CSILLAGSOKSZÖG ALAPRAJZÚ FORGÁSPARABOLOID-HÉJAK

CSONKA PÁL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA MTA MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1969. augusztus 4-én]

A dolgozat oly forgásparaboloid-héjak számításával foglalkozik, melyek alaprajzi idoma befelé ívelt oldalakkal bíró szabályos sokszög. Felteszi, hogy a héj peremgerendáját fal, vagy sűrűn egymás mellett álló oszlopok gyámolítják. Terhelésként az alaprajz területén egyenletesen megoszló függélyes erőrendszert tételez fel, s a héj peremvonalának ívelését akként állapítja meg, hogy a héj redukált belsőerői egyszerű zárt képletekkel legyenek számíthatók. A dolgozat a redukált feszítőerők fő értékeit is megállapítja, sőt a redukált feszültségi főirányok trajektóriáinak egyenletét is felállítja. A redukált feszítőerők számításának egyszerű voltát számpéldával igazolja.

1. Bevezetés

E dolgozat keretében *csillagsokszögön* olyan szabályos idomot értünk, amelynek oldalai befelé íveltek (1. ábra).

A csillagsokszög fölé, mint alaprajz fölé szerkesztett függélyes tengelyű forgásparaboloid-héjak az alaprajz területén egyenletesen megoszló függélyes teher esetében aránylag egyszerűen számíthatók. Ennek előfeltétele azonban, hogy az alaprajzi idom oldalainak ívelését megfelelően alakítsuk, héj peremtartóját fallal vagy sűrűn egymás mellett álló oszlopokkal támasszuk alá (2. ábra).



1. ábra. Ötoldalú csillagsokszög



2. ábra. Ötoldalú csillagsokszög fölé szerkesztett forgásparaboloid-héj

Az alábbiakban a csillagsokszög alaprajzú héjak erőtani vizsgálata során tárgyalásainkat a héjak membránelméletére alapozzuk. Ennek megfelelőleg a héjfalban keletkező hajlító és csavaró hatásokat – ideértve a peremtartóhoz való csatlakozás környezetében keletkező hajlító és csavaró erőket is – figyelmen kívül hagyjuk. Nem vesszük számításba a peremtartóban keletkező – amúgy is jelentéktelen – hajlító és csavaró hatásokat sem.

CSONKA PÁL

2. A csillagsokszög

2.1. A határoló vonal egyenlete

Az n-oldalú csillagsokszög alakját az O(r, φ) poláris koordinátarendszerben az

$$f(\mathbf{r},\varphi) = A \frac{r^2}{R^2} + B \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi + C = \mathbf{0}$$

alakú egyenlettel jellemezzük (3. ábra). Ebben az egyenletben R a csillagsokszög köré írt kör sugara, A, B és C pedig állandókat jelentenek. Utóbbiaknak oly értéket tulajdonítunk, hogy az alaprajzi idomnak a kívánt helyeken sarokpontjai, mégpedig kettős pontjai legyenek. Ehhez az szükséges, hogy az említett pontokban f, $\partial f/\partial r$ és $\partial f/\partial \varphi$ zérus értékű legyen, f második deriváltjai viszont ne mind tűnjenek el. Mindezek a követelmények akkor teljesülnek, ha

$$A = 1, \quad B = \frac{2}{n}, \quad C = -\frac{n-2}{n}$$

Ezekkel az értékekkel a csillagsokszög egyenlete:

$$f(r,\varphi) = \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{n} \cdot \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi - \frac{n-2}{n} = 0.$$
 (1)

A fenti egyenletnek φ -re megoldott alakja:

$$\varphi = \frac{1}{n} \arccos \left[\frac{n}{2} \cdot \frac{R^n}{r^n} \left(\frac{n-2}{n} - \frac{r^2}{R^2} \right) \right].$$
 (2)



3. ábra. Az $O(r, \varphi)$ poláris koordinátarendszer

2.2.
$$Az \ n = 3$$
 eset

Ha n = 3, a csillagsokszög határoló vonalának (1) alatti egyenlete

$$\frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{3} \frac{r^3}{R^3} \cos 3\varphi - \frac{1}{3} = 0$$
(3)

4. ábra. Háromoldalú csillagsokszög 5. ábra. Négyoldalú csillagsokszög

alakú, ami némi átalakítás után ekként írható:

$$\begin{pmatrix} 1-2\frac{r}{R}\cos\varphi \end{pmatrix} \left(\frac{r}{R}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r}{R}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \\ \cdot \left(\frac{r}{R}\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r}{R}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 .$$

$$(4)$$

A fenti egyenlet három tényezőre bontható:

$$1 - 2\frac{r}{R}\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{r}{R}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{r}{R}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$\frac{r}{R}\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{r}{R}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$
(5)

Ezek az egyenletek egymást 60°-ban metsző három egyenesnek az egyenletei, tehát az adott esetben a csillagsokszög egyenlőoldalú háromszöggé fajul el (4. ábra).

2.3.
$$Az \ n = 4 \ eset$$

Ha n = 4, akkor a csillagsokszög (1) alatti egyenlete így alakul:

$$\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^4}{R^4} \cos 4\varphi - \frac{1}{2} = 0.$$
 (6)

CSONKA PÁL

Ámde

$$\cos 4\varphi = 2 \cos^2 2\varphi - 1,$$

úgyhogy az előbbi egyenlet helyett ez írható:

(

$$\left(\frac{r^2}{R^2} \cos 2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\left(\frac{r^2}{R^2} \cos 2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.$$
(7)

A fenti egyenletet két tagra bontva, az

$$\frac{r^2}{R^2}\cos 2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$\frac{r^2}{R^2}\cos 2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
(8)

egyenleteket kapjuk, melyek két hiperbolát képviselnek. A szóban forgó esetben tehát a csillagsokszöget négy hiperbolaív határolja (5. ábra). Ezek valós féltengelye

$$a = \frac{R}{\sqrt[4]{\sqrt{2}} + 1} \simeq 0,643\,59\,R,$$
 (9)

képzetes féltengelye pedig

$$b = \frac{R}{\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}} \simeq 1,553\,77\,R$$
 (10)

nagyságú.

I. táblázat

Adatok a 3 \leq n \leq 10 csillagsokszögek megszerkesztéséhez

n	r _o	$r_1 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} R$	$\tan \alpha_1 = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$	$\tan \alpha_2 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$
3	0,5000 R	0,5774 R	1,7321	0.5774
4	0.6436 R	0,7071 R	2,0000	0.7071
5	0.7221 R	0.7746 R	2,1552	0.7746
6	0.7721 R	0.8165 R	2,2500	0.8165
7	0.8098 R	0.8452 R	2,3250	0.8452
8	0.8322 R	0.8660 R	2.3704	0.8660
9	0.8515 R	0.8819 R	2.4225	0.8819
10	0,8670 R	0,8944 R	2,4414	0,8944

Műssaki Tudomány 42, 1970

2.4. A csillagsokszög megszerkesztése

A csillagsokszög határoló vonalának az O kezdőponttól tetszőleges r távolságra levő P pontjainak φ poláris szögét a (2) képlet segítségével meg tudjuk határozni, s így a csillagsokszög határoló vonalát kívánt pontossággal meg tudjuk szerkeszteni.



6. ábra. Jelölések

A fenti pontos eljárással szemben a gyakorlat céljaira teljesen megfelelő, ha a csillagsokszög határoló íveit csupán öt pont és érintő birtokában rajzoljuk meg. Az egyes pontok közötti ívszakaszok parabolával vagy körívvel helyettesíthetők. A szóban forgó közelítő szerkesztés céljaira az I. táblázatban szereplő jelölések értelmét a 6. ábra magyarázza.

Az $5 \le n \le 10$ oldalú csillagsokszögek alakja a 7. ábrán látható.

3. A héj alakja

Az R sugarú körbe írt csillagsokszög fölé, mint alaprajz fölé szerkesztett h magasságú forgásparaboloid-héj középfelületének egyenlete a 8. ábrán feltüntetett $O(r, \varphi, z)$ hengeres koordinátarendszerben:

$$z = \frac{h}{R^2} r^2. \tag{11}$$

Ezt a felületet az alaprajzi idom fölé állított hengerfelület ívekben metszi. Utóbbiak az n > 3 esetben térbeli görbék. Ívmagasságuk:

$$h' = h \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) . \tag{12}$$



7. ábra. Az 5 $\leq n \leq 10$ oldalú csillagsokszögek



8. ábra. Csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid-héj

CSILLAGSOKSZÖG ALAPRAJZÚ FORGÁSPARABOLOID-HÉJAK

II. táblázat

A $3 \leq n \leq 10$ oldalú csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid-héjak peremívének h' ívmagassága

n	h'
/	1
3	0,7500 h
4	0,5858 h
5	0,4786 h
6	0,4039 h
7	0,3442 h
8	0,3076 h
9	0,2750 h
10	0,2483 h

A $3 \le n \le 10$ oldalú csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid-héjak peremíveinek h' ívmagasságát a II. táblázat tartalmazza.

Az n = 4 és n = 0 ektalú csillagsokszög alaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloid-héjak axenometrikus képe a 9*a* és 9*b* ábrán látható.





9a ábra. Négyoldalú csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid-héj 9b ábra. Hatoldalú csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid-héj

4. A feladat megoldása általában

Héjak feszültségi állapotának vizsgálatához az ún. $F = F(r, \varphi)$ feszültségfüggvényt célszerű előállítani. Ez a függvény függélyes megoszló teherrel terhelt forgáshéjak esetében általában a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \frac{d^2 z}{dr^2} + g = 0 \quad (13)$$

differenciálegyenletnek tartozik megfelelni, ahol $g' = g(r, \varphi)$ a héjra ható megoszló tehernek az alaprajz területegységére vonatkoztatott fajlagos értékét jelenti. Esetünkben a fajlagos teherérték

$$g = g_0 = \text{konst} \tag{14}$$

 $\frac{dz}{dr}=\frac{2h}{R^2}r, \qquad \frac{d^2z}{dr^2}=\frac{2h}{R^2},$

Műszaki Tudomány 42, 1970

és

miért is a (13) differenciálegyenlet ekként egyszerűsbül:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{R^2}{2h} g_0 = 0.$$
 (15)

Az ismeretlen F függvénynek a (15) differenciálegyenleten felül ki kell még elégítenie a feladat *kerületi feltételét* is. Ez a feltétel teljes hosszában fallal alátámasztott peremtartóval bíró héj`esetében az

$$F_{\text{kerület}} = \text{konst},$$
 (16a)

egyenlettel, sűrű egymás mellett álló függélyes oszlopokkal gyámolított peremtartóval bíró héj esetében pedig az

$$F_{\text{kerület}} \simeq \text{konst}$$
 (16b)

képlettel fejezhető ki.

Ha sikerül olyan F függvényt előállítanunk, mely a (15) és (16) alatti követelményeket egyidejűleg kielégíti, akkor a héj sugár- és ívirányú redukált feszítő erőit a következő ismert képletekkel számíthatjuk:

$$n_{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \cdot \frac{\partial^{2} F}{\partial \varphi^{2}},$$

$$n_{n\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right),$$

$$n_{\varphi} = -\frac{\partial^{2} F}{\partial r^{2}}.$$
(17)

5. A héj feszültségi állapota

5.1. A feladat feszültségfüggvénye

Az alaprajz területén egyenletesen megoszló g_0 intenzitású függélyes teher esetében a feladat F = F(r, q) feszültségfüggvényét – egyszerű próbával igazolhatóan – a következőképp szerkeszthetjük meg:

$$F(\mathbf{r},\varphi) = -\frac{R^4 g_0}{8h} f(\mathbf{r},\varphi) . \qquad (18)$$

E képletben $f(r, \varphi)$ a csillagsokszög peremvonalának zérusra redukált (1) alatti egyenletét jelenti. Részletesen kiírva, az *n*-oldalú csillagsokszög fölé, mint alaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloid-héj feszültségfüggvénye:

$$F = -\frac{R^4 g_0}{8h} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{n} \cdot \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi - \frac{n-2}{n} \right) .$$
 (19)

Műszaki Tudomány 42, 1970

Ismervén a feszültségfüggvényt, az r, φ irányú redukált feszítőerőket a (17) képletek szerint számíthatjuk:

$$n_{r} = -\frac{R^{2} g_{0}}{4h} \left[1 - (n-1) \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \cos n\varphi \right],$$

$$n_{r\varphi} = -\frac{R^{2} g_{0}}{4h} (n-1) \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \sin n\varphi ,$$

$$n_{\varphi} = -\frac{R^{2} g_{0}}{4h} \left[\left(1 + (n-1) \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \cos n\varphi \right) \right].$$
(20)

5.2. A redukált feszítőerők főértékei

A redukált feszítőerők n_1 , n_2 főértékeinek számítására a szilárdságtanból ismert

$$n_{1,2} = \frac{1}{2} (n_r + n_{\varphi}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(n_r - n_{\varphi})^2 + 4n_{r_{\varphi}}^2}$$

képletet használhatjuk fel. Ha ide a (20) alattiakat behelyettesítjük, azt találjuk, hogy

$$n_{1,2} = -\frac{R^2 g_0}{4h} \left[1 \pm (n-1) \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \right].$$
(21)

Megfigyelhetjük, hogy a redukált feszítőerők főértékei nem függnek a φ poláris szögtől, tehát a héjnak a z tengelytől azonos távolságban levő minden pontja azonos módon van igénybe véve. Más szóval szólva, az azonos módon igénybe vett pontok trajektóriái az O középpont köré rajzolt körök (10. ábra).

A (21) képletből az is leolvasható, hogy a héjnak csak egy belső kör alakú övezete (11. ábrán) pontozottan feltüntetett héjrész) mentes húzófeszültségektől. E kör alakú övezet r_{00} sugara az

$$1 - (n-1)\frac{r_{00}^{n-2}}{R^{n-2}} = 0$$



10. ábra. Az azonos módon igénybevett pontok trajektóriái

11. ábra. A húzófeszültségektől mentes övezet

egyenletből határozható meg:

$$r_{00} = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{n-2}}} R.$$
 (22)

Értékét különböző oldalszámú csillagsokszög alaprajzú héjak esetében a III. táblázat tartalmazza.

A (21) képletből az a tanulság is leszűrhető, hogy a héj sarokpontjaiban a főnyomófeszültség a héj középpontjában keletkező nyomófeszültség *n*-szerese. Ugyanott a főhúzófeszültség (n - 2)-szerte nagyobb, mint a héj középpontjában keletkező nyomófeszültség abszolút értéke.

III. táblázat				
A húzófeszültségektől mentes övezet sugara				
n	r ₀₀			
3	0,5000 R			
4	0,5774 R			
6	0,6687 R			
7	0,6988 R			
8	0,7230 R 0.7430 R			
10	0,7598 R			

5.3. A redukált feszítőerők főirányai

A P pontbeli főirányoknak a P pontba húzott rádiuszvektor irányától való α szögeltérése (12. ábra) a szilárdságtan tanítása szerint az alábbi képletből számítható:

$$\tan 2lpha = rac{2n_{r\varphi}}{n_r - n_{\varphi}}$$

E képletből a (20) alattiak behelyettesítésével a

$$\tan 2\alpha = -\tan n\varphi$$

összefüggés következik. Innen

$$\alpha = \begin{cases} -n \, \varphi/2 \\ -n \, \varphi/2 - \pi/2. \end{cases}$$
(29)

A fenti képletből az tűnik ki, hogy a redukált feszítőerők főirányai nem függenek a rádiuszvektor r hosszától, vagyis a főirányok valamennyi trajektó-

Műszaki Tudomány 42, 1970

riája ugyanazt a rádiuszvektort azonos α szögben metszi (13. ábra). Ez a megállapítás más szóval azt jelenti, hogy a különböző trajektóriavonalak mind azonos alakúak, tehát csak léptékben különböznek egymástól.

5.4. A trajektóriák egyenlete

A főfeszítőerők trajektóriái az analitikai geometriából ismert

 $\tan \alpha = \frac{r}{dr/d\varphi}$



12. ábra. A P pontbeli főirányok



képlet segítségével határozhatók meg. A fenti képlet szerint

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r}{\tan\alpha},$$

illetve a (23) alattiak figyelembevételével

$$rac{dr}{darphi} = rac{r}{- an (narphi/2)}$$

Innen a változók szétválasztásával az

$$\frac{1}{r}dr = \begin{bmatrix} +\tan(n\varphi/2) \\ -\cot \end{bmatrix} d\varphi$$

összefüggés következik. Ha most mindkét oldalon integrálunk, azt találjuk, hogy

$$\ln cr = -\frac{2}{n} \ln \frac{\cos}{\sin} (n\varphi/2) = \ln \left[\frac{\cos}{\sin} (n\varphi/2) \right]^{-2/n},$$

Műszaki Tudomány 42, 1970

l ismert

- 4= 0

CSONKA PÁL

ahol c integrálási állandót jelent. Innen

$$cr = \left[\frac{\cos}{\sin} \left(n\varphi/2 \right) \right]^{-2/n},$$

illetve

$$r = \frac{1}{c} \left(\frac{1 \pm \cos n\varphi}{2} \right)^{-1/n}.$$
 (24)

A $\mathbf{P}_1(r_1,\varphi_1)$ ponton átmenő trajektória esetében a cintegrálási állandó értéke az

$$r_1 = \frac{1}{c} \left(\frac{1 \pm \cos n\varphi_1}{2} \right)^{-1/n}$$

egyenletből határozható meg. Ha ebből az egyenletből c értékét kiszámítjuk, s azt a (24) képletbe betesszük, a $P_1(r_1, \varphi_1)$ ponton átmenő trajektóriák egyenletét a következő alakban kapjuk meg:

$$r = \left(\frac{1 \pm \cos n\varphi_1}{1 + \cos \varphi}\right)^{1/n} \cdot r_1.$$
(25)

Egy ötoldalú csillagsokszög fölé, mint alaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloid-héj esetében a redukált feszültségi főirányok trajektóriái a 14. ábrán láthatók.



14. ábra. A redukált feszültségi főirányok trajektóriái

Műszaki Tudomány 42, 1970

6. Számpélda

Alkalmazzuk a fentiekben ismertetett számító eljárást a 15. ábrán feltüntetett n = 5 oldalú csillagsokszög alaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloid-héjra. A vizsgálandó héjat az alaprajz területén egyenletesen megoszló

$$g = g_0 = 280 \text{ kp/m}^2$$

intenzitású függélyes erő terheli. Esetünkben



15. ábra. Ötoldalú csillagsokszög alaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloid héj

s így a héj r, φ irányú redukált feszítőerői a (20) képletek szerint:

$$\begin{split} n_{t} &= -\frac{20,0^{2} \cdot 280}{4 \cdot 14,0} \left(1 - 4 \frac{r^{3}}{20,0^{3}} \cos 5 \varphi\right) = -2000 \left(1 - \frac{r^{3} \cos 5\varphi}{2000}\right) \text{kp/m} \\ n_{t\varphi} &= -\frac{20,0^{2} \cdot 280}{4 \cdot 14,0} 4 \frac{r^{3}}{20,0^{3}} \sin 5\varphi = -r^{3} \sin 5\varphi \text{ kp/m}, \\ n_{\varphi} &= -\frac{20,0^{2} \cdot 280}{4 \cdot 14,0} \left(1 + 4 \frac{r^{3}}{R^{3}} \cos 5\varphi\right) = -2000 \left(1 + \frac{r^{3} \cos 5\varphi}{2000}\right) \text{kp/m}. \end{split}$$

Mint a fenti képletekből leolvasható, a héj igen kedvező feszültségi állapotban van, a redukált feszítőerők még a héjsarkokban is aránylag kicsinyek: itt a legnagyobb redukált nyomóerő 10 000 kp/m, a legnagyobb redukált húzóerő pedig 6000 kp/m értékű.

A fenti számpélda keretében vizsgált héj axonometrikus képe az 1. ábrán látható

Paraboloid Shells of Revolution Star-Polygonal in Plan. Paper deals with the statical analysis of paraboloid shells of revolution the ground-plan figure of which resembles a regular polygon, but has inward arched sides instead of straight ones. It is presumed that the edge beam of the shell is supported by a wall or by vertical columns standing close to each other. A vertical force system equally distributed over the ground-plan area is assumed as loading. The arching of the shell's edge line is set up in such a way as to enable the calculation of the reduced inner forces to be made by simple closed formulae. Paper also states the principal values of the reduced inner forces, moreover it determines the equation of their trajectories. A numerical example is given to proove the simplicity of the calculation. Rotationsparaboloidschalen über Sternpolygon-Grundriss. Der Aufsatz behandelt die Berechnung von Rotationsparaboloidschalen, deren Grundriß einem regelmässigen Vieleck ähnelt, dessen Seiten jedoch nach innen gebogen sind. Es wird angenommen, daß der Rand-Träger der Schale durch eine Wand, oder dicht aneinandergereihte Säulen unterstützt wird. Als Belastung wird ein auf der Grundrißfläche gleichmässig verteiltes Kraftsystem in Rechnung gestellt und die Achsenlinie der Randbögen wird derart bestimmt, daß die reduzierten Spannkräfte der Schale durch einfache Formeln berechnet werden können. Der Aufsatz bestimmt auch die Hauptwerte der reduzierten Spannkräfte und stellt sogar die Gleichung der Trajektorien der Hauptrichtungen auf. Die Einfachheit der Bestimmung der reduzierten Spannkräfte wird durch ein numerisches Beispiel illustriert.