelési folyamat esetében) a  $\sigma$  görbe azonos a  $\sigma_{\max}$  görbével. Olyan

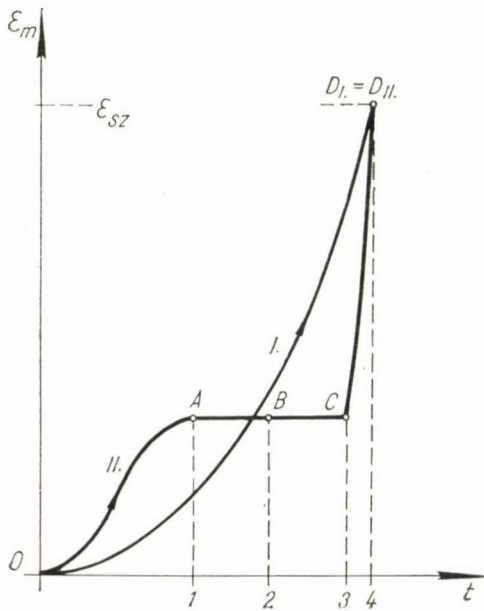
terhelési folyamatok esetében, amelyeknél ún. feszültségvölgyek is találhatóak az első monoton növekvő szakaszon  $\sigma_{\max} \equiv \sigma$  (pl. a II. terhelési út esetében az  $OA$  szakaszon), míg a feszültségvölgyben (pl. a II. terhelési út esetében  $AC$  szakaszon)  $\sigma_{\max} = \sigma_A$ , majd ha a feszültség  $\max \sigma$ -t meghaladja, ismét a  $\sigma_{\max} \equiv \sigma$  összefüggés érvényes (pl. a II. terhelési út esetében  $CD$  szakaszon).



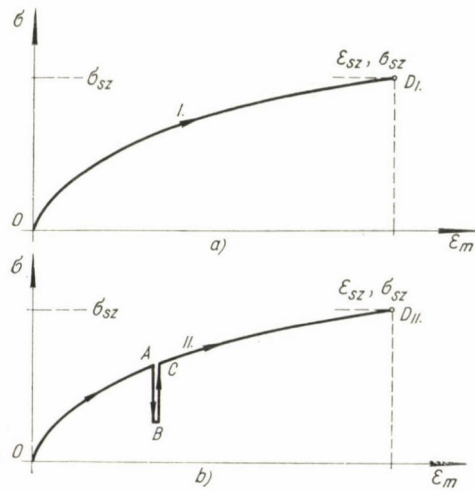
11. ábra

A feszültségvölgyben  $A$  és  $C$  pontok között tetszés szerinti, de a  $\sigma \leq \sigma_A$  egyenlőtlenséget kielégítő feszültségnél  $\sigma_{\max}$  értéke azonos. Tehát az  $AC$  szakaszon  $\sigma$  és  $\varepsilon_m$  mennyiségek között kölcsönös és egyértelmű kapcsolat nem áll fenn.

$\sigma_{\max} = m(t)$  összefüggés ismeretében a fajlagos nyúlások időbeli változása egyértelműen meghatározható az anyagi sajátságoktól függő  $\varepsilon_m = l(\sigma_{\max})$  összefüggés alapján. Az eredményeket a 12. ábrán tüntettük fel.



12. ábra



13. ábra

A 13a ábra az I., a 13b ábra pedig a II. terhelési úthoz tartozó nyúlás-feszültségi diagramot mutatja, más terhelési utakhoz ismét más nyúlás-feszültség diagram tartozik. E diagramok tehát egy, a  $\sigma$  tengellyel párhuzamos egyenes-sereget alkotnak, amelynek differenciál egyenlete szinguláris megoldásként az  $\varepsilon_m = l(\sigma)$  görbét is tartalmazza.

### 3.24 Ideálisan lassú alakváltozó testek

Lassú alakváltozásnak nevezzük azt a nem reverzibilis alakváltozást, amely a testre ható teher működése közben az idő függvényében jön létre. A jelenséget relaxációnak (újranyúlásnak) is nevezik.

A lassú alakváltozás sebessége egyszerű húzott rúd esetében a feszültség és az idő függvénye, vagyis

$$\frac{d\varepsilon_l}{dt} = n(\sigma, t).$$

E függvény alakja anyagok szerint változó, de mérési eredményekből ismeretes, hogy a lassú alakváltozás sebessége első közelítésben arányos a rugalmas nyúlással és egy időben csökkenő tényezővel, mégpedig

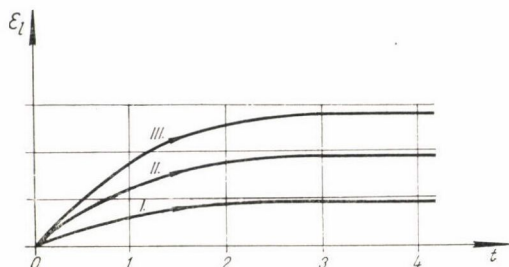
$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_l}{dt} &= \varepsilon_r e^{-\beta t} = k(\sigma) e^{-\beta t} \\ \varepsilon_l &= \int_0^t k(\sigma) e^{-\beta t} dt = \int_0^t k[f(t)] e^{-\beta t} dt. \end{aligned}$$

#### Példák

1. Első példaként vizsgáljuk a  $\sigma = \sigma_0$  állandó feszültség esetét  $E$  rugalmassági modulusú lineárisan rugalmas anyagnál.

$$\varepsilon_l = a' \frac{\sigma_0}{E} \left[ -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \right]_0^t = \frac{a'}{\beta} \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{-\beta t}] = \alpha_0 \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{-\beta t}].$$

E képletben  $\alpha_0 \sigma_0 / E$  a  $t = \infty$  időpontban létrejövő legnagyobb nyúlás, míg  $\beta$  a lassú alakváltozás lefolyási sebességére jellemző szám. Ha  $\beta$  nagy szám, a lassú alakváltozás hirtelen lezajlik, míg ha  $\beta$  kis szám, az alakváltozás igen lassan jön létre. Fenti eredmények acél és betontesteken végrehajtott mérésekkel jó egyezést mutatnak. A 4. ábrán feltüntetett terhelési utak esetében a 14. ábrán látható  $t, \varepsilon$  síkon ábrázolt görbékét kapjuk.



14. ábra

2. A lassú alakváltozással rokon, de fordított jelenség az ernyedés. Ez alatt az állandó hosszúságú feszített rúdon fellépő feszültségsökkenést értjük. Vizsgáljuk meg egy  $E$  rugalmassági modulusú rugalmas anyag esetét. A rugalmas nyúlás

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{E}.$$

A lassú alakváltozás

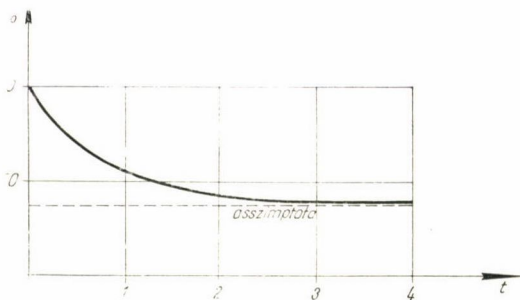
$$\varepsilon_l = \alpha \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-\beta t})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_l = \text{const} = \frac{\sigma}{E} [1 + (1 - e^{-\beta t})]$$

és ebből

$$\sigma = \frac{E \varepsilon}{1 + \alpha(1 - e^{-\beta t})}.$$

A megfelelő görbét a 15. ábra tünteti fel.



15. ábra

Természetesen nem rugalmas anyag esetében az összefüggés jóval bonyolultabb.

Az 1. és 2. példában tárgyalt lassú alakváltozás és ernyedés között szoros kapcsolat van. Ha megállapítjuk a lassú alakváltozásra jellemző  $\alpha$  és  $\beta$  állandókat, akkor fenti képlet alapján meghatározhatjuk az ernyedés során fellépő feszültségeket. Fent vázolt számítások ellenőrzésére az ÉKME II. Híd-építéstani Tanszékének laboratóriumában 1952. évben végzett kísérletek eredményeit (Veress Sándor: „A hazai 5 mm-es különleges betonacél relaxációs jelenségei” ÉKME Tudományos Közleményei, 1956) használtuk fel.

Meghatároztuk az előhúzás nélküli huzalon a 10.500, 9.750 és a 9000 kg/cm<sup>2</sup> állandó feszültséghez tartozó lassú alakváltozási görbék egyenleteit s ezekből az  $\alpha$ ,  $\beta$  állandókat. Ezen állandók segítségével felírtuk az ernyedés összefüggését, és meghatároztuk a 20 óra és a 164 óra közötti ernyedés következtében előálló feszültségsökkenést, majd ezt a mért értékekkel együtt az alábbi táblázatban tüntettük fel.

Feszültség (kg/cm <sup>2</sup> )	Feszültségesés (kg/cm <sup>2</sup> )						A mért és számított feszültségesés különbsége
	számított			mért			
	20 <sup>h</sup>	164 <sup>h</sup>	$\Delta\sigma$	20 <sup>h</sup>	164 <sup>h</sup>	$\Delta\sigma$	
9000	260	340	80	165	240	75	5
9750	317	420	103	180	266	86	17
10500	360	480	120	205	290	85	35

A legnagyobb feszültségesés különbségnek (35 kg/cm<sup>2</sup>) megfelelő nyúlás  $35/2000000 = 0,0000175$ . Ez átszámolva 1,4 C° hőmérsékletkülönbségnek felel meg. Minthogy e mérések során a laboratóriumi hőmérséklet a feljegyzések szerint is ingadozott, e hiba a mérési pontosságon belül van. Egy másik — ilyen jellegű méréseknél elkerülhetetlen — hibaforrás az, hogy a huzal leterhelése 3 percig tart, és az első leolvasás 6 perc múlva történik, tehát a görbének éppen a legmeredekebb szakaszán nem lehet mérni. Logikus, hogy e hiba nagyobb feszültségeknél jelentkezik.

3. Ha a rúd tönkremenetele egy előre meghatározott  $\varepsilon_{\max}$  értéknél következik be, kiszámítható az az idő is, amikor a  $\sigma = \sigma_0$  állandó feszültséggel terhelt rúd a lassú alakváltozás miatt elszakad.

Ez esetben ugyanis

$$\sigma_0 = \frac{E \varepsilon_{\max}}{1 + \alpha (1 - e^{-\beta t})}$$

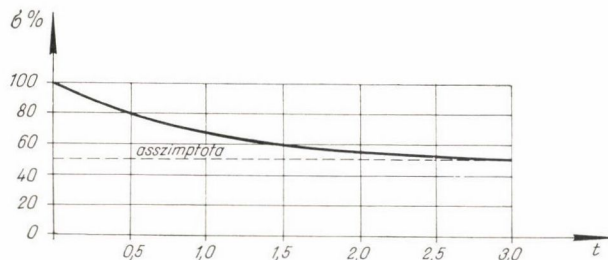
és innen

$$\alpha (1 - e^{-\beta t}) = \frac{E \varepsilon_{\max}}{\sigma_0} - 1$$

$$e^{\beta t} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{E \varepsilon_{\max}}{\sigma_0} - 1 \right)}$$

$$t = \frac{1}{\beta} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{E \varepsilon_{\max}}{\sigma_0} - 1 \right)}$$

Az eredményt a  $(t, \sigma)$  tengelykereszt síkjában a 16. ábra mutatja.



16. ábra

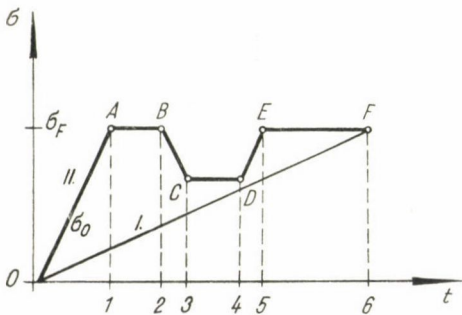
Az ábrából látható, hogy az  $\varepsilon_{\max}$  nyúlást előidéző legnagyobb feszültséghez azonnali szakadás tartozik, míg ennél alacsonyabb feszültségeknél a szakadás bekövetkeztéig mindig nagyobb és nagyobb idő szükséges. Található azonban a feszültségnek egy olyan szélső értéke, amely mellett a szakadás már csak  $t = \infty$  időpontban következik be.

E görbe alakja erősen hasonlít a kifáradási görbéhez, de ennél az abszcissa-tengelyen az  $n$  ismétlési szám helyett az idő szerepel, az ordinátatengelyre pedig a fáradási feszültség van felrakva. A fárasztás siettetni a rúd tönkremenetelét, tehát az idő függvényében felrakott fáradási görbe a fárasztás amplitudójától függő mértékben mindig ezen burkoló görbe alatt fog elhelyezkedni. A felrakott görbe az anyag  $o$  amplitudójú fárasztásához tartozó speciális görbének, az asszimptóta a  $o$  amplitudójú fárasztási határnak tekinthető.

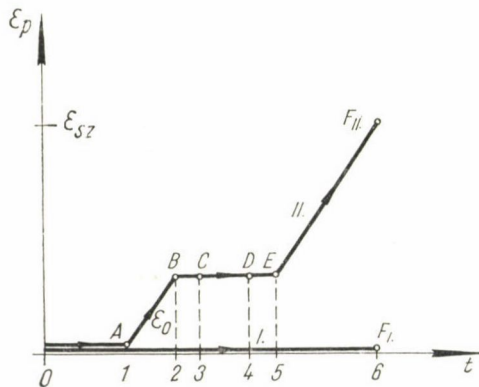
### 3.25 Ideálisan plasztikus testek

Az ideálisan plasztikus anyagokat az jellemzi, hogy egy megadott szélső feszültség eléréséig nyúlásmentesek, majd e határt (az ún. folyáshatárt) elérve a feszültségek növelése nélkül is növekszenek a fajlagos nyúlások.

Ennek bemutatására dolgoztuk ki a 17. ábrát, amelyen két terhelési folyamatot tüntettünk fel, mégpedig az I-gyel jelölt ferde egyenes szerinti és a II-vel jelölt tört vonalakból összerakott utat. Mindkét terhelési folyamat a  $t, \sigma$  sík ugyanazon  $F'$  pontjába vezet. Megjegyezzük, hogy a poligonális II. jelű terhelési út helyett tetszés szerinti folytonos és differenciálható vagy folytonos és helyenként töréspontokkal csatlakozó görbe vonalat is választhattunk volna. A poligonális terhelési utat csupán a szerkesztés, ill. a számítás egyszerűsítése céljából vettük alapul.



17. ábra

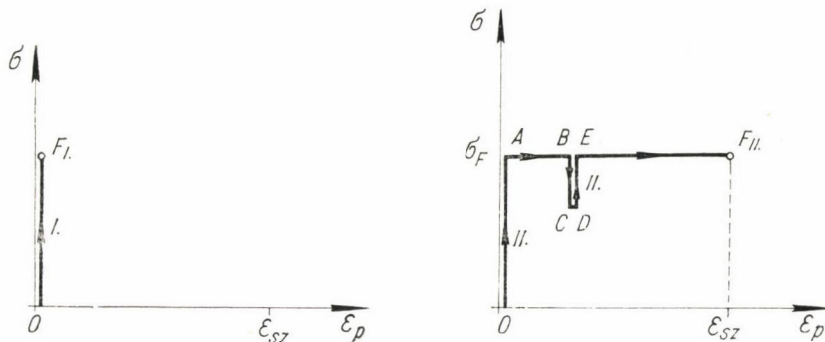


18. ábra

Ideálisan plasztikus anyagról lévén szó, legyen a nyúlás-feszültség diagram a 19. ábrán feltüntetett, s tételezzük fel, hogy az anyag az  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$  nyúlásnál tönkremegy. E diagramból kitűnik, hogy a  $\sigma_F$  feszültséghez tartozó nyúlások ezzel még nincsenek egyértelműen meghatározva, tehát további adatokra van szükségük. Ismeretes, hogy a folyáshatár elérésekor az anyag egy rövid ideig még teherbíró, vagyis a nyúlás e feszültség mellett is időben lejátszódó jelenség. A továbbiakban pusztán egyszerűség céljából azt az esetet

vizsgáljuk, amikor a folyáshatárnál fellépő nyúlás arányos az idővel. Vagyis tételezzük fel, hogy

$$\begin{aligned} \text{ha } \sigma &= \sigma_F & \varepsilon_p &= \varepsilon_0 t \\ \text{míg ha } \sigma &< \sigma_F & \varepsilon_p &= 0. \end{aligned}$$

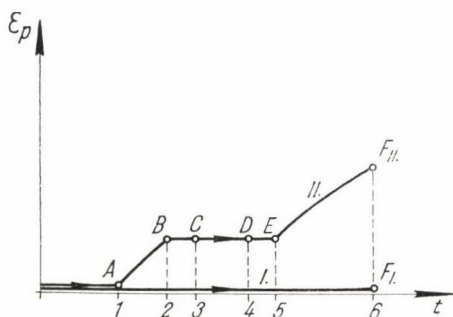


19. ábra

Ezen adatok alapján most már megszerkeszthetjük az I. és II. jelű terhelési utakhoz tartozó nyúlásokat az idő függvényében. Az eredményt a 18. ábra tünteti fel, míg a vonatkozó matematikai összefüggéseket az alábbi táblázatban állítottuk össze:

Idő-tartam	Feszültség $\sigma$	Nyúlás $\varepsilon$
$t_0 - t_1$	$\sigma = \sigma_0 t \leq \sigma_F$	$\varepsilon = 0$
$t_1 - t_2$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \varepsilon_0 (t - t_1)$
$t_2 - t_3$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0 (t - t_2) \leq \sigma_F$	$\varepsilon = \varepsilon_0 (t_2 - t_1)$
$t_3 - t_4$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0 (t_3 - t_2) < \sigma$	$\varepsilon = \varepsilon_0 (t_2 - t_1)$
$t_4 - t_5$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0 (t_3 - t_2) \sigma_0 (t - t_4)$	$\varepsilon = \varepsilon_0 (t_2 - t_1)$
$t_5 - t_6$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \varepsilon_0 (t_2 - t_1) + \varepsilon_0 (t - t_5)$

A  $t, \sigma$  síkon, ill. a  $t, \varepsilon$  síkon ábrázolt poligonok egyenleteit, tekintettel a terhelési út poligonális voltára, csak az egyes szakaszokra lehet felírni. E felírásból



20. ábra



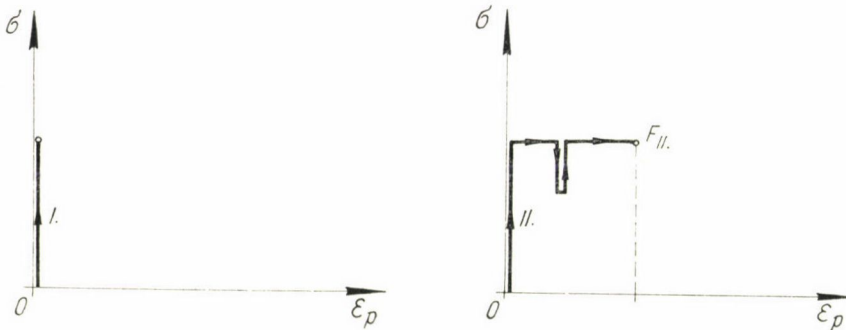
következik, hogy úgy a  $t, \sigma$ , mint a  $t, \varepsilon$ , valamint a  $\sigma, \varepsilon$  összefüggés is folytonos ugyan, de csak a tartományok középrészein differenciálható, míg a sarokpontokban az egyértelmű differenciálhatóság kritériuma nem áll fenn.

Említett ábrákból az is megállapítható, hogy a  $t, \sigma$  síkon azonos pontokba vezető terhelési utakhoz a  $t, \varepsilon$  síkon más-más pontok tartoznak. Döntő különbség tehát az ideálisan rugalmas és ideálisan plasztikus anyag között az, hogy a  $t, \sigma$  síkban feltüntetett tetszés szerinti terhelési utak azonos pontjainak ideálisan rugalmas anyag esetében a  $t, \varepsilon$  síkon is azonos pontok felelnek meg, míg ideálisan plasztikus anyagok esetében ezek a pontok általában nem azonosak.

További példaként vizsgáljuk meg azt az esetet, amelynél a folyáshatár elérésekor a nyúlások az

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0 (1 - e^{-\beta t})$$

függvény szerint változnak. A terhelési utak legyenek azonosak a 17. ábrán feltüntetetttel, s legyen a nyúlás-feszültség diagram is azonos a fentiekben tárgyalttal, amely a 21. ábrán látható. Ezen adatok birtokában megszerkeszthető



21. ábra

mindkét terhelési úthoz tartozó fajlagos nyúlások vonala is az idő függvényében. E vonalak azonban már nem azonosak a 18. ábrán szereplővel. Alakjukat a 20. ábra mutatja.

### 3.26 Ideálisan termikus anyagú testek

A felmelegedés, ill. lehűlés hatására lejátszódó jelenségek érthető és világos tárgyalása érdekében ismét a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk. Szorítkozunk az építő- és gépiparban használatos szilárd anyagokra, és vizsgálatainkat az itt előforduló hőmérsékleti határok között lejátszódó jelenségekre korlátozzuk. Legyen a vizsgált test ismét egy prizmatikus rúd, amelynek alakváltozásait egyenletes hőmérsékletváltozás esetében kívánjuk követni. Tudjuk, hogy a fajlagos hosszváltozás

$$\varepsilon_{h\ddot{o}m} = \alpha(T, \sigma) \cdot T$$

összefüggéssel írható le, ahol

- $\alpha$  az anyag elsősorban hőmérséklettől, feszültségtől függő tágulási együtthatója,
- $\sigma$  a rúd hossztengetely irányú feszültsége,
- $T$  pedig a rúd hőmérséklete, amelynek időbeli változását a

$$T = g(t)$$

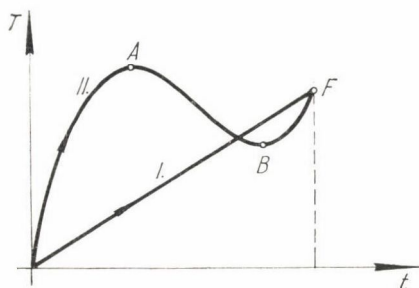
függvény írja le, vagyis

$$\varepsilon_{h\ddot{o}m} = \alpha [g(t), f(t)] g(t).$$

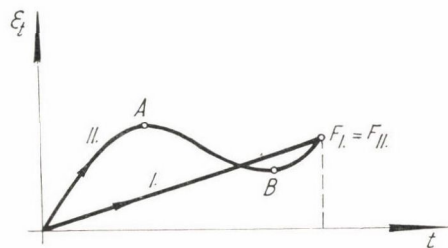
Tapasztalati tény, hogy a tágulási együttható a fent említett hőmérsékleti határok és szokásos igénybevételi viszonyok mellett állandónak tekinthető és így

$$\varepsilon_{h\ddot{o}m} = \alpha T = \alpha g(t)$$

alakban írható. Látjuk, hogy végeredményben a hőmérsékletváltozás hatására létrejövő alakváltozás is az idő függvényének tekinthető. Ennek bemutatására



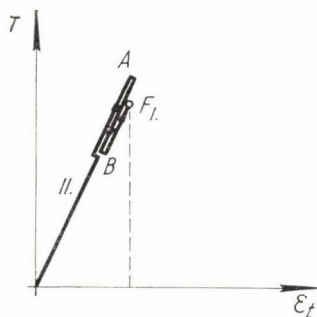
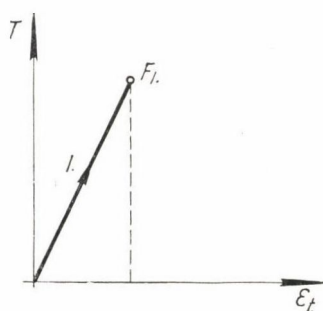
22. ábra



23. ábra

két hőmérsékletváltozási görbét, ún. „terhelési utat” a 22. ábrán mutatunk be, és az ezeknek megfelelő nyúlási görbéket a 23. ábra tünteti fel. A nyúlás-feszültség diagramhoz hasonlóan, itt nyúlás-hőmérséklet diagramot rajzolhatunk (24. ábra).

Az elmondottak alapján az is belátható, hogy ha a tágulási együttható független a hőmérséklettől, ill. a feszültségtől, a szuperpozíció törvénye érvényes. Ha azonban a tágulási együttható említett hatásoktól is függ e hatások egyszerű egymásrahalmazása nem engedhető meg.



24. ábra

#### 4. A valóságos anyagok reológiai viselkedése

A fentiekben az egyes reológiai jelenségeket ún. ideális anyagokon külön-külön vizsgáltuk, minden esetben feltételezve azt, hogy a vizsgált alakváltozás létrejöttével egyidejűen az összes többi alakváltozás zérus. A reológia alaptörvényéből tudjuk, hogy a valóságos anyagok különböző mértékben, de az összes reológiai sajátosságokkal rendelkeznek.

Ismeretes, hogy a különféle okokból létrejövő reológiai változások nem függetlenek egymástól (pl. a vasanyag nyúlás-feszültség diagramja normál hőmérsékleten nem azonos a  $600^\circ$ -on mért nyúlás-feszültség diagrammal). Egyszerűsített példánk esetében a végeredményben létrejövő nyúlást tehát általánosságban az idő ( $t$ ), a feszültség ( $\sigma$ ) és a hőmérséklet ( $T$ ) időbeli változása befolyásolja, s e mennyiségek között igen bonyolult összefüggés áll fenn.

Feltételezhetjük azonban, hogy az építőiparban használatos anyagoknál az építmények élettartama alatt a szokásos igénybevételi határok, valamint az általában uralkodó hőmérsékleti viszonyok mellett, a különféle okokból létrejövő nyúlások egymásra halmozhatók, vagyis

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_r + \varepsilon_m + \varepsilon_l + \varepsilon_p + \varepsilon_t$$

vagyis

$$\varepsilon = j(t) + k(\sigma) + l(\sigma_{\max}) + \int_0^t n(\sigma, t) dt + o(\sigma, t) + a(T, \sigma) T,$$

ill. az idő függvényében

$$\begin{aligned} \varepsilon = j(t) + k[f(t)] + l[m(t)] + \int_0^t n[f(t), t] dt + \\ + \sigma [f(t), t] + a[g(t), f(t)] \cdot g(t). \end{aligned}$$

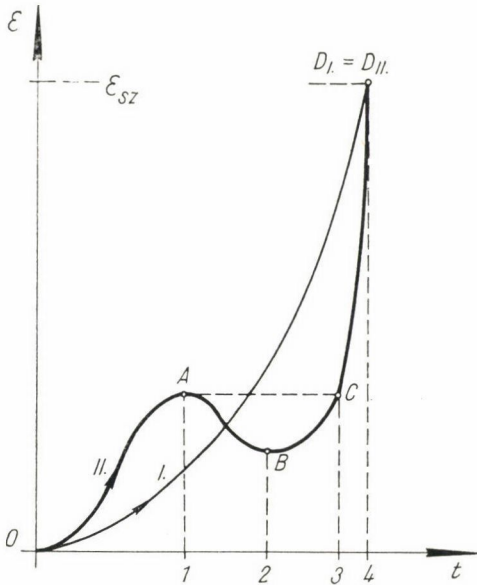
Tudjuk, hogy e feltevés közelítő, de ha ezt elfogadjuk, a valóságos anyagok viselkedését jól megközelítő összefüggéseket tudunk felírni. Ennek bemutatására dolgoztuk ki az alábbi példákat.

Ezen anyagokat attól függően, hogy mely reológiai sajátságokkal rendelkeznek, e reológiai sajátságok felsorolásával fogjuk elnevezni (pl. rugalmas-remanens-lassú alakváltozó testek).

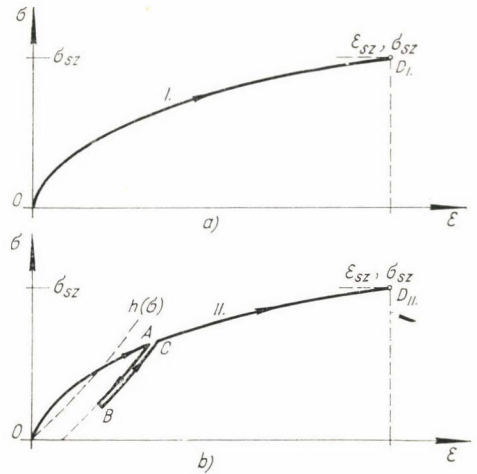
#### 14. Rugalmas-remanens-lassú alakváltozó testek

Először vizsgáljunk egy olyan testet, amely csupán rugalmas és remanens sajátságokkal rendelkezik. Tételezzük fel, hogy az első monoton növekvő terhelés során az anyag nyúlásfeszültség diagramja a 13. ábrán megadott  $l(\sigma_{\max})$  görbe szerinti. Tételezzük fel továbbá, hogy a terhelésnél, valamint a tehermentesítésnél az előbb említett  $l(\sigma_{\max})$  vonal eléréséig ideálisan, de nem lineárisan, hanem egy  $h(\sigma)$  vonal szerint rugalmasan viselkedik, majd monoton növekvő továbbterhelés során ismét  $l(\sigma_{\max})$  vonal szerint változtatja alakját.

Az idő és a nyúlások közötti összefüggést a 25. ábrán — a fent 6. ábrán már szerepelt I. és II. terhelési folyamatnak megfelelően — tüntették fel. A 26. ábra az I. terhelési folyamatnak megfelelő  $\sigma(\varepsilon)$  diagramot mutatja, amely teljes hosszán azonos az  $l(\sigma_{\max})$  vonallal. A 26b ábra a II. terhelési folyamatnak megfelelő  $\sigma(\varepsilon)$  diagram, amely az  $O-A$  és  $C-D$  szakaszon azonos



25. ábra



26. ábra

a 26. ábrán feltüntetettel, míg  $A-B-C$ , vagyis a visszaterhelésnél és az ismételt felterhelésnél a  $h(\sigma)$  összefüggés szerint változik. Tehát

$$\varepsilon_I = l[f(t)]$$

$$\varepsilon_{II} = l[\max f(t)] - h[\max f(t)] + h[f(t)].$$

Példaképpen vizsgáljuk meg a beton pillanatnyi terhelésének esetét, tehát a lassú alakváltozásra ne legyünk tekintettel. A betonnál általában elfogadott az a közelítés, hogy az első terhelés egy közel harmadfokú parabola szerint történik, míg a tehermentesítésnél a változás a kezdő érintővel párhuzamos egyenesek mentén zajlik le. Ezt az anyagot lineárisan rugalmas-remenens anyagnak nevezhetjük. Ez esetben

$$l(\sigma) = l[f(t)]$$

és

$$h(\sigma) = h[f(t)] = \frac{f(t)}{E}$$

tehát a nyúlás-feszültség diagram I. terhelési folyamat esetében

$$\varepsilon_I = l[f(t)],$$

ill. a nyúlás-feszültség diagram a II. terhelési folyamat esetében

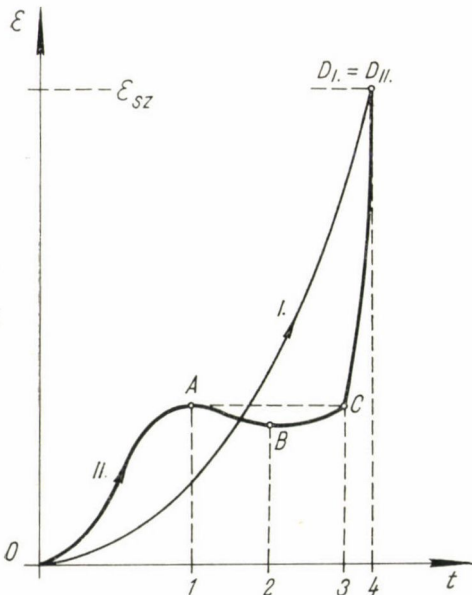
$O-A$  és  $C-D$  szakaszon

$$\varepsilon_{II} = l[f(t)]$$

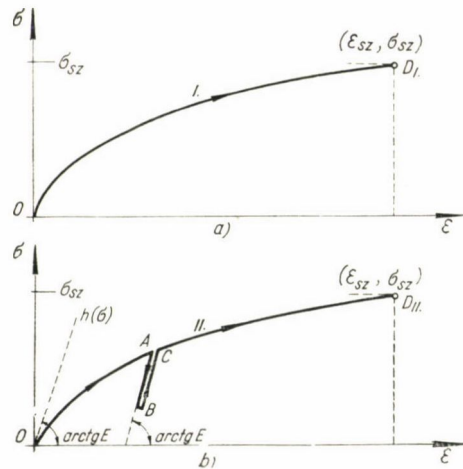
$A-D$  és  $B-C$  szakaszon

$$\varepsilon_{II} = l[\max f(t)] - \frac{\max f(t)}{E} + \frac{f(t)}{E}$$

egyenletekkel írható le. A 6. ábrán feltüntetett terhelési folyamatoknak megfelelő  $\varepsilon(t)$  diagramot a 27. ábrán, míg a nyúlás-feszültség diagramot a 28. ábrán tüntettük fel.



27. ábra



28. ábra

Ha a lassú alakváltozást is figyelembe vesszük — tehát rugalmas-maradó-lassú alakváltozó test alakváltozásait vizsgáljuk, fenti összefüggések

I. terhelési folyamat esetében

$$\varepsilon_I = l[f(t)] + a \frac{f(t)}{E} (1 - e^{-\beta t})$$

I. terhelési folyamat esetében

$O-A$  és  $C-D$  szakaszon

$$\varepsilon_{II} = l[f(t)] + \alpha \frac{f(t)}{E} (1 - e^{-\beta t})$$

$A-D$  és  $B-C$  szakaszon

$$\varepsilon_{II} = l(\max f(t)) - \frac{\max f(t)}{E} + \frac{f(t)}{E} + \alpha \frac{f(t)}{E} (1 - e^{-\beta t}).$$

#### 4.2 Rugalmas-plasztikus testek

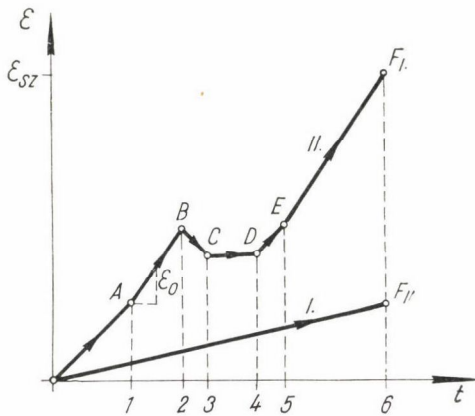
Második példaként vizsgáljunk egy olyan anyagot, amely egy meghatározott feszültségnél kisebb feszültségek esetében lineárisan rugalmasan viselkedik, majd ha a feszültség a folyáshatárt eléri, plasztikus tulajdonságokat mutat.

A matematika nyelvén szólva

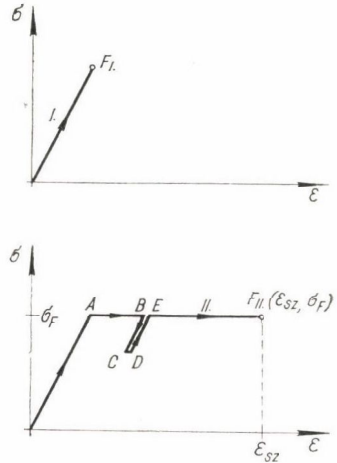
$$\text{ha } \sigma < \sigma_F \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

$$\text{míg ha } \sigma = \sigma_F \quad \varepsilon = \varepsilon_0 t.$$

Ennek bemutatására dolgoztuk ki a 29. ábrát, amelyen a 17. ábrán feltüntetett I. és II. jelű terhelési folyamathoz tartozó nyúlásokat az idő függvényében ábrázoltuk. A 30. ábra a két terhelési folyamathoz tartozó nyúlás-feszültség diagramot mutatja.



29. ábra



30. ábra

Ezekből az ábrákból is kitűnik, hogy a  $(t, \sigma)$  síkon rajzolt két terhelési folyamat görbe  $F$  metszéspontjához a  $(t, \varepsilon)$  síkon két képpont, az  $F_I$ , ill.  $F_{II}$  felel meg.

A megfelelő matematikai összefüggéseket szakaszosan felírva az alábbi táblázatban állítottuk össze:

Idő-tartam	Feszültség $\sigma$	Nyúlás $\varepsilon$
$0 - t_1$	$\sigma = \sigma_0 t < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t$
$t_1 - t_2$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0 (t - t_1)$
$t_2 - t_3$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0 (t - t_2) < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0 (t_2 - t_1) -$ $-\frac{\sigma_0}{E} (t - t_2)$
$t_3 - t_4$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0 (t_3 - t_2) < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0 (t_2 - t_1) -$ $-\frac{\sigma_0}{E} (t_3 - t_2)$
$t_4 - t_5$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0 (t_3 - t_2) +$ $+\sigma_0 (t - t_4) < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0 (t_2 - t_1) -$ $-\frac{\sigma_0}{E} (t_3 - t_2) + \frac{\sigma_0}{E} (t - t_4)$
$t_5 - t_6$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0 (t_2 - t_1) -$ $-\frac{\sigma_0}{E} - (t_3 - t_2) + \frac{\sigma_0}{E} (t_5 - t_4) +$ $+\varepsilon_0 (t - t_5)$

A leírt rugalmas-plasztikus anyagot legjobban a folytacél közelíti meg, ha az utószilárdulás jelenségére a műszaki gyakorlatban általánosan elfogadott közelítésnek megfelelően nem vagyunk tekintettel.

### 5. Összefoglalás

Az elmondottak alapján a képlékenységtan, a lassú alakváltozás stb. ismert jelenségei más oldalról nyernek megvilágítást, és néhány új megállapítást is tehetünk. Ezek a következők:

1. A különféle anyagú szilárd testek különféle okokból létrejövő alakváltozása fizikai jelenség, s ezért a test valamely pontjának térbeli helyzetét meghatározó három koordinátán kívül általában egy negyedik koordinátának, az időnek is függvénye.

Kimutattuk azt is, hogy a reológiai változások időtől független tárgyalása csak ideálisan rugalmas anyagok esetében lehetséges. A természetes alakváltozó, maradó alakváltozó, lassú alakváltozó, plasztikus alakváltozó stb. testek alakváltozásai az időtől függetlenül nem tárgyalhatók. Ideálisan rugalmas anyag a valóságban nincs, mert a reológia közismert alaptörvénye szerint az anyagok mindegyike különböző mértékben ugyan, de az összes reológiai sajátságokkal rendelkezik. Tehát a valóságos testek statikai és szilárdságtani problémái pontosan csak az idő függvényében írhatók fel.

Például a nem ideálisan rugalmas anyagú nyomott rúd statikai problémája — vagyis az ún. kihajlás jelensége — a terhelési folyamatnak vagy másképpen az időnek függvénye. A nyomott rudak közismert differenciál-egyenletében az idő nem szerepel, s így ez nem írhatja le pontosan a jelenséget. E differenciál-egyenletet tehát módosítani kell olyképpen, hogy ebben a jelenleg is alkalmazott független változók mellett új független változóként az idő is szerepeljen.

2. A képlékenységtan szerint a terhelések egy, ill. több paraméteresek lehetnek. Ha bevezetjük az idő-paramétert, logikai megfontolások alapján is könnyen belátható, hogy több paraméteres teher nincsen, mert egy adott pillanathoz egy és csakis egy teherállás tartozhat. Valamely tartóra működő, különböző jellegű (összpontos, megoszló) és különböző helyzetű terhek mind-egyikét az idő függvényében lehet definiálni, és ez esetben valamely meghatározott időponthoz egy és csakis egy meghatározott teherállás tartozhat. Az elmondottak értelemszerűen vonatkoztathatók az esetleges hőmérsékletváltozásra is.

3. Az ideálisan plasztikus, illetve rugalmas plasztikus anyagok nyúlás-feszültség diagramjában az  $\varepsilon$  tengellyel párhuzamos vonalszakaszhoz egy meghatározott feszültség (a folyási feszültség) tartozik, de a folyási feszültséghez tartozó nyúlás viszont az eddigi szemlélet szerint nem volt definiálva. Ha az időparamétert bevezetjük, a nyúlások és feszültségek között ilyen anyagoknál is kölcsönös és egyértelmű kapcsolatot tudunk létesíteni.

4. A nyúlás-feszültség diagram segítségével pontosan csupán az ideálisan rugalmas anyagok statikai és szilárdságtani problémáit lehet vizsgálni. Ha az anyag nem ideálisan rugalmas, akkor a nyúlások és feszültségek között egy új, az időtől is függő kapcsolatot kell létesíteni. Ilyen esetekben a feladat a vizsgált testre működő — az időben tetszés szerint változó — terhelési folyamat függvényében meghatározni az ugyancsak időben változó alakváltozást.

A dolgozatban részletesen tárgyalt homogén és lineáris feszültség, ill. nyúlás esetét vizsgálva azt mondhatjuk, hogy a  $t$ ,  $\sigma$  síkon a koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó, tetszés szerinti vonalhoz a  $t$ ,  $\varepsilon$  síkon egy megfelelő másik vonalat kell rendelni. Ha e vonalat mérések vagy számítások útján tetszés szerinti terhelési folyamathoz meg tudjuk határozni, akkor jutottunk el ahhoz az összefüggéshez, amellyel az ideálisan rugalmas anyagok esetében alkalmazott nyúlás-feszültség diagram helyettesíthető.

E kapcsolat az ideálisan rugalmas anyagok esetében függvény függvényeként írható le, míg minden más esetben ez összefüggés jóval bonyolultabb, mert — amint láttuk — a  $t$ ,  $\varepsilon$  síkon rajzolandó görbe nem csupán a terhelési folyamatnak, hanem a terhelési folyamat különböző rendű differenciálhányadosainak, ill. integráljainak, továbbá esetleg ezek teljes összességének függvénye lesz.

5. E bonyolultabb kapcsolat leírásához az anyag összes reológiai sajátosságait ismerni kell. Valamely anyag szilárdságtani jellemzésére

a) Ideálisan és lineárisan rugalmas anyagok esetében a rugalmassági modulus és a Poisson-féle szám elegendő.

b) Ideálisan, de nem lineárisan rugalmas anyagok esetében a nyúlás-feszültség diagram egyenlete elegendő.

c) Nem ideálisan rugalmas anyagok esetében a nyúlás-feszültség diagramot az első terheléshez tartozó maradónyúlás-diagrammal kell helyettesíteni, s meg kell adni a leterheléshez tartozó alakváltozások függvényeit, s ha ez nem azonos a felterheléshez tartozóval, akkor ez utóbbit is.

Ezen felül meg kell határozni az esetleges

természetes alakváltozást  
lassú alakváltozást  
plasztikus alakváltozást stb.

leíró függvényeket is.



Látható, hogy ha elfogadjuk a bevezetőben említett szűkebb feszültségi és hőmérsékleti határok között közelítően érvényes addíció — sok egyszerűsítést lehetővé tevő — elvét, akkor is nehéz és bonyolult összefüggésekre jutunk. Ezek elméleti és kísérleti úton történő további tisztázása még nehéz és hosszadalmas kutatómunkát igényel.

6. A mérnöki gyakorlatban kiterjedten alkalmazott hatásábrák megmutatják, hogy valamely tartó egy adott keresztmetszetében fellépő igénybevételek a tartón vándorló egységnyi erő hatására hogyan változnak. Az időparaméter bevezetésével a hatásábra fogalma így definiálható: A hatásábra a tartón állandó sebességgel mozgó egységnyi erő hatására fellépő igénybevételek időbeli változása.

Végeredményben kimutattuk, hogy az időparaméter bevezetése a statika és a szilárdságtan egyes kérdéseinek vizsgálatánál szükségszerű, míg másoknál a jelenségek egyszerűbb és áttekinthetőbb tárgyalását teszi lehetővé. Tehát az időparaméter szélesebb körű alkalmazása sok esetben nélkülözhetetlen, de minden esetben ésszerű és hasznos.

A kézirat beérkezett 1960. június 28-án.