NEGYEDRENDŰ FELÜLETŰ, EGYENES PEREMŰ HAJLÍTOTT HÉJ SZÁMÍTÁSA SZIMMETRIKUS ÉS ANTIMETRIKUS TEHERRE

KOLLÁR LAJOS*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

GÁRDONYI ZOLTÁN** és HOLNAPY DEZSŐ***

[Beérkezett: 1969. okt. 17.]

A másodrendűnél magasabb rendű felület szerint alakított héjak egyenletei változó együtthatójúak. Az ebből származó nehézségeket akár valamely speciális analitikus módszerrel, akár pedig a differencia-számítás alkalmazásával lehet legyőzni. A dolgozat ezt a két módszert mutatja be, mégpedig először általánosságban, majd egy megépült és modellkísérlettel is ellenőrzött héjszerkezet konkrét adataival. A számszerű összehasonlításokon kívül elvileg is értékeli a két módszert.

1. Bevezetés

Építészeti és épületszerkezeti szempontból sok esetben előnyös, ha valamely héjszerkezetnek legalább a szembenlevő két pereme egyenes vonalú. A könnyen számítható *másodrendű* felületek közül ezt csak a dongahéj biztosítja, de mivel ez csak az egyik irányban görbült, ezért nagyobb nyílások esetén nagy hajlítónyomatékok ébrednek benne, s a stabilitás biztosítása céljából nagy falvastagságra van szükség. Kívánatos lenne tehát, hogy kétszer görbült héjakat alkalmazzunk. Ezek azonban csak akkor adnak egyenes peremet, ha legalább *negyedrendű* felület szerint formáljuk meg őket.

Az 1. ábrán három lehetőséget mutatunk be a

$$z = Ax^2 + By^2 + Cx^2y^2 \tag{1}$$

középfelületű héj kialakítására. Az A, B, C konstansok megfelelő felvételével hiperbolikus (1a ábra) vagy elliptikus (1b ábra) felületet képezhetünk, s nemcsak a szembenlevő két peremet tehetjük egyenessé, hanem mind a négyet is (1c ábra).

Ezeknek a héjaknak az erőjátékát *nem lehet a membránelmélettel* leírni, mert az ellapuló szélső szakaszokon számottevő nyomatékok várhatók, és elméletileg sem lehetnek egyensúlyban csupán membránerőkkel. Másrészt viszont — éppen a szélek ellaposodása folytán — többnyire kellő pontossággal

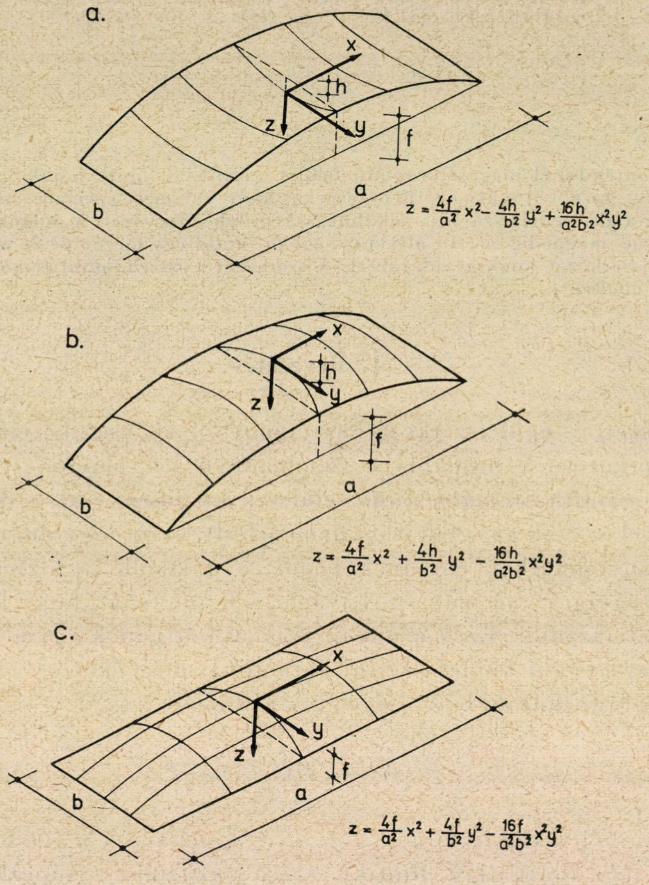
* BUVÁTI, Városház u. 9–11. *Budapest V.*
** UVATERV, Vigadó tér 1. *Budapest V.*
*** NIMIGÜSZI Számítóközpont, Markó u. 16. *Budapest V.*

laposnak tekinthetjük azokat. Így a *lapos héjak hajlításelmélete* alapján fogjuk azokat tárgyalni.

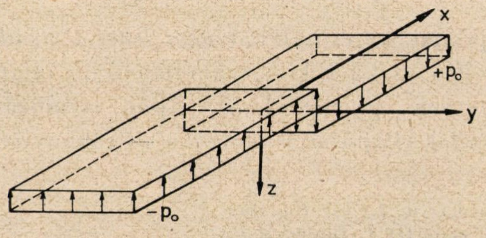
Kétféle terhelésre ismertetjük a megoldást: *totális és antimetrikus egyenletes teherre.* (A féloldalas teher a kettő összegeként állítható elő).

A peremeken a következő *megtámasztási* feltételeket vesszük fel:

A héj csuklósan (sarokpántosan) támaszkodik a peremekre, azaz itt



1. ábra



2. ábra

zérus a lehajlás és a peremre merőleges hajlítónyomaték:

$$w = 0, \tag{2a}$$

és

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \tag{2b}$$

ha w-vel jelöljük a lehajlást, n-nel pedig a peremre merőleges irányt.

A peremek nem vesznek fel vállnyomást, tehát zérus a peremekre merőleges n_n membrán-nyomóerő:

$$n_n = 0. \tag{2c}$$

Végül: a héj széle a peremtartó érintőjének irányában elmozdulásmentesen van megtámasztva. Ez azt jelenti, hogy zérus a perem mentén a peremmel párhuzamos megnyúlás, tehát az n_s membrán-nyomóerő is:

$$n_s = 0. \tag{2d}$$

A peremek tehát csak függőleges erőt és érintőirányú erőt vesznek fel. A héjra nézve az első hajlítási nyíróerőt, a második pedig membrán-nyíróerőt jelent.

2. A bemutatandó megoldásfajták

A következőkben először egy analitikus megoldást ismertetünk. Utána bemutatjuk a probléma megoldását véges differencia-egyenletekkel. Végül megvizsgáljuk a két módszer pontosságát és konvergenciáját egy megépült héjszerkezet adataival, majd összehasonlítjuk őket a modellkísérleti eredményekkel. Ebből gyakorlati következtetéseket fogunk levonni a módszerek alkalmazhatóságára vonatkozóan.

3. Analitikus megoldás

Az analitikus megoldás a lapos hajlított héjak differenciálegyenleteiből indul ki. Ha elhanyagoljuk a harántkontrakciót ($\nu = 0$), és csak függőleges terhet veszünk figyelembe, akkor a lapos héjak összeférhetőségi és egyensúlyi egyenlete a következő alakú lesz (lásd pl. [1]-ben):

$$\Delta\Delta F + D \cdot Lw = 0, \tag{3a}$$

$$K \cdot \Delta\Delta w - LF = p. \tag{3b}$$

Itt

$F(x,y)$ a membrán-feszültségfüggvény,
$w(x,y)$ a héjfelület függőleges eltolódása,

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ a Laplace-operátor,

$L = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ a Pucher-operátor,

$D = Et$ a héj húzási merevsége,

$K = \dfrac{Et^3}{12}$ a héj hajlítási merevsége,

t a héj vastagsága,
p a függőleges teher.

Az alapul vett peremfeltételeket a legegyszerűbben oly módon elégíthetjük ki, hogy mind F-et, mind w-t kettős Fourier-sor alakjában írjuk fel (Navier-féle megoldás).

3.1. *Megoldás szimmetrikus teher esetére*

Ez a Navier-féle megoldás szimmetrikus teher esetében a következő lesz:

$$F = \sum_m \sum_n F_{mn} \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y\,, \tag{4}$$

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y\,. \tag{5}$$

E sorokban

$$\omega_m = m\frac{\pi}{a}\,, \tag{6a}$$

$$\omega_n = n\frac{\pi}{b}\,, \tag{6b}$$

és

$$m,\, n = 1,\, 3,\, 5\, \ldots$$

Az állandó terhet ugyancsak kettős Fourier-sorba fejthetjük:

$$p = \sum_m \sum_n p_{mn} \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y, \tag{7a}$$

Ahhoz, hogy behelyettesíthessük (4)—(5)—(6) kifejezéseket a (3a—b) egyenletekbe, egyrészt páros számú differenciálást kell végeznünk x vagy y szerint. Ekkor változatlan formában visszakapjuk a $\cos\omega_m x \cdot \cos \omega_n y$ tagokat, amelyek legfeljebb x vagy y páros függvényeivel megszorozva fognak szerepelni. Másrészt x és y szerint kell képeznünk a vegyes deriváltat. Ez $\sin \omega_m x \cdot \sin \omega_n y$ tagokat eredményez, de ezt egy $(x \cdot y)$ taggal kell megszoroznunk, s ily módon mind x, mind y szerint két páratlan függvény szorzatát kapjuk, ami ismét páros függvényt ad.

Az egyenletekben tehát csupa páros függvény fog szerepelni, de bizonyos trigonometrikus tagoknak változó együtthatójuk lesz. Ezt a nehézséget Szmodits [6] úgy hidalta át, hogy *ezeket a változó együtthatós tagokat újra Fourier-sorba* fejtette. Így egyrészt eltűnnek a változó együtthatók, másrészt mindegyik tagban $\cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y$ alakú trigonometrikus függvények fognak szerepelni, tehát egyszerűsíteni lehet velük, s az F_{mn} és w_{nm} együtthatókra lineáris egyenletrendszer adódik, amit könnyen meg lehet oldani.

Ezt Szmodits szimmetrikus teherre el is végezte [6]-ben. A következőkben röviden összefoglaljuk a Szmodits-féle (szimmetrikus teherre szóló) megoldást, egyrészt a teljesség, másrészt pedig az egységes tárgyalásmód kedvéért.

Ha a teher intenzitása *állandó* (p_0), akkor a (7a) kifejezés p_{mn} együtthatói a következő alakot öltik:

$$p_{mn} = \frac{16\, p_0}{\pi^2\, mn} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} . \tag{7b}$$

Az L operátort F (4) képletére alkalmazva, az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} L \cdot F = \; & 2 \sum_{\mu} \sum_{\varrho} F_{\mu\varrho} \left\{ \left[(A + Cy^2)\, \omega_\varrho^2 + (B + Cx^2)\, \omega_\mu^2 \right] \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \cos \omega_\varrho y + \right. \\ & \left. + 4\, Cxy\, \omega_\mu\, \omega_\varrho \cdot \sin \omega_\mu x \cdot \sin \omega_\varrho y \right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

ahol $\mu = 1, 3, 5 \ldots$
és $\varrho = 1, 3, 5 \ldots$

(Az m, n indexek helyett a későbbi számítások kedvéért vezettük be az új μ, ϱ jelölést.)

A kapcsos zárójelen belül levő, x^2-tel, y^2-tel, ill. xy-nal szorzott trigonometrikus tagokat újra Fourier-sorba fejtjük $\cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y$ szerint. Az ehhez szükséges integrálok a következők:

Ha $\mu \neq m$ és $\varrho \neq n$, akkor

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \cos \omega_m x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2a}{(\omega_\mu - \omega_m)^2} (-1)^{\frac{\mu+m+2}{2}} + \frac{2a}{(\omega_\mu - \omega_m)^2} (-1)^{\frac{\mu+m}{2}} \right], \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \cdot \cos \omega_\varrho y \cdot \cos \omega_n y \cdot dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2b}{(\omega_\varrho - \omega_n)^2} (-1)^{\frac{\varrho+n+2}{2}} + \frac{2b}{(\omega_\varrho - \omega_n)^2} (-1)^{\frac{\varrho+n}{2}} \right], \end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-a/2}^{+a/2} x \cdot \sin \omega_\mu x \cdot \cos \omega_m x \cdot dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{a}{\omega_\mu - \omega_m}(-1)^{\frac{\mu+m+2}{2}} - \frac{a}{\omega_\mu + \omega_m}(-1)^{\frac{\mu+m}{2}} \right],
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_{-b/2}^{+b/2} y \cdot \sin \omega_\varrho y \cdot \cos \omega_n y \cdot dy = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{b}{\omega_\varrho - \omega_n}(-1)^{\frac{\varrho+n+2}{2}} - \frac{b}{\omega_\varrho + \omega_n}(-1)^{\frac{\varrho+n}{2}} \right].
\end{aligned} \tag{12}
$$

Ha pedig $\mu = m$ és $\varrho = n$, akkor

$$
I_5 = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \cos \omega_m x \cdot dx = \frac{a^3}{24} - \frac{a}{4\,\omega_m^2}, \tag{13}
$$

$$
I_6 = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \cdot \cos \omega_\varrho y \cdot \cos \omega_n y \cdot dy = \frac{b^3}{24} - \frac{b}{4\,\omega_n^2}, \tag{14}
$$

$$
I_7 = \int_{-a/2}^{+a/2} x \cdot \sin \omega_\mu x \cdot \cos \omega_m x \cdot dx = -\frac{a}{4\,\omega_m}, \tag{15}
$$

$$
I_8 = \int_{-b/2}^{+b/2} y \cdot \sin \omega_\varrho y \cdot \cos \omega_n y \cdot dy = -\frac{b}{4\,\omega_n}. \tag{16}
$$

A fenti integrálokat felhasználva, a (8) kifejezés ismételten sorbafejtett alakja

$$
L \cdot F = -\sum_\mu \sum_\varrho F_{\mu\varrho} \sum_m \sum_n E_{mn}^{\mu\varrho} \cdot \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{17}
$$

ahol az $E_{mn}^{\mu\varrho}$ együtthatók a következők:

$$
\mu \neq m, \varrho \neq n: E_{mn}^{\mu\varrho} = 32\, C \omega_m \omega_\mu \omega_n \omega_\varrho (-1)^{\frac{m+\mu+n+\varrho}{2}} \frac{1}{\omega_m^2 - \omega_\mu^2} \, \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_\varrho^2}, \tag{18}
$$

$$
\mu = m, \varrho = n: \; E_{mn}^{\mu\varrho} = 2(A\omega_\varrho^2 + B\omega_\mu^2) + \frac{C}{6}(b^2 \omega_\varrho^2 + a^2 \omega_\mu^2), \tag{19}
$$

$$
\mu \neq m, \varrho = n: \; E_{mn}^{\mu\varrho} = 8\, C \omega_m \omega_\mu (-1)^{\frac{m+\mu+2}{2}} \frac{\omega_m^2 + \omega_\mu^2}{(\omega_m^2 - \omega_\mu^2)^2}, \tag{20}
$$

$$
\mu = m, \varrho \neq n: \; E_{mn}^{\mu\varrho} = 8\, C \omega_n \omega_\varrho (-1)^{\frac{n+\varrho+2}{2}} \frac{\omega_n^2 + \omega_\varrho^2}{(\omega_n^2 - \omega_\varrho^2)^2}. \tag{21}
$$

Hasonlóan elvégezve w sorával is ugyanezt a műveletet, a

$$
L \cdot w = -\sum_\mu \sum_\varrho w_{\mu\varrho} \sum_m \sum_n E_{mn}^{\mu\varrho} \cdot \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{22}
$$

kifejezést kapjuk, amelyben $E_{mn}^{\mu\varrho}$ ugyancsak a (18)—(21) egyenletekből számítható.

Ha már most (17)-et és (22)-t is felhasználva, behelyettesítjük (4)-et és (5)-öt a (3a—b) egyenletrendszerbe, akkor szétesnek az egyenletek m és n különböző értékeinek megfelelően. Egyszerűsítve a mindegyik tagban szereplő $(\cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y)$ kifejezéssel, lineáris egyenletrendszert kapunk a F_{mn} és w_{mn} együtthatókra. Egy (m, n) értékpárra ez a következő alakú lesz:

$$F_{mn}(\omega_m^2+\omega_n^2)^2 - D \sum_{\mu}\sum_{\varrho} w_{\mu\varrho} E_{mn}^{\mu\varrho} = 0\,, \tag{23}$$

$$K \cdot w_{mn}(\omega_m^2+\omega_n^2)^2 + \sum_{\mu}\sum_{\varrho} F_{\mu\varrho} E_{mn}^{\mu\varrho} = \frac{16\,p_0}{\pi^2 mn}(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}\,. \tag{24}$$

Ha a μ, ill. ϱ szerinti sorbafejtésekből ugyanannyi tagot veszünk számításba, mint az m, ill. n szerintiből, akkor annyi egyenletünk lesz, ahány ismeretlenünk, tehát megoldható az egyenletrendszer.

A metszeterők ezek után az ismert

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,,$$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,, \qquad \text{(25a—c)}$$

$$n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,;$$

és

$$m_x = -K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,,$$

$$m_y = -K\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,, \qquad \text{(25d—f)}$$

$$m_{xy} = -K\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

képletekből számíthatók. Pozitív értelmezésüket a 3. ábra tünteti fel. (A pozitív hajlítónyomaték az alsó szálban okoz húzást.)

A metszeterők részletesen felírt képletei a következők:

$$n_x = -\sum_m\sum_n F_{mn}\,\omega_n^2 \cdot \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y,$$

$$n_y = -\sum_m\sum_n F_{mn}\,\omega_m^2 \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y, \qquad \text{(26 a—c)}$$

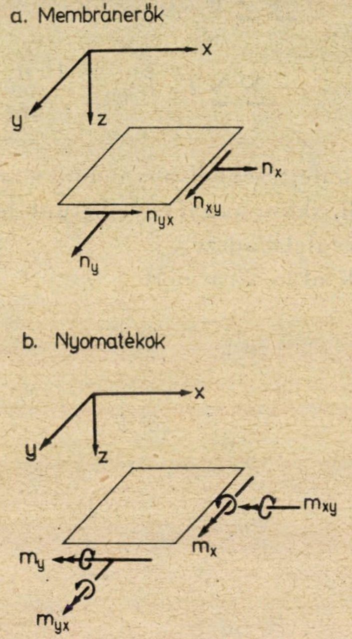
$$n_{xy} = -\sum_m \sum_n F_{mn}\,\omega_m \omega_n \sin \omega_m x \cdot \sin \omega_n y,$$

illetve

$$m_x = +K \sum_m \sum_n w_{mn}\,\omega_m^2 \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y,$$

$$m_y = +K \sum_m \sum_n w_{mn}\,\omega_n^2 \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y, \qquad (26\ \text{d—f})$$

$$m_{xy} = -K \sum_m \sum_n w_{mn}\,\omega_m \omega_n \sin \omega_m x \cdot \sin \omega_n y,$$



3. ábra

3.2. *Megoldás antimetrikus teher esetére*

Az 1. ábrán vázolt héjszerkezetekre (vagy peremíveikre) mértékadó lehet az *x-ben antimetrikus* egyenletes teher is (2. ábra). Ezt a feladatot is a 3.1. pontban bemutatott módon oldhatjuk meg. A terhet most

$$p = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \qquad (27)$$

sorba fejtjük, ahol

$m = 2, 4, 6. \ldots$ és $n = 1, 3, 5 \ldots$

Ha $m = 2, 6, 10, 14 \ldots$, a p_{mn} együtthatók értéke

$$p_{mn} = \frac{32\, p_0}{\pi^2 mn} (-1)^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (28a)$$

ha pedig $m = 4, 8, 12 \ldots$, akkor

$$p_{mn} = 0, \tag{28b}$$

A feszültség- és lehajlásfüggvényre az antimetriának megfelelően most az

$$F = \sum_m \sum_n F_{mn} \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{29}$$

és a

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{30}$$

Fourier-sorokat vesszük fel. A (2)—(3) egyenletekbe való behelyettesítéshez szükséges L operátor alkalmazásával az

$$\begin{gathered} L \cdot F = -2 \sum_\mu \sum_\varrho F_{\mu\varrho} \{ [(A + Cy^2) \omega_\varrho^2 + (B + Cx^2) \omega_\varrho^2] \times \\ \times \sin \omega_\mu x \cdot \cos \omega_\varrho y - 4C\, xy\, \omega_\varrho \omega_\mu \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \sin \omega_\varrho y \} \end{gathered} \tag{31}$$

kifejezést kapjuk, ahol

$$\mu = 2, 4, 6 \ldots$$

és

$$\varrho = 1, 3, 5 \ldots .$$

A zárójeles tag $\sin \omega_\mu x \cdot \cos \omega_\varrho y$-alakú Fourier-sorba való fejtéséhez szükséges integrálok a következők:

Ha $\mu \neq m$ és $\varrho \neq n$, akkor

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_0^{a/2} x^2 \sin \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a}{(\omega_\mu - \omega_m)^2} (-1)^{\frac{\mu+m}{2}} - \frac{a}{(\omega_\mu + \omega_m)^2} (-1)^{\frac{\mu+m}{2}} \right], \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_0^{a/2} x \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a}{2(\omega_\mu - \omega_m)} (-1)^{\frac{\mu+m}{2}} - \frac{a}{2(\omega_\mu - \omega_m)} (-1)^{\frac{\mu+m}{2}} \right]. \end{aligned} \tag{33}$$

Ha pedig $\mu = m$ és $\varrho = n$, akkor

$$I_{11} = \int_0^{a/2} x^2 \cdot \sin \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = \frac{a^3}{48} - \frac{a}{8\,\omega_m^2}, \tag{34}$$

$$I_{12} = \int_0^{a/2} x \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = -\frac{a}{8\,\omega_m}. \tag{35}$$

Ezeken kívül fel kell használnunk a (10), (12), (14) és (16) integrálokat is. Így (31)-nek az alábbi, ismételten sorbafejtett alakjához jutunk:

$$L\cdot F = \sum_{\mu}\sum_{\varrho} F_{\mu\varrho} \sum_{m}\sum_{n} E_{mn}^{\mu\varrho}\cdot \sin\omega_m x\cdot\cos\omega_n y\,. \tag{36}$$

Az $E_{mn}^{\mu\varrho}$ együtthatókat a következő képletek adják meg:

$$\begin{aligned}\mu \neq m,\ \varrho \neq n:\ E_{mn}^{\mu\varrho} &= 32\, C\omega_m\,\omega_\mu\,\omega_n\,\omega_\varrho(-1)^{\frac{m+\mu+n+\varrho+2}{2}}\times\\ &\times\frac{1}{\omega_m^2-\omega_\mu^2}\cdot\frac{1}{\omega_n^2-\omega_\varrho^2}\,,\end{aligned} \tag{37}$$

$$\mu = m,\ \varrho = n:\ E_{mn}^{\mu\varrho} = 2\,(A\omega_\varrho^2+B\omega_\mu^2)+\frac{C}{6}\,(b^2\,\omega_\varrho^2+a^2\,\omega_\mu^2)\,, \tag{38}$$

$$\mu \neq m,\ \varrho = n:\ E_{mn}^{\mu\varrho} = 8\,C\omega_m\,\omega_\mu(-1)^{\frac{m+\mu}{2}}\cdot\frac{\omega_m^2+\omega_\mu^2}{(\omega_m^2-\omega_\mu^2)^2}\,, \tag{39}$$

$$\mu = m,\ \varrho \neq n:\ E_{mn}^{\mu\varrho} = 8\,C\omega_n\,\omega_\varrho(-1)^{\frac{m+\varrho+2}{2}}\,\frac{\omega_n^2+\omega_\varrho^2}{(\omega_n^2-\omega_\varrho^2)^2}\,. \tag{40}$$

Az L operátort a w lehajlásfüggvényre alkalmazzuk, akkor ugyanezekkel az együtthatókkal az

$$L\cdot w = \sum_{m}\sum_{n} w_{\mu\varrho} \sum_{m}\sum_{n} E_{mn}^{\mu\varrho}\cdot\sin\omega_m x\cdot\cos\omega_n y \tag{41}$$

kifejezést kapjuk. Behelyettesítve mindent a (3a—b) egyenletekbe, szétválasztva a különböző (m, n)-eknek megfelelő tagokat és $(\sin\omega_m x\cdot\cos\omega_n y)$-nal egyszerűsítve, a következő alakú lineáris egyenletrendszert kapjuk az F_{mn} és w_{mn} együtthatókra:

$$F_{mn}\,(\omega_m^2+\omega_n^2)^2 - D\sum_{\mu}\sum_{\varrho} w_{\mu\varrho}\,E_{mn}^{\mu\varrho} = 0\,, \tag{42}$$

$$K\cdot w_{mn}(\omega_m^2+\omega_n^2)^2+\sum_{\mu}\sum_{\varrho} F_{\mu\varrho}\,E_{mn}^{\mu\varrho} = p_{mn}\,, \tag{43}$$

ahol p_{mn}-t a (28a—b) szerint kell értelmezni.

Most is ugyanannyi egyenletet kapunk, ahány ismeretlenünk van, ha a μ, ill. ϱ tagok számát azonosnak választjuk az m, ill. n tagok számával. A metszeterőket változatlanul a (25)—(26) képletek szolgáltatják. Részletesen kiírva ezek a következőképpen alakulnak:

$$n_x = - \sum_m \sum_n F_{mn}\, \omega_n^2 \cdot \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y\,,$$

$$n_y = - \sum_m \sum_n F_{mn}\, \omega_m^2 \cdot \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y\,, \qquad (44a-c)$$

$$n_{xy} = + \sum_m \sum_n F_{mn} \cdot \omega_m\, \omega_n \cdot \cos \omega_m x \cdot \sin \omega_n y,$$

és

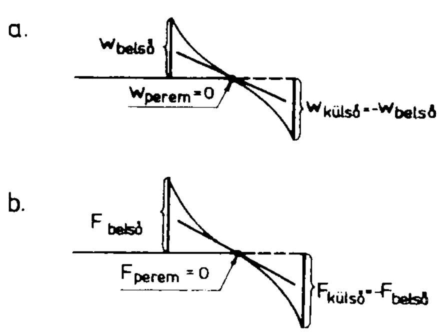
$$m_x = + K \sum_m \sum_n w_{mn}\, \omega_m^2 \cdot \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y,$$

$$m_y = + K \sum_m \sum_n w_{mn}\, \omega_n^2 \cdot \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y, \qquad (44d-f)$$

$$m_{xy} = + K \sum_m \sum_n w_{mn}\, \omega_m\, \omega_n \cdot \cos \omega_m x \cdot \sin \omega_n y.$$

4. Numerikus megoldás

A numerikus megoldás a közönséges *véges differenciák* módszerén alapul (lásd pl. [5]-öt). Ehhez a peremfeltételek alapján meg kell határoznunk a perem mentén és egy, a peremen túl levő (fiktív) pontsorban F és w értékeit.



4. *ábra*

A w-re érvényes (2a) és (2b) peremfeltételek szerint w a peremen és a két szomszédos osztáspont-sorban a 4a. ábrának megfelelő értékeket veszi fel (0-tól különböző ν esetében is).

Az F feszültségfüggvényt a (2c) és (2d) peremfeltételek kötik meg. Az első szerint $\partial^2 F/\partial s^2 = 0$, azaz F a perem mentén legfeljebb lineárisan változhat. Mivel azonban a membránmetszeterők szempontjából érdektelen F-nek konstans és lineáris része, ezért F-et az egyszerűség kedvéért 0-nak vesszük az egész peremen.

A (2d) peremfeltétel $\partial^2 F/\partial n^2 = 0$-val egyenértékű, ami a 4b. ábrának megfelelő F-értékeket szabja meg a peremmel szomszédos osztáspont-sorokban.

Mindezek alapján tehát csak a peremeken belül fekvő osztáspontokban lépnek fel F és w ismeretlenekként. Az egyenletek felírásához még szükség van a perem mentén és a peremen kívüli pontsorban érvényes F és w-értékekre, de ezek nem jelentenek új ismeretlent. Így pl. 6×6 részre felosztva a tartományt, 25 belső pontunk lesz, azaz 50 ismeretlenünk, ami 50×50-es együttható-mátrixú lineáris egyenletrendszert jelent.

Az egyenletrendszer **A** mátrixa a következő struktúrájú lesz (vö. a (3a—b) egyenletekkel):

$$[\mathbf{A}]_{50\times 50} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{25\times 1} \\ \mathbf{w}_{25\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{25\times 25} & \mathbf{Q}_{25\times 25} \\ \mathbf{R}_{25\times 25} & \mathbf{S}_{25\times 25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{25\times 1} \\ \mathbf{w}_{25\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{25\times 1} \\ \mathbf{P}_{25\times 1} \end{bmatrix}, \tag{45}$$

Itt az első 25 sor a belső pontokra felírt (3a) összeférhetőséget kifejező egyenletet, a második 25 sor pedig a (3b) egyensúlyi differenciálegyenletet reprezentálja.

Ilyenformán a $\mathbf{P}_{25\times 25}$ mátrix a biharmonikus differenciaoperátorokat, a $-\mathbf{R}_{25\times 25}$ mátrix pedig a Pucher-operátornak megfelelő differencia-operátorokat tartalmazza. Értelemszerűen:

$$\mathbf{Q}_{25\times 25} = D\mathbf{R}_{25\times 25} \quad \text{és} \quad \mathbf{S}_{25\times 25} = K\mathbf{P}_{25\times 25}\,.$$

Az így particionált mátrixot a Frobenius-módszerrel invertáljuk [3]. Ennek lényege a következő:

Írjuk fel az inverz mátrixot is az

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \tag{46}$$

particionált alakban. A reciprokmátrix definíciója szerint $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ az $\mathbf{E}$ egységmátrixszal egyenlő: $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$. Részletesen felírva:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{PY}+\mathbf{QU} & \mathbf{PZ}+\mathbf{QV} \\ \mathbf{RY}+\mathbf{SU} & \mathbf{RZ}+\mathbf{SV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \tag{47}$$

azaz

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{PY}+\mathbf{QU} &= \mathbf{E}, \\ \mathbf{PZ}+\mathbf{QV} &= \mathbf{O}, \\ \mathbf{RY}+\mathbf{SU} &= \mathbf{O}, \\ \mathbf{RZ}+\mathbf{SV} &= \mathbf{E}. \end{aligned}\right\} \tag{48a–d}$$

(48b)-t elölről $(-\mathbf{RP}^{-1})$-gyel szorozzuk és összeadjuk (48d)-vel:

$$(\mathbf{S}-\mathbf{RP}^{-1}\mathbf{Q})\,\mathbf{V} = \mathbf{E}\,,$$

azaz

$$\mathbf{V} = (\mathbf{S} - \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q})^{-1}. \tag{49}$$

(48b)-ből:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{P}^{-1}(-\mathbf{Q}\mathbf{V}). \tag{50}$$

Ezzel tulajdonképpen meg is oldottuk a feladatot. **Y**-ra és **U**-ra ugyanis nincs szükségünk, mivel a keresett **F** és **w** vektorokat az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \tag{51}$$

művelet szolgáltatja, és ebben **Y**-t és **U**-t mindig **0**-val kellene szorozni.

Ily módon tehát nem kell az egész egyenletrendszer **A** mátrixát invertálnunk, hanem — felhasználva azt a tényt, hogy a kompatibilitási egyenletek jobboldala mindig *0* — elegendő az **A** negyedét képező rész-mátrixokkal néhány műveletet és invertálást végeznünk.

Az egyenletrendszer megoldását ezek után visszahelyettesítéssel ellenőrizzük. (Az eredmények esetleg tovább javíthatók a Southwell-féle blokkrelaxálással [2], azonban nem igazolható, hogy ez az eljárás minden esetben konvergens.)

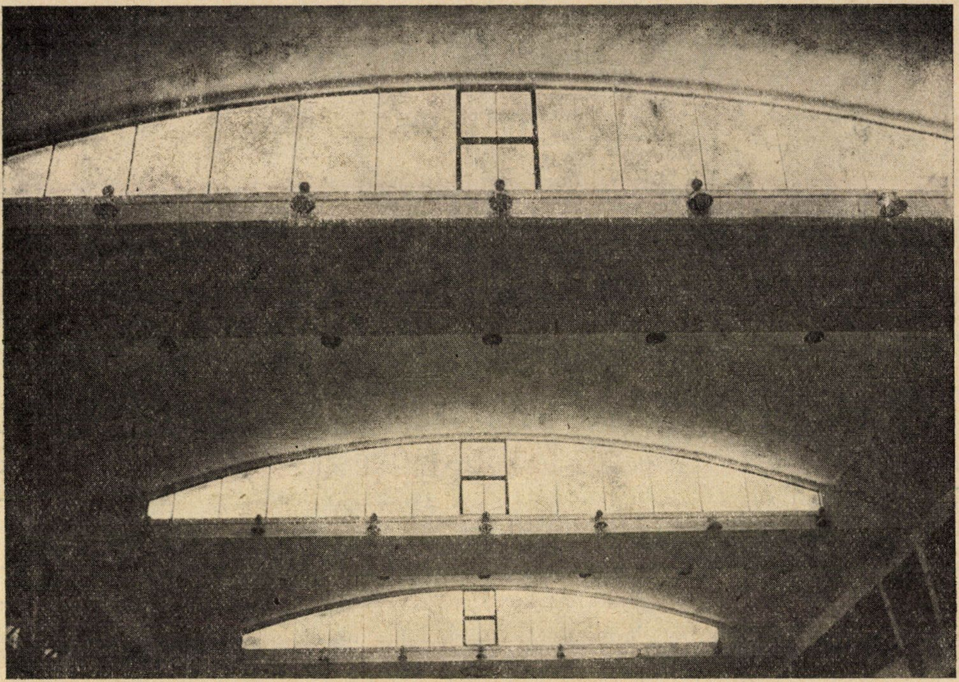
A kapott **F**- és **w**-értékekből a (25)—(26) képleteknek megfelelő differencia-kifejezésekkel számíthatjuk ki minden pontra a metszeterőket.

5. Egy megépült héjszerkezet erőjátékának meghatározása

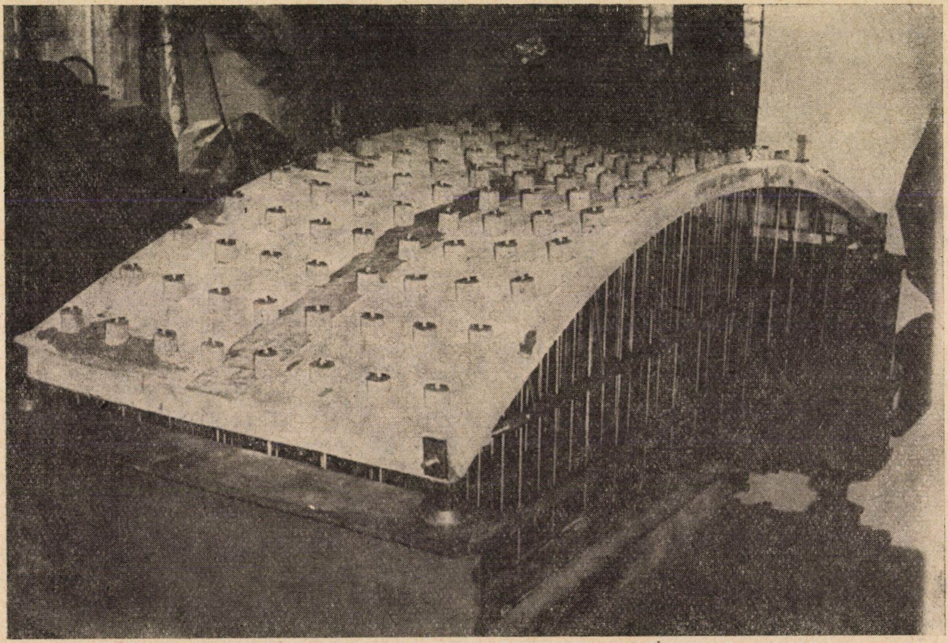
Az elmondottak illusztrálására közöljük egy megépült héjszerkezetű csarnok (5. ábra és [4]) metszeterőinek a leírt módszerekkel kiszámított értékeit és összehasonlítjuk őket egymással, másrészt a szerkezet 1 : 15 méretarányú modelljén (6. ábra) mért eredményekkel. (A modellkísérlet a Budapesti Műszaki Egyetem Acélszerkezeti Tanszékének laboratóriumában készült, Szittner Antal vezetésével.)

A szerkezet fő méreteit a 7. ábra mutatja. A metszeterőket az egyszerűség kedvéért 0,100 Mp/m^2 intenzitású vízszintes vetületben egyenletesen megoszló teherre vonatkoztatva adjuk meg.

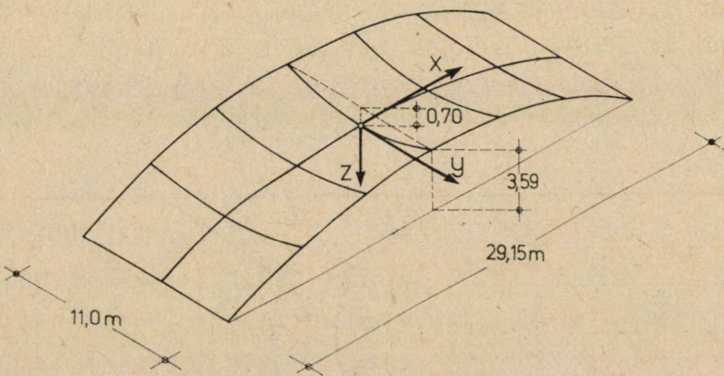
Kiszámítottuk a héj hat metszeterőjét (n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}) a 8. alaprajzi ábrán feltüntetett 16 pontban, mégpedig egyrészt az analitikus módszerrel (3. fejezet), F és w kettős Fourier-sorából $2 + 2$, $3 + 3$, $4 + 4$ és $5 + 5$ tagot véve, majd a 4. fejezetben leírt differencia-módszerrel, 6×6 részre felosztva alaprajzban a héjat. Az eredményeket a 16 pontnak megfelelően számozott S.1.—S.16. táblázatokban állítottuk össze a szimmetrikus (totális) teherre, az A.1.—A.16. táblázatokban pedig a 2. ábrának megfelelő antimetrikus teherre.



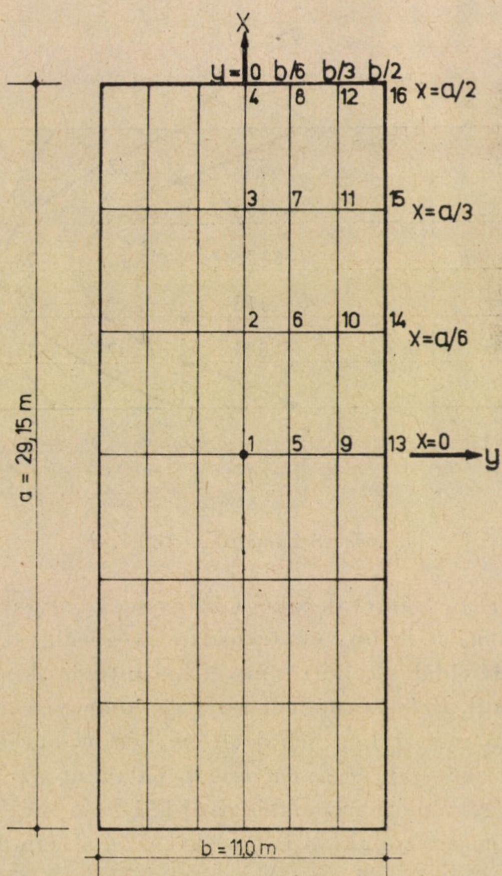
5. *ábra.* A csarnok belseje



6. *ábra.* A modell fényképe

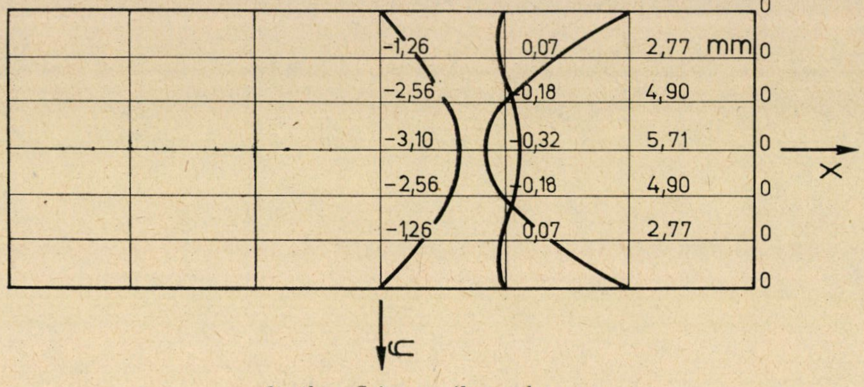

X
0,70
Z
y
3,59
29,15 m
11,0 m

7. ábra

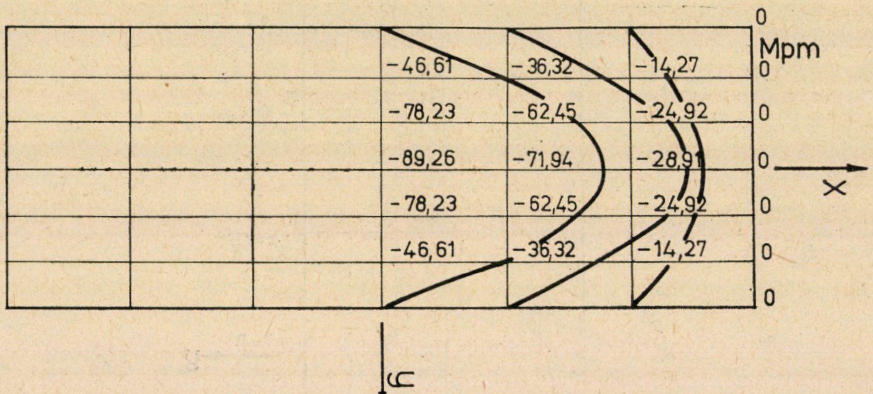

X
y = 0 b/6 b/3 b/2
4 8 12 16 x = a/2
3 7 11 15 x = a/3
2 6 10 14 x = a/6
1 5 9 13 x = 0
y
a = 29,15 m
b = 11,0 m

8. ábra

A jobb áttekinthetőség kedvéért diagrammban is feltüntettük a (pontosnak tekintett) differencia-módszerrel kapott metszeterők eloszlását a héj egész területén, valamint a w lehajlás és az F feszültségfüggvény értékeit is, mégpedig a 9—16. ábrákon a szimmetrikus (totális), a 17—24. ábrákon pedig az antimetrikus teherre.

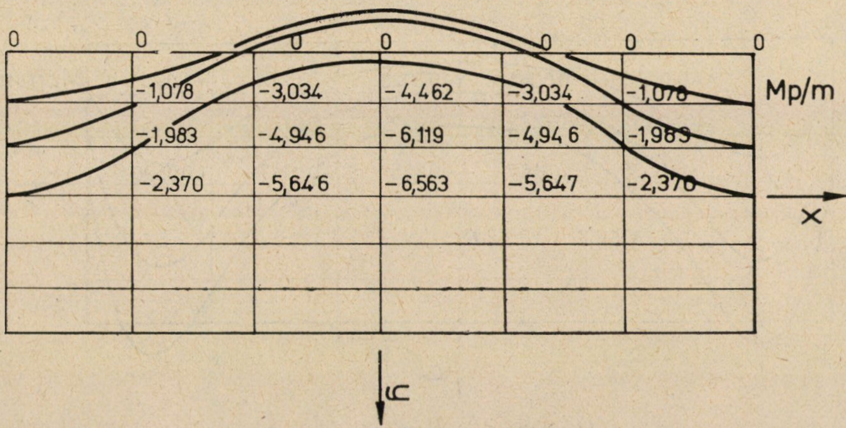


9. ábra. Szimmetrikus teher, w

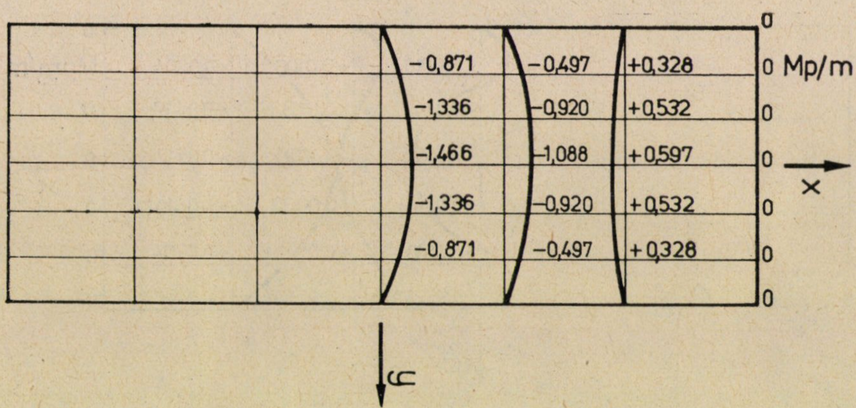


10. ábra. Szimmetrikus teher, F

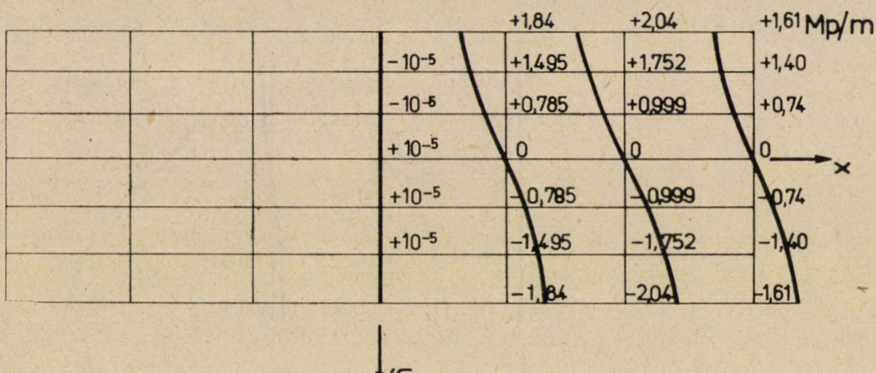
A modellkísérlet során csak a héj középvonalában (az x tengely mentén) mértük az m_x és m_y hajlítónyomatékokat, mégpedig szimmetrikus totális teherre, valamint féloldalas teherre (mivel az antimetrikus terhet igen nehéz lett volna előállítani). Ezért a modellkísérlet eredményeit az x tengely mentén felvett hosszirányú metszetben felrajzolt m_x és m_y-ábrákban hasonlítottuk össze a differencia-módszer eredményeivel, valamint az analitikus módszer $2 + 2$ és $5 + 5$ taggal kapott nyomatékaival (25—28. ábrák). A modellkísérlet mérési adatait egyenes vonalakkal kötöttük össze, a számításból kapott diagrammokat viszont — a 9—24. ábrákhoz hasonlóan — görbe vonalakkal ábrázoltuk.



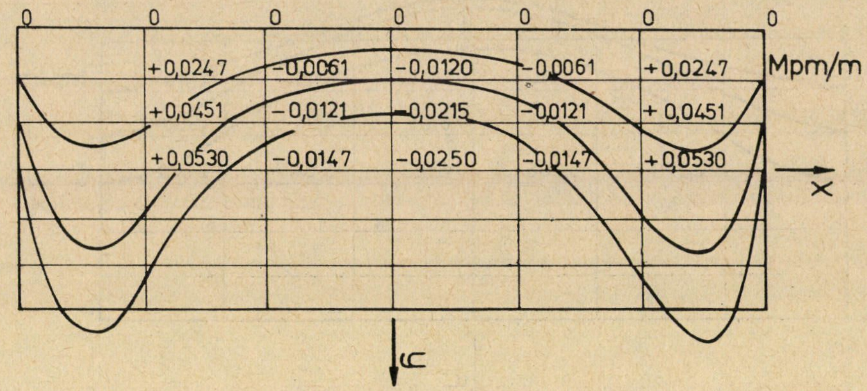
11. ábra. Szimmetrikus teher, n_x



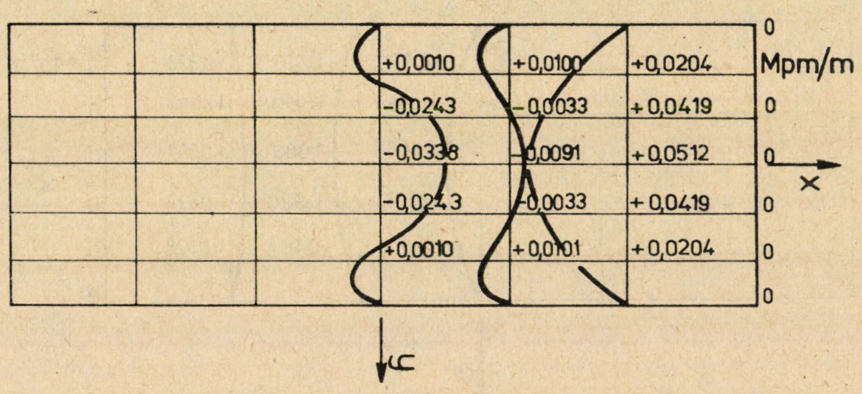
12. ábra. Szimmetrikus teher, n_y



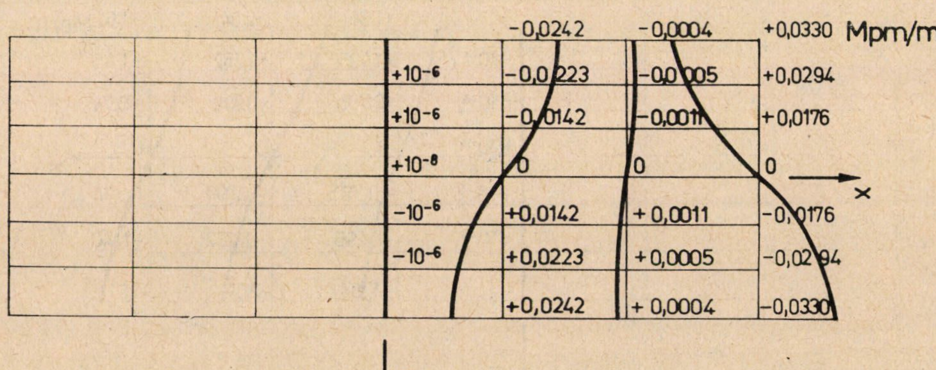
13. ábra. Szimmetrikus teher, n_{xy}



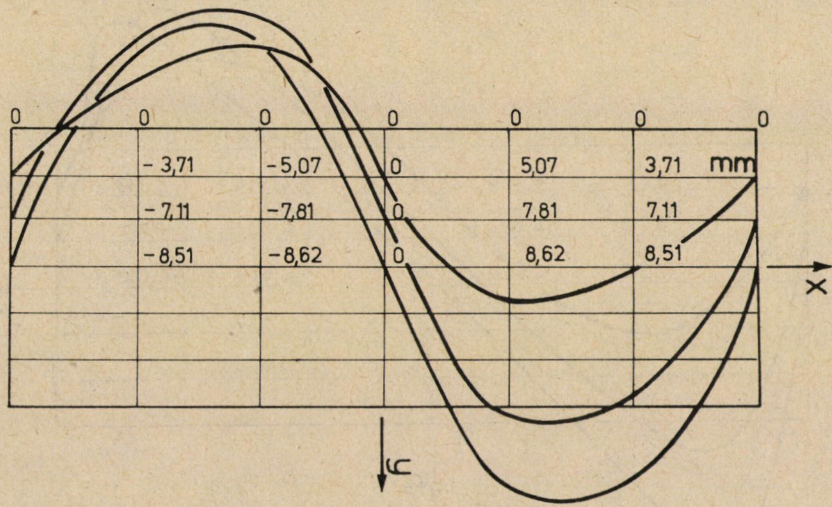
14. ábra. Szimmetrikus teher, m_x



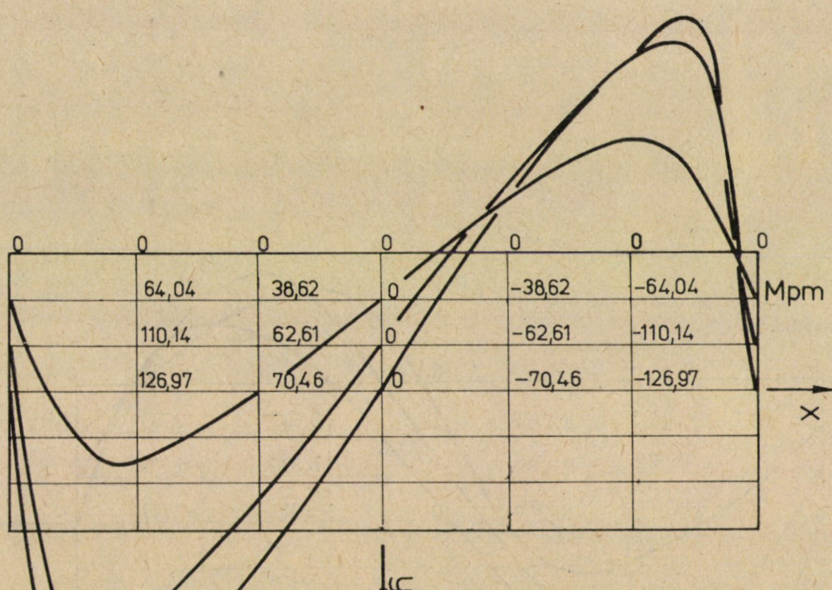
15. ábra. Szimmetrikus teher, m_y



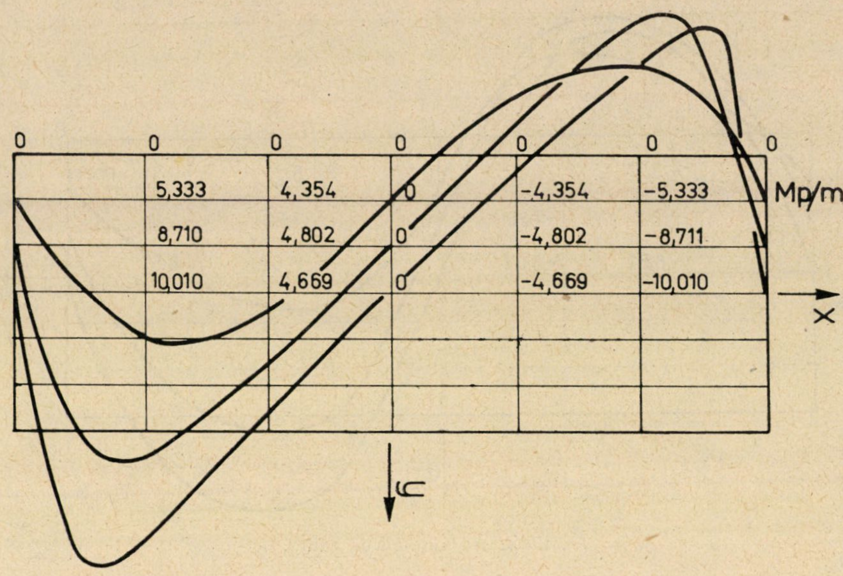
16. ábra. Szimmetrikus teher, m_{xy}



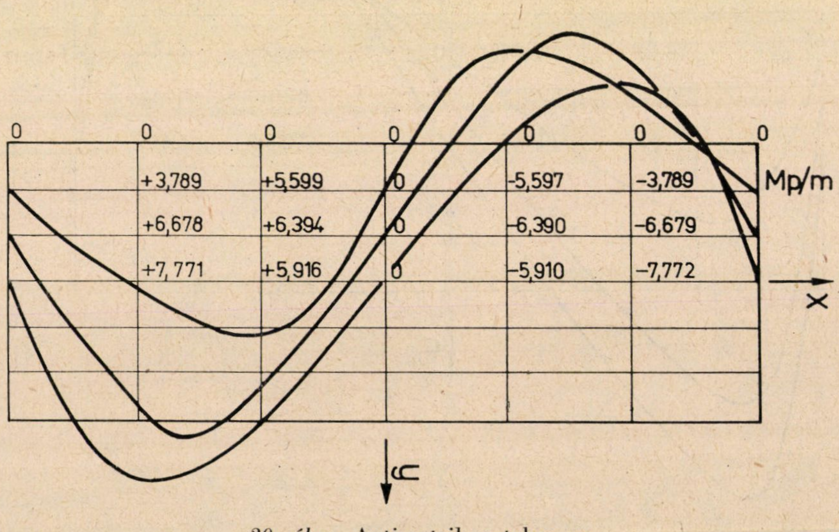
17. ábra. Antimetrikus teher, *w*



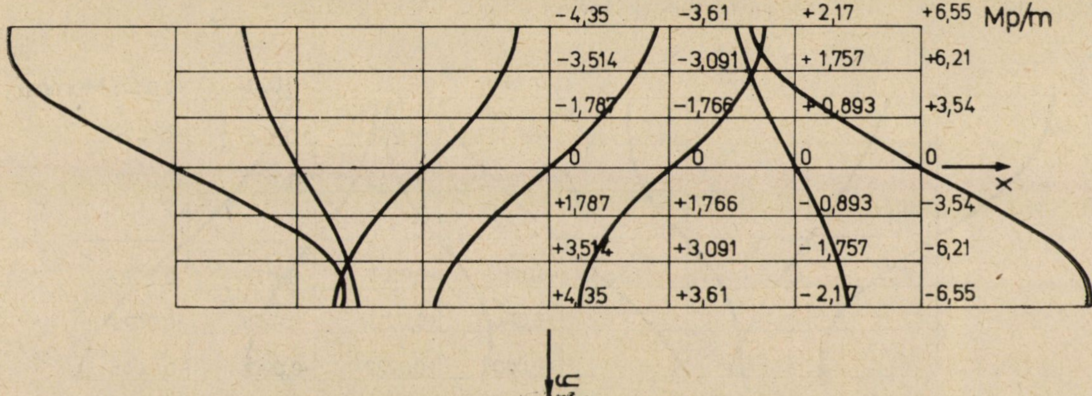
18. ábra. Antimetrikus teher, *F*



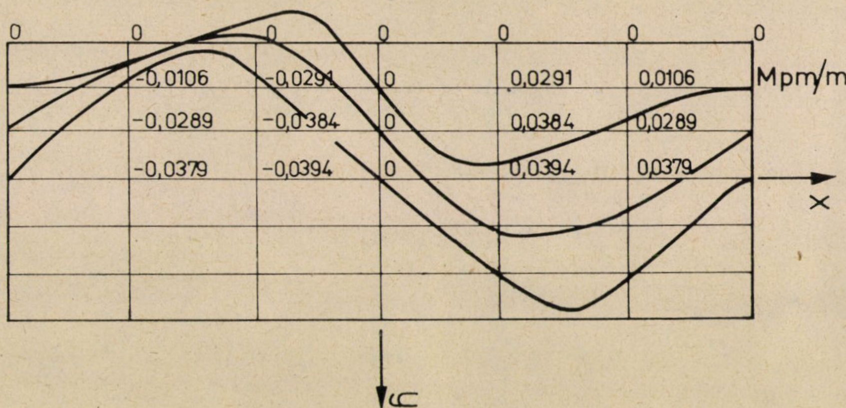
19. ábra. Antimetrikus teher, n_x



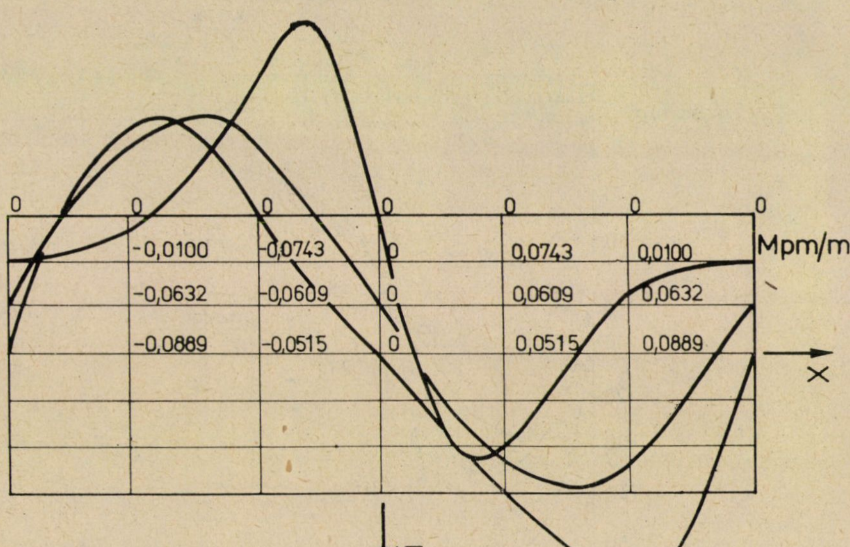
20. ábra. Antimetrikus teher, n_y



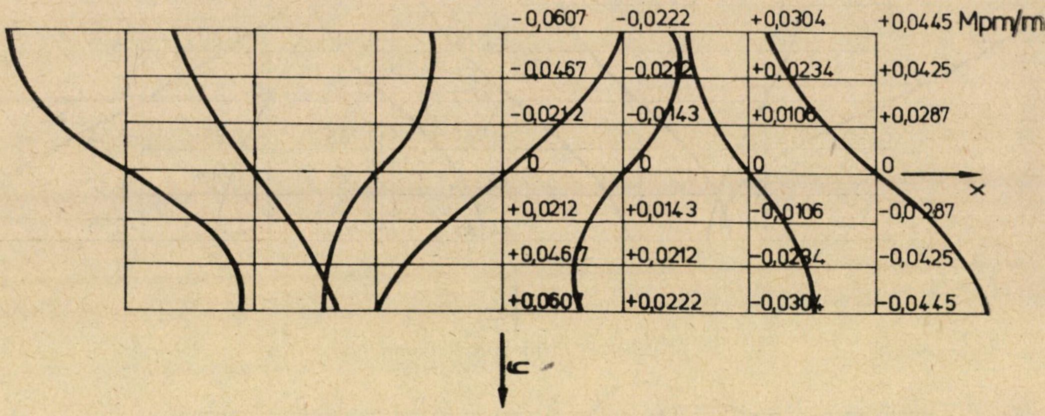
21. ábra. Antimetrikus teher, n_{xy}



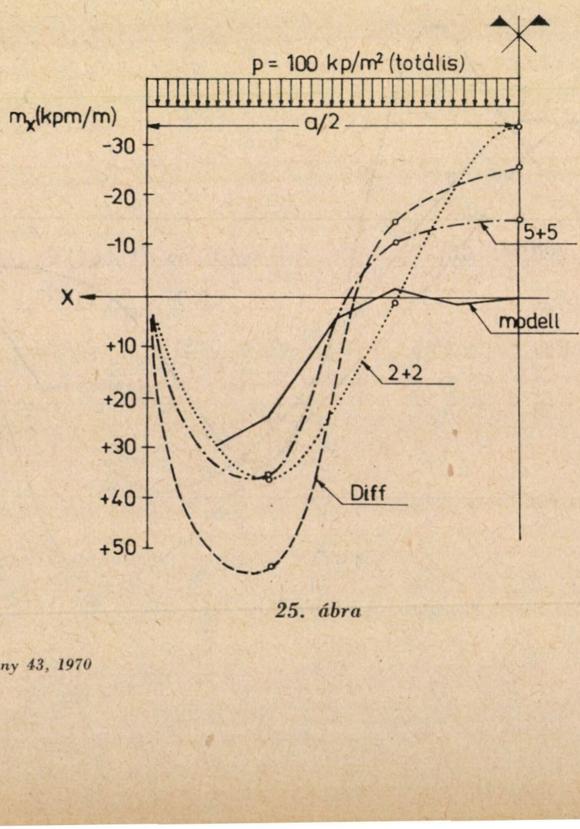
22. ábra. Antimetrikus teher, m_x



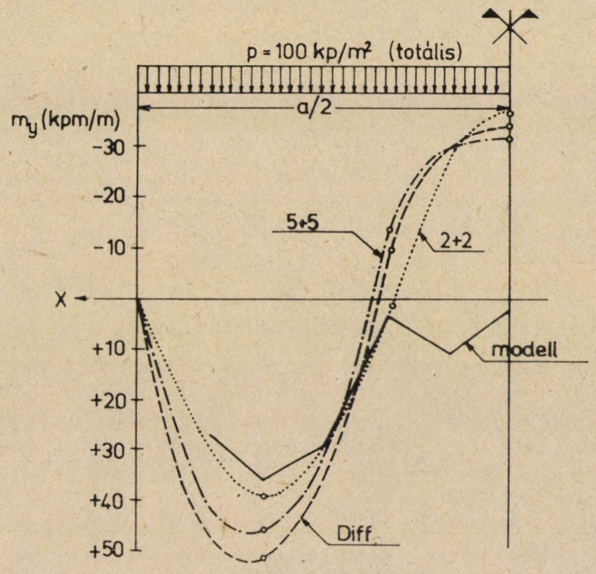
23. ábra. Antimetrikus teher, m_y



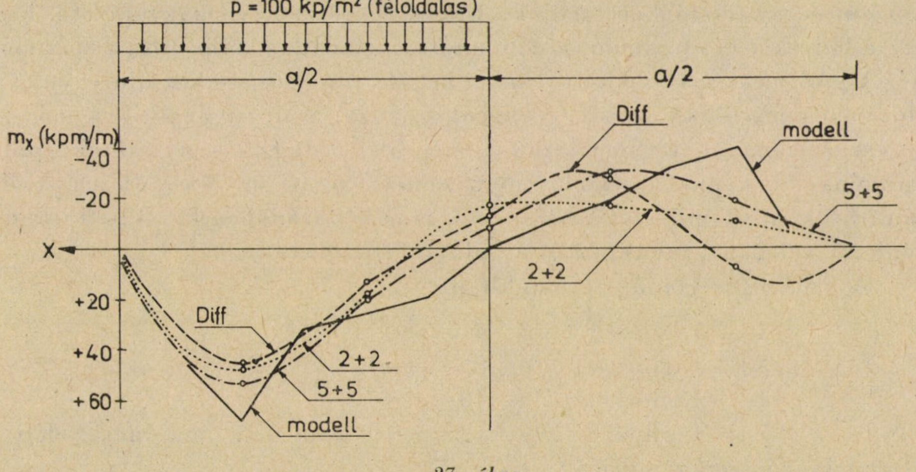
24. ábra. Antimetrikus teher, m_{xy}



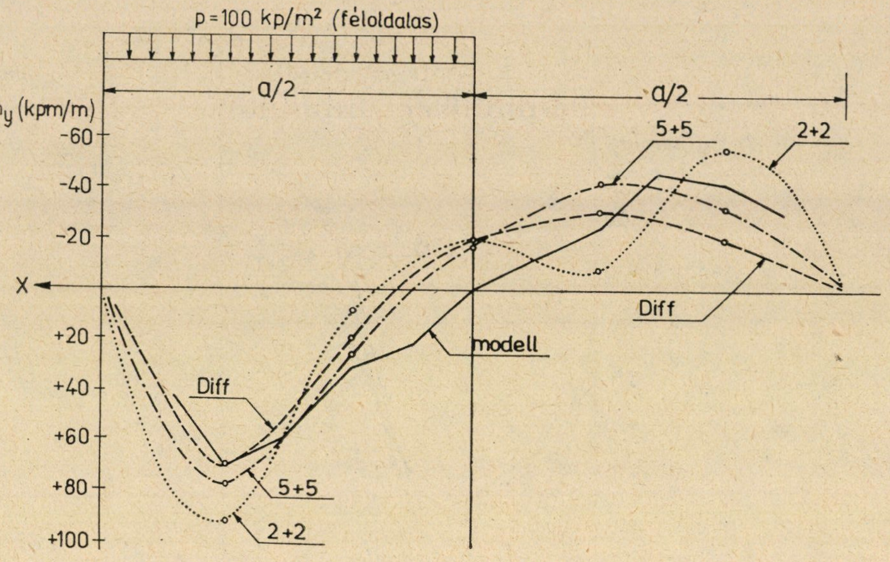
25. ábra



26. ábra



27. ábra



28. ábra

A továbbiakban *a differencia-módszert fogadjuk el „pontos megoldás"-nak,* s ehhez viszonyítjuk az analitikus megoldást. Ily módon az eredményekből az alábbi következtetéseket vonhatjuk le a bemutatott módszerek előnyeire és hátrányaira vonatkozóan:

A *differencia-módszer* hátránya nagy gépidő-szükséglete (példánkban 2—3 Elliott 803-as gépóra).

Az *analitikus módszer* kevésbé pontos, de már a 2 + 2 taggal számított megoldás is jó közelítést nyújt, különösen a maximális igénybevételek értékére. A tagok számának növelésével csak lassan nő a pontosság. A legnagyobb eltérést az A.2., A.6., A.10. táblázatok n_y-értékeiben, valamint az A.15. és A.16. táblázatok n_{xy}-értékeiben találjuk. Ennek egyrészt az a magyarázata, hogy ezek a helyek nem maximumok, hanem itt emelkedik a görbe 0-tól a maximum felé. A görbének ez a szakasza tehát a kétféle számítás szerint mintegy el van tolódva egymástól. Másrészt itt jelentkezik az, amit az analitikus módszer konvergenciájára fent mondottunk: még 5 + 5 taggal sem tudunk pontos eredményeket kapni, legalábbis nem minden pontban. Más, összehasonlító számítások is azt mutatták, hogy csak mindkét irányban kb. 12—15 taggal érünk el valóban „pontosnak" mondható eredményt.

A szükséges gépidő (példánkban)

2+2 taghoz	3÷4	perc
3+3 taghoz	6÷8	perc
4+4 taghoz	30÷40	perc
5+5 taghoz	90÷125	perc, azaz már majdnem eléri a

differencia-módszer gépidejét.

Láthatjuk, hogy az analitikus módszer fő előnye: igen kis gépidő-szükséglettel (2+2 taggal) is már jó közelítő értékeket szolgáltat. Véleményünk szerint tehát közelítő, előzetes számításokhoz használhatjuk előnyösen.

TÁBLÁZATOK

A metszeterők különböző módszerekkel kapott számértéke, a 8. ábrán jelzett pontokban.

Magyarázat:

2+2, 3+3, stb.	Az analitikus megoldás Fourier-sorából figyelembe vett tagok száma.
Diff	A differenciamódszerrel kapott megoldás.
n_x, n_y, n_{xy}	Mp/m dimenzióban,
m_x, m_y, m_{xy}	Mpm/m dimenzióban értendő.

S.1. — S.16. táblázatok

Metszeterők 100 kp/m² szimmetrikus totális teherre.

S.1. táblázat

$x = 0, \quad y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−7,115	−2,186	0	−0,0337	−0,0363	0
3+3	−6,000	−1,044	0	−0,0054	−0,0289	0
4+4	−6,216	−1,272	0	−0,0344	−0,0351	0
5+5	−5,972	−1,249	0	−0,0151	−0,0312	0
Diff.	−6,563	−1,466	0	−0,0250	−0,0338	0

S.2. táblázat

$x = a/6, \quad y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−5,485	−0,814	0	+0,0011	+0,0016	0
5+5	−5,406	−1,001	0	−0,0101	−0,0132	0
Diff.	−5,647	−1,088	0	−0,0147	−0,0091	0

S.3. táblázat

$x = a/3, \quad y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−2,386	+0,775	0	+0,0357	+0,0391	0
3+3	−2,723	+0,571	0	+0,0736	+0,0554	0
4+4	−3,235	−0,012	0	+0,0576	+0,0504	0
5+5	−3,388	+0,219	0	+0,0346	+0,0459	0
Diff.	−2,370	+0,597	0	+0,0530	+0,0512	0

S.4. táblázat

$x = a/2, \quad y = 0$

Minden metszeterő zérus

S.5. táblázat

$x = 0, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−6,611	−1,924	0	−0,0276	−0,0138	0
5+5	−5,776	−1,255	0	−0,0134	−0,0218	0
Diff.	−6,119	−1,336	0	−0,0215	−0,0243	0

S.6. táblázat

$x = a/6, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−4,978	−0,709	1,090	+0,0011	+0,0075	+0,0189
5+5	−4,871	−0,967	−0,593	−0,0083	−0,0035	+0,0147
Diff.	−4,946	−0,920	−0,785	−0,0121	−0,0033	+0,0142

S.7. táblázat

$x = a/3, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−2,012	+0,696	−1,051	+0,0294	+0,0268	0,0007
5+5	−2,489	+0,526	−1,356	+0,0300	+0,0351	+0,0232
Diff.	−1,983	+0,532	−0,999	+0,0451	+0,0419	+0,0011

S.8. táblázat

$x = a/2, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−0,732	0	0	−0,0202
5+5	0	0	−0,623	0	0	−0,0539
Diff.	0	0	−0,740	0	0	−0,0176

S.9. táblázat

$x = 0, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−4,335	−1,146	0	−0,0141	+0,0123	0
5+5	−4,556	−0,991	0	−0,0092	+0,0048	0
Diff.	−4,462	−0,871	0	−0,0120	+0,0010	0

S.10. táblázat

$x = a/6, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−3,137	−0,413	−2,061	+0,0007	+0,0114	+0,0238
5+5	−3,133	−0,690	−1,359	−0,0049	+0,0148	+0,0264
Diff.	−3,034	−0,497	−1,495	−0,0061	+0,0100	+0,0223

S.11. táblázat

$x = a/3, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−1,098	+0,430	−1,878	+0,0153	+0,0074	−0,0028
5+5	−0,894	+0,780	−1,749	+0,0197	+0,0191	+0,0260
Diff.	−1,078	+0,328	−1,752	+0,0247	+0,0204	+0,0005

S.12. táblázat

$x = a/2, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−1,193	0	0	−0,0287
5+5	0	0	−1,968	0	0	−0,0758
Diff.	0	0	−1,400	0	0	−0,0294

S.13. táblázat

$x = 0, \quad y = b/2$

Minden metszeterő zérus

S.14. táblázat

$x = a/6, \quad y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−2,480	0	0	+0,0224
5+5	0	0	−1,844	0	0	+0,0243
Diff.	0	0	−1,840	0	0	+0,0242

S.15. táblázat

$x = a/3, \quad y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−2,202	0	0	−0,0042
5+5	0	0	−1,246	0	0	+0,0163
Diff.	0	0	−2,040	0	0	+0,0004

S.16. táblázat

$x = a/2, \quad y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	–1,334	0	0	–0,0296
3+3	0	0	–1,916	0	0	–0,0596
4+4	0	0	–2,887	0	0	–0,0676
5+5	0	0	–3,508	0	0	–0,0663
Diff.	0	0	–1,610	0	0	–0,0330

A.1.—A.16. táblázatok

Metszeterők 100 kp/m² antimetrikus teherre. (2. ábra)

A.1. táblázat

$x = 0, \quad y = 0$

Minden metszeterő zérus

A.2. táblázat

$x = a/6, \quad y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	–3,920	+0,830	0	+0,0364	+0,0142	0
5+5	–4,010	–0,186	0	+0,0498	+0,0679	0
Diff.	–4,669	–5,910	0	+0,0394	+0,0515	0

A.3. táblázat

$x = a/3, \quad y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	–10,429	–10,049	0	+0,0587	+0,1464	0
3+3	–10,307	–10,051	0	+0,0451	+0,1168	0
4+4	– 9,496	– 7,957	0	+0,0580	+0,1116	0
5+5	– 9,727	– 7,581	0	+0,0717	+0,1089	0
Diff.	–10,010	– 7,772	0	+0,0379	+0,0889	0

A.4. táblázat

$x = a/2, \quad y = 0$

Minden metszeterő zérus

A.5. táblázat

$x = 0, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	+0,723	0	0	−0,0021
5+5	0	0	+1,118	0	0	+0,0317
Diff.	0	0	+1,787	0	0	+0,0212

A.6. táblázat

$x = a/6, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−5,134	+0,448	+2,915	+0,0468	+0,0750	+0,0366
5+5	−4,488	−0,269	+2,084	+0,0481	+0,0795	+0,0253
Diff.	−4,802	−6,390	+1,766	+0,0384	+0,0609	+0,0143

A.7. táblázat

$x = a/3, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−9,082	−8,546	−0,362	+0,0359	+0,0702	+0,0010
5+5	−7,995	−6,419	+0,741	+0,0777	+0,0841	+0,0107
Diff.	−8,711	−6,679	−0,893	+0,0289	+0,0632	−0,0106

A.8. táblázat

$x = a/2, \quad y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−5,829	0	0	−0,0731
5+5	0	0	−6,767	0	0	−0,1037
Diff.	0	0	−3,540	0	0	−0,0287

A.9. táblázat

$x = 0, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	+2,754	0	0	+0,0675
5+5	0	0	+2,893	0	0	+0,0751
Diff.	0	0	+3,514	0	0	+0,0467

A.10. táblázat

$x = a/6, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−4,973	−0,054	+4,817	+0,0447	+0,1158	+0,0296
5+5	−4,653	−0,358	+4,014	+0,0370	+0,1017	+0,0368
Diff.	−4,354	−5,597	+3,091	+0,0291	+0,0743	+0,0212

A.11. táblázat

$x = a/3, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	−5,301	−4,752	+1,377	+0,0035	−0,0247	−0,0337
5+5	−5,830	−4,077	+0,249	+0,0695	+0,0156	−0,0520
Diff.	−5,333	−3,789	+1,757	+0,0106	+0,0100	−0,0234

A.12. táblázat

$x = a/2, \quad y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−9,634	0	0	−0,0591
5+5	0	0	−11,419	0	0	−0,0448
Diff.	0	0	−6,210	0	0	−0,0425

A.13. táblázat

$x = 0, \quad y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	+4,047	0	0	+0,1189
5+5	0	0	+3,636	0	0	+0,1146
Diff.	0	0	+4,350	0	0	+0,0607

A.14. táblázat

$x = a/6, \quad y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	+5,429	0	0	+0,0147
5+5	0	0	+4,690	0	0	+0,0309
Diff.	0	0	+3,610	0	0	+0,0222

A.15. táblázat

$x = a/3, \quad y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−2,024	0	0	—0,0595
5+5	0	0	−0,619	0	0	—0,1456
Diff.	0	0	−2,170	0	0	—0,0304

A.16. táblázat

$x = a/2, \quad y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2+2	0	0	−10,858	0	0	—0,0293
3+3	0	0	−11,782	0	0	+0,0280
4+4	0	0	−12,164	0	0	+0,0856
5+5	0	0	−11,778	0	0	+0,1147
Diff.	0	0	− 6,550	0	0	—0,0445

IRODALOM

1. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen (3. Aufl.). Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.
2. HOLNAPY D.: A rácspontmódszer egy mérnöki szempontból fontos általánosításáról. *Mélyépítéstudományi Szemle*, **17** (1967), 273—274.
3. KIS OTTÓ: Számítási módszerek I. Felsőoktatási Jegyzetellátó, Budapest 1965.
4. KOLLÁR L.: Design and Erection of a Shell with a Surface of Fourth Order in: Large-Span Shells. (Proc. IASS-Congr. Leningrad, 1966). Tsinis Moscow, 1968. Vol. I. p. 255. A Székesfehérvári Könnyűfémmű bővítés II. ütemének héjszerkezetei. *Mélyépítéstudományi Szemle*, 1969. 541—545.
5. SOARE, M.: Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis. Pergamon Press, London — Academy of Roumania, Bucharest 1967.
6. SZMODITS K.: Analysis of Shallow Shells of General Shape. Proceedings of the IASS-Symposium on Shell Structures in Engineering Practice, Budapest, 1965. Építéstudományi Intézet, 1966.

Bending Analysis of a Symmetrically or Antimetrically Loaded Straight-Edge Shell with Surface of Fourth Order. The equations of shell structures formed with surfaces of higher than the second order, are of variable coefficients. The difficulties arising herefrom may be overcome either by using a special analytic method or by applying the difference-computation. These two methods are presented first in general use, and then on the specified data of an executed shell structure also checked by means of a model test. Besides the numerical comparison the two procedures are also theoretically evaluated.

Berechnung einer gebogenen symmetrisch und antimetrisch belasteten Schalenfläche vierter Ordnung mit geraden Rändern. Die Gleichungen. von Schalen, die mit einer Oberfläche von höherer als zweiter Ordnung ausgebildet sind, haben veränderliche Koeffizienten. Die daraus entstehenden Schwierigkeiten können entweder mit Hilfe einer speziellen analytischen Methode oder der Differenzenrechnung überwältigt werden. Der Verfasser führt diese zwei Verfahren vor, und zwar erstens im allgemeinen Gebrauch und dann mit den konkreten Angaben einer schon ausgeführten Schalenkonstruktion die auch mit einem Modellversuch kontrolliert wurde. Ausser der numerischen Gegenüberstellung wurden die zwei Methoden auch theoretisch ausgewertet.