A REUSS-FÉLE KÉPLÉKENYSÉGELMÉLET EGY VÁLTOZATA*

V. SZ. LENSZKIJ**

EGYETEMI TANÁR

[Beérkezett 1969. ápr. 16.]

1. REUSS E. az általa 1930-ban javasolt képlékenység elméletben [1] az alakváltozási sebesség deviátorát két tag összegeként írja fel. Az első tag a feszültség-deviátor változási sebességének lineáris függvénye és rugalmas alakváltozást ír le; a második tag képlékeny alakváltozást jelent és lineárisan függ a feszültség-deviátortól.

Az $\bar{e}_n$ ortogonális egységvektorú 5-dimenziós E_5 euklideszi térben a kis alakváltozás e_{ij} deviátora az alakváltozás vektoraként írható fel [2]:

$$\bar{e} = \sum_{n=1}^{5} e_n \cdot \bar{e}_n , \tag{1}$$

amelynek e_n összetevői az e_{ij} komponensekkel

$$e_1 = e_{11}, \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (e_{22} - e_{33}),$$

$$e_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_{12}, \; e_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_{23}, \; e_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_{31}$$

kapcsolatban állnak.

Az alakváltozási deviátor változásának folyamatát az alakváltozási vektor hodográfjával szemléltetjük, amelyet az alakváltozás trajektóriájának nevezünk. Az alakváltozási vektor abszolút értéke az alakváltozás intenzitásával egyenlő:

$$|\bar{e}_n| = \varepsilon_i, \text{ ahol } \varepsilon_i = \left(\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}\right)^{1/2}.$$

* Közlésre javasolta a Moszkvai Állami Egyetem Rugalmasságtani Tanszéke az 1968. május 10-én elhunyt REUSS ENDRE professzor emlékére.

** Moszkvai Állami Egyetem, Rugalmasságtani Tanszék.

Hasonlóképpen, az $\bar{s}_n$ ortogonális egységvektorú Σ_5 5-dimenziós térben az S_{ij} feszültség-deviátort a

$$\sigma = \sum_{n=1}^{5} s_n s_n \tag{2}$$

feszültségvektorral állítják elő, amelynek összetevői

$$s_1 = \frac{3}{2} S_{11}, \quad s_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{22} - S_{33}),$$

$$s_3 = \sqrt{3}\, S_{12}, \quad s_4 = \sqrt{3}\, S_{23}, \quad s_5 = \sqrt{3}\, S_{31}$$

kapcsolatban állnak a feszültség-deviátorral, a feszültségvektor abszolút értéke pedig a feszültségintenzitást fejezi ki:

$$|\bar{\sigma}| = \sigma_i = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}\right)^{1/2}.$$

A feszültségvektor hodográfját a terhelés trajektóriájának nevezzük.

E jelölésekkel a Reuss-féle képlékenységelmélet

$$2\, G\dot{\bar{e}} = \dot{\bar{\sigma}} + \varphi\bar{\sigma} \tag{3}$$

alakban írható, ahol G csúsztató rugalmassági tényező, φ — a feszültségintenzitás univerzális függvénye, a pont pedig egy olyan paraméter szerinti differenciálást jelent, mint az alakváltozási trajektória ívhossza.

Ez az elmélet logikájával és egyszerű felépítésével hívja fel magára a figyelmet, bár a feladatok megoldásakor matematikai nehézségekhez vezet. A kísérleti adatokra alapuló kritika ellenére a kutatók több ízben visszatérnek ezen elmélet tanulmányozásához, korszerűsítésének, a kísérletekkel való jobb egyezés elérésének szándékával. Az alábbiakban a szovjet iskola kutatásain alapuló egyik lehetséges változatot mutatjuk be.

2. A feszültségi és alakváltozási állapot közötti összefüggés általános alakja — tetszőlegesen bonyolult alakváltozás mellett — A. A. ILJUSIN izotrópitás posztulátumából [2, 3] következik és

$$\bar{\sigma} = \sum_{n=1}^{5} P_n \bar{p}_n \tag{4}$$

alakban írható, ahol $\bar{p}_n$ — lényegében az alakváltozási trajektória természetes lokális koordinátarendszerének egységvektorai:

$$\bar{p}_1 = \frac{d\bar{e}}{ds}, \quad \bar{p}_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{d^2\bar{e}}{ds^2}, \ldots \bar{p}_5.$$

A (4) képletben szereplő együtthatók a megelőző alakváltozási trajektória belső geometriájának funkcionáljai,

$$P_n = P_n \left\{\chi_m(s')\right\}_0^s ,$$

ahol χ_m — az alakváltozási trajektória görbülete, s — az ívhossza.

Mivel az izotrópitás posztulátumát kísérleti úton megbízhatóan ellenőrizték [7, 8], a képlékenységelmélet lezárásának feladata — tetszőlegesen bonyolult terhelés mellett — az öt P_n funkcionál vizsgálatához vezet. E funkcionálok tulajdonságainak elméleti tanulmányozása részben már megtörtént [3, 9]. A P_n funkcionálok közvetlen kísérleti tanulmányozása általános alakban rendkívül nehézkes, ezért az általános képlékenységelmélet fejlesztése mellett felmerül egyszerűsített változatok kidolgozásának szükségessége is. Ez utóbbiak két csoportba oszthatók.

Az első csoportba soroljuk a képlékenységelmélet ama változatait, amelyek pontosak (az általános elmélet pontosságának határain belül), viszont a folyamatoknak csak bizonyos osztályaira érvényesek. Ezek az elméletek az általános elmélet kiindulási feltevésein, posztulátumain alapulnak. Jelenleg a feszültségi és az alakváltozási állapot közötti összefüggések vonatkozásában három ilyen elmélet tekinthető befejezettnek: a kis rugalmas-képlékeny alakváltozások elmélete [4] (egyszerű alakváltozású folyamatokra), kis görbületű [3, 7] valamint a törtvonalakból álló alakváltozási trajektóriákkal leírható folyamatok elmélete [7].

A második csoportba soroljuk a képlékenység-elmélet ama változatait, amelyek az általános elmélet pontossági határain belül közelítőek ugyan, de nem korlátozódnak a folyamatok meghatározott osztályaira. Az ilyen elméletek megalapozásához további hipotézisek megfogalmazására és e hipotézisek pontosságának megítélésére van szükség. Vizsgáljunk meg néhányat az e csoportba tartozó elméletek közül.

3. A lokális meghatározottság hipotézise [6, 7] állítja, hogy a feszültségvektor növekményét magának a vektornak az alakváltozási trajektória következő (és nem megelőző) eleméhez viszonyított orientációja, ennek az elemnek a belső geometriája, a feszültségvektor pillanatnyi abszolút értéke és a megelőző alakváltozási trajektória ívhossza határozza meg. Ezt a hipotézist kísérletileg ellenőrizték [6, 10, 11] és megállapították, hogy az egyezés pontossága mintegy 8%. Ebből a hipotézisből következik, hogy a feszültségvektor megváltozása minden olyan alakváltozási trajektórián azonos, amely az adottból a pillanatnyi feszültségvektorhoz viszonyított forgatás vagy tükrözés révén adódik. Ez, többek között, fennáll bármilyen egyenesvonalú alakváltozási trajektóriára, amely a folyamat vizsgált pillanatában a feszültségvektorra merőleges.

Legyen $\varepsilon = 1$ a folyási határfelület (folyási felület) egyenlete az E_5 alakváltozási térben. Ha feltesszük, hogy ez a felület a trajektória kérdéses pontjában reguláris, akkor a feszültségvektornak e felületre merőlegesnek kell lennie. Ez az E_5 alakváltozási térben

$$\bar{\sigma} = D \text{ grad } \varepsilon \tag{5}$$

gradientalitási egyenlethez vezet. Itt az izotropitás posztulátumának megfelelően, D és ε a megelőző alakváltozási trajektória belső geometriájának funkcionálja. Ha a pillanatnyi $\varepsilon = 1$ határfelület kúpponttal bír, akkor a $\bar{\sigma}$ vektor a kúp tengelye irányába mutat. A rendelkezésre álló kísérleti adatok értelmében a határfelület reguláris.

Ily módon a feladat két funkcionál — D és ε — elméleti és kísérleti vizsgálatához vezet. További egyszerűsítés eszközölhető ama kísérletileg megállapított tény alapján, amely szerint az alakváltozási trajektóriák többségénél — kivéve a $\pi/2$-hez közel eső törésszögű vagy a nagyon kusza trajektóriákat — a feszültségvektor abszolút értéke az adott anyagra nézve univerzális, a legegyszerűbb alakváltozási trajektória kísérletek alapján meghatározható alakú ívhosszának a függvénye. Ezt figyelembe véve:

$$|D \text{ grad } \varepsilon| = \Phi(s)\,, \tag{6}$$

azaz csak egy, pl. az ε, funkcionál vizsgálata marad hátra.

4. A képlékenység posztulátuma [5] azt állítja, hogy a feszültség vagy az alakváltozás szerint zárt ciklusban a feszültség által végzett munka nem negatív. Attól függően, hogy a ciklus melyik térben (Σ_5 vagy E_5) zárt, kétféle gradientalitási összefüggéshez jutunk:

$$\begin{aligned} (G)\dot{e} - \dot{\bar{\sigma}} &= \lambda \text{ grad } \varepsilon, \\ \dot{e}p + (\dot{g})\bar{\sigma} &= A \text{ grad } F. \end{aligned} \tag{7}$$

Itt (G) — az alakváltozási anizotrópia mátrixa, azaz $\bar{\sigma} = (G)\,\bar{e}^e$, (g) pedig a reciprok mátrix, vagyis $\bar{e}^e = (g)\bar{\sigma}$ és $(G)(g) = 1$. A λ és A együtthatók az alakváltozási vagy terhelési trajektória belső geometriáját jellemző paramétereknek funkcionáljai; ugyanakkor $F = 1$ a pillanatnyi határfelület egyenlete a $\Sigma_5$feszültség-térben. A $(\dot{g})$ szimbólum a (g) mátrixnak az s ívhossz szerinti deriváltját jelzi. Mindkét esetben a pont az s szerinti differenciálást jelent, amiből következik, hogy $d\Sigma/ds \neq 0$, ahol Σ — a terhelési trajektória ívhossza a Σ_5 feszültség-térben. Szigorúan véve ez csak keményedő anyagokra érvényes (a nem keményedő anyagok képlékenység elmélete általában egyszerűbb).

Tekintettel arra, hogy

$$\dot{\bar{e}} = \dot{\bar{e}}^p + \dot{\bar{e}}^e = \dot{\bar{e}}^p + (\dot{g})\bar{\sigma} + (g)\dot{\bar{\sigma}},$$

a (8) egyenlőség

$$\dot{\bar{e}} - (g)\dot{\bar{\sigma}} = A \text{ grad } F$$

alakba írható át. Balról (G) mátrixszal szorozva a

$$(G)\dot{\bar{e}} - \dot{\bar{\sigma}} = A(G) \text{ grad } F \tag{9}$$

egyenlőséget kapjuk. Összehasonlítva a (9) és (7) egyenlőségeket, azon függvények közötti természetes összefüggést kapjuk meg, amelyek az E_5 és Σ_5 terekben a pillanatnyi határfelületek alakjait meghatározzák:

$$\text{grad } \varepsilon = \frac{A}{\lambda} (G) \text{ grad } F, \tag{10}$$

következésképpen az (5) összefüggés

$$\bar{\sigma} = Q(G) \text{ grad } F \tag{11}$$

alakban írható, ahol $Q = DA/\lambda$. Megszorozva (g) mátrixszal a (11) egyenlőséget, kapjuk:

$$\bar{e}^e = Q \text{ grad } F. \tag{12}$$

A (11) és (12) egyenlőségek világosan mutatják: az alakváltozási anizotrópia elhanyagolása arra a következtetésre vezet, hogy a feszültségvektor merőleges az $F = 1$ pillanatnyi határfelületre. Ez ideálisan képlékeny anyagra nyilvánvaló, a keményedő anyagnál pedig a reálisnak éppen nem mondható izotróp keményedés hipotézisének felel meg. Ez indokolja az alakváltozási anizotrópia figyelembevételének fontosságát.**

5. Összehasonlítva most az (5) és (7) egyenlőségeket, azt kapjuk, hogy

$$(G)\dot{\bar{e}} = \dot{\bar{\sigma}} + L\bar{\sigma}, \tag{13}$$

ahol L — az alakváltozási trajektória belső geometriájának funkcionálja. A (13) összefüggés az általánosított Reuss-elmélet, amelynek lezárása a (G) mátrix-funkcionál és az L skalár-funkcionál vizsgálatát teszi szükségessé. Ha az alakváltozási anizotrópiát elhanyagoljuk, akkor a (G) mátrixszal való szorzást a $2G$ saklármennyiséggel történő szorzás váltja fel. Ebben az esetben a feladat csak egyetlen, az L funkcionál vizsgálatához vezet.

** A szerzőnek a Budapesti Műszaki Egyetemen 1967 decemberében elhangzott előadását követő vita során REUSS E. professzor is komoly jelentőséget tulajdonított az alakváltozási anizotrópiának.

Így tehát a Reuss-féle képlékenységi elmélet a (13) általánosított alakban egy tetszőlegesen összetett terhelési folyamat leírására alkalmas elmélet közelítő változatának tekinthető.

Ezen elmélet alapján néhány alakváltozási trajektóriára számításokat végeztünk. E trajektóriák kísérleti meghatározása a kísérleti és számítással nyert adatok teljesen kielégítő egyezését szolgáltatta [10, 11].

Study on the Plasticity Theorem of REUSS: Setting down an Alternative Formulation. Among others, the researchers of the Soviet Mechanical School are also busy in furthering the implications of REUSS'-s Plasticity Theory, as was proposed in 1930. Based on the Isotropity-Postulate established by A.A. ILYOUTCHINE, a newly generalized alternative formulation of the urentroned theorem is presented in this paper.

Eine alternative Formulierung des REUSS-schen Plastizitätstheorems. Die von E. REUSS im Jahre 1930 vorgeschlagene Plastizitäts-Theorie bildet den Gegenstand einer weiteren Entwicklung unter anderen auch im Rahmen des Arbeitsprogramms der Sowjetischen Mechanischen Schule. In dieser Abhandlung wird auf Grund des von A. A. ILYUTSCHIN eingeführten Isotropitäts-Postulats eine verallgemeinerte Form des REUSS-schen Plastizitätstheorems aufgezeigt.