

# VÁLTOZÓ TERHELÉSŰ LENYESETT PROFILÚ HENGERSKERÉKPÁROK SZÁMÍTÁSA

BOTKA IMRE és ERNEY GYÖRGY

[Beérkezett 1968. szeptember 23-án]

A tanulmány a változó igénybevételű, lenyesett profilú fogaskerékpárok szilárdsági ellenőrzésének menetét ismerteti, figyelembe véve a kapcsolóhossz változását a terhelés függvényében, és egy vasúti trakciós fogaskerékhajtás példáján mutatja be ennek gyakorlati alkalmazását.

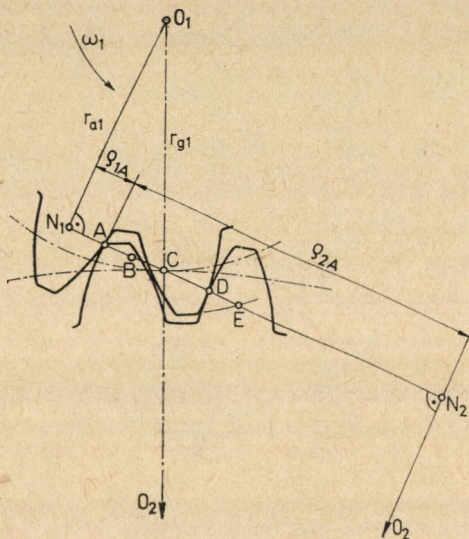
## Jelölések

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$                    | tengelytáv;                                                                                                                                                                                                                                      |
| $b$                    | fogszélesség;                                                                                                                                                                                                                                    |
| $b'$                   | működő fogszélesség;                                                                                                                                                                                                                             |
| $e$                    | $= \overline{AE}$ , kapcsolóhossz (teljes);                                                                                                                                                                                                      |
| $e'$                   | $= \overline{A'E'}$ , megváltozott kapcsolóhossz;                                                                                                                                                                                                |
| $e_L$                  | $= L_1 L_2$ , lenyesett kapcsolóhossz;                                                                                                                                                                                                           |
| $\Delta e$             | $= e - e_L$ , kapcsolóhossz-különbség;                                                                                                                                                                                                           |
| $\Delta e'$            | $= e' - e_L$ , kapcsolóhosszváltozás;                                                                                                                                                                                                            |
| $n, n'$                | fordulatszám;                                                                                                                                                                                                                                    |
| $p_n$                  | vonalnyomás (teljes);                                                                                                                                                                                                                            |
| $p_{nL}$               | vonalnyomás az $L$ lenyesési pontban;                                                                                                                                                                                                            |
| $t_a$                  | alaposztás;                                                                                                                                                                                                                                      |
| $A, B, C, D, E$        | kapcsolópontok a kapcsolóvonalon;                                                                                                                                                                                                                |
| $A', B', D', E'$       | megváltozott kapcsolópontok;                                                                                                                                                                                                                     |
| $C_L$                  | $= e_L/t_a$ , a lenyesett kapcsolóhossz meghatározásához használt viszony-<br>szám;                                                                                                                                                              |
| $F, F'$                | kerületi erő;                                                                                                                                                                                                                                    |
| $F_{\max}$             | maximális fellépő kerületi erő;                                                                                                                                                                                                                  |
| $F_n, F'_n$            | fognyomás;                                                                                                                                                                                                                                       |
| $L_1, L_2$             | lenyesési pontok;                                                                                                                                                                                                                                |
| $\alpha_g$             | kapcsolószög;                                                                                                                                                                                                                                    |
| $\varepsilon$          | $= e/t_a$ , kapcsolószám (teljes);                                                                                                                                                                                                               |
| $\kappa$               | viszonyszám a lenyesés mértékének kiszámításához;                                                                                                                                                                                                |
| $\varrho_1, \varrho_2$ | a kiskerék és a nagykerék fogprofiljának görbületi sugara; az index további<br>jelei mutatják, hogy mely kapcsolópontokhoz tartozó görbületi sugárról van<br>szó (pl. $\varrho_{2A}$ a nagykerék profilgörbületi sugara az $A$ kapcsolópontban). |

## I. Bevezetés

A fogaskerek teherbírásának számítására az újabb időkben többfajta módszer terjedt el. Ezeknek lényege az, hogy egyenesfogú kerek esetében a geometriai méretek alapján először is meghatározzák a kapcsolódó kerek fejkörei által meghatározott  $A$  és  $E$  határpontokkal jellemzett kapcsolóhosszt, valamint az egyfogpárkapcsolásnak az alaposztással meghatározott

$B$  és  $D$  határpontjait, továbbá a kapcsolás  $C$  főpontját (1. ábra). Ezt követően felületi igénybevétel (palástnyomás) szempontjából a  $B$  kapcsolási helyzetben, vagyis hajtó kiskerék esetében az egyfogpárkapcsolás kezdőpontjában kiszámított Hertz-féle feszültséget hasonlítják össze a Hertz-feszültség kifáradási határával, illetve ugyanezt teszik a palástnyomással. Fogtőigénybevétel szempontjából a kis kereket a  $D$  pontban — az egyfogpárkapcsolás végpontjában — támadó, a nagy kereket pedig a  $B$  pontban fellépő  $F_n = F/\cos \alpha_g$



1. ábra. Kapcsolódó fogaskerékpár lényeges kapcsolópontjai ( $A$  és  $E$  a kapcsolás határpontjai a kapcsolóvonalon,  $B$  és  $D$  az egyfogpárkapcsolás szakaszának határpontjai,  $C$  a kapcsolás főpontja)

fognyomással méretezik, a  $D$ , ill.  $B$  pontoknak megfelelő fogalaktényezőkkal. Itt  $F$  a számított kerületi erő és  $\alpha_g$  a fogaskerékpár kapcsolószöge. Berágódás szempontjából pedig vagy kiszámítják a berágódási hajlamra jellemző kontakt-hőmérsékletet a  $B$  és  $D$  kapcsolópontokban, például DUDLEY [2], ill. DUDLEY és WINTER [3] szerint, valamint összehasonlítják az olajra megadott határhőmérséklettel; vagy pedig NIEMANN [5] szerint kiszámítják a berágódás biztonsági tényezőjét a  $\overline{BC}$ , ill.  $\overline{CD}$  kapcsolószakaszokban.

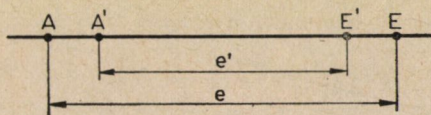
Lenyesett fejprofilú fogaskerékpároknál ez a számítási mód csak akkor helyes, ha a fogaskerékpár terhelése és fordulatszáma állandó. Vannak azonban olyan fogaskerékpárok, amelyeknek terhelése és fordulatszáma az üzemi természetéből adódóan változik. Ilyenek például a villamos erőátvitelű mozdonyszekerék lenyesett fejprofilú trakciós fogaskerekei, amelyeknek fordulatszáma az indítás pillanatától a maximális sebesség eléréséig növekszik, közben pedig az  $F_n$  fognyomás az indító vonóerőnek megfelelő értékről folytonosan csökken.



Ugyanez az eset a hidrodinamikus nyomatékvtóval működő sebességváltók turbinatengelyéről hajtott lenyesett fejprofilú fogaskerekekénél is. Ilyenfajta fogaskerekek teherbírásának számításakor a következő gondolatmenetet kell követni.

## II. Az $e$ kapcsolóhossz változása a terheléssel

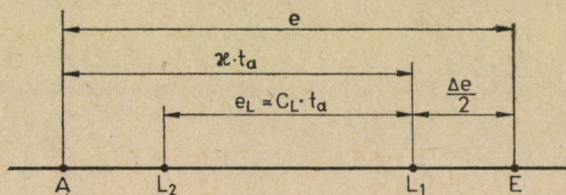
Az egymással párosított fogaskerekek kapcsolóvonalán a fejkörök által kimetszett  $e = \overline{AE}$  teljes kapcsolóhossz a fogprofilok fejrészeinek lenyesése következtében kisebb terhelésnél nem jut érvényre, hanem a terheléstől is



2. ábra. Az  $e$  kapcsolóhossz rövidülése

a lenyesés alakjától függően egy ennél kisebb  $e' = \overline{A'E'}$  kapcsolóhossz alakul ki (2. ábra). Ez a kapcsolóhossz-változás a következőképpen függ össze a lenyeséssel és a terheléssel:

A fogprofil fejlenyesése a profil  $L$  pontjából indul ki; ezt a pontot *lenyesési határpontnak* nevezzük, az  $L$  ponton átmenő kört pedig *lenyesési határkörnek*. Két kapcsolódó kerék esetén  $L_1$ -gyel jelöljük a kiskerék, és  $L_2$ -vel a nagykerék lenyesési határkörével a kapcsolóvonalon, az  $e$  kapcsolóhosszon belül kimetszett pontokat, a lenyesési pontokat. Az  $\overline{L_1 L_2} = e_L$  távolságot *lenyesett kapcsolóhossznak* nevezzük (3. ábra).



3. ábra. Az  $L_1$  és  $L_2$  lenyesési pontok a kapcsolóvonalon ( $e_L$  a lenyesett kapcsolóhossz)

A fogaskerekek lenyesését úgy számítjuk, hogy a legnagyobb fellépő  $F_{\max}$  kerületi erő hatására a fogak kapcsolódása a teljes  $e = \overline{AE}$  kapcsolóhosszra kiterjedjen. Viszont üresjárásban a kapcsolódás csak az  $e_L = \overline{L_1 L_2}$  lenyesett kapcsolóhosszon megy végbe.

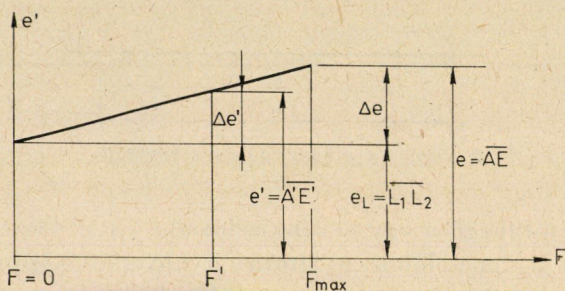
Tehát  $F = 0$  esetében  $e' = e_L = \overline{L_1 L_2}$  és  $F = F_{\max}$  esetében  $e' = e = \overline{AE} = \varepsilon \cdot t_a$ , ahol  $\varepsilon$  a kapcsolószám és  $t_a$  az alaposztás.

Annak eldöntésére, hogy  $e$  két határérték közötti terheléseknél hogyan változik az  $e' = \overline{A'E'}$  kapcsolóhossz, kísérleteket végeztünk. A fogfelületeket



vékony réteggel befestettük és megszáradni hagytuk. Azután terhelés nélkül (üresjárásban) járatuk a fogaskerékpárt. Leállítás után észleltük, hogy a lenyesetlen profilrészek kifényesedtek, viszont a lenyesett profilrészen a festék érintetlenül maradt. Ezután  $1/4$ ,  $1/2$ ,  $3/4$  és  $4/4$  terhelésekkel járatuk a hajtóművet, és minden terhelési fokozat után megállva megvizsgáltuk a festékkopás mértékét a fogakon. Ily módon azt találtuk, hogy az  $e'$  kapcsolóhossz szinte pontosan arányosan változik az  $F'$  terheléssel, azaz

$$\frac{\Delta e'}{F'} = \frac{\Delta e}{F_{\max}} \quad (1)$$



4. ábra. A kapcsolóhossz változása a terheléssel; az ábrán lineáris összefüggés látható

Hogy ez a lineáris összefüggés mennyire valósul meg valamilyen adott esetben, az természetesen a lenyesés módjától, alakjától függ.

A 4. ábrából látható, hogy lineáris kapcsolóhossz-változás esetében valamilyen  $F'$  terhelési fokozatban megváltozott kapcsolóhossz:

$$e' = \overline{A'E'} = e_L + \Delta e'.$$

Ebbe az (1) egyenlet szerinti kapcsolóhossz-változást behelyettesítve:

$$e' = e_L + \frac{F'}{F_{\max}} \cdot \Delta e.$$

Viszont a kapcsolóhossz-különbség:

$$\Delta e = \overline{AE} - \overline{L_1L_2} = e - e_L,$$

úgyhogy

$$e' = \overline{A'E'} = e_L + \frac{F'}{F_{\max}} \cdot (e - e_L). \quad (2)$$

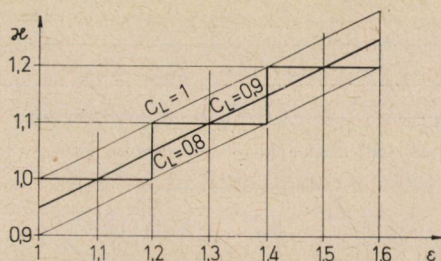
Az  $L_1$  és  $L_2$  lenyesési pontokat a kapcsolóhossz  $A$  és  $E$  határpontjaihoz képest szimmetrikusan lehet felvenni a kapcsolóvonalon, tehát  $\overline{AL_1} = \overline{L_2E}$ .



Ez a  $t_a$  alaposztással egyenlő vagy annál nagyobb. Felvehetjük pl., hogy  $\overline{AL_1} = \overline{L_2E} = \kappa \cdot t_a$  (3. ábra), ahol  $\kappa$  az  $\varepsilon = e/t_a$  kapcsolószámtól függően 1 és 1,2 közötti érték, éspedig úgy, hogy  $\varepsilon \leq 1,2$  esetében  $\kappa = 1$ ;  $1,2 < \varepsilon < 1,4$  esetében  $\kappa = 1,1$  és  $\varepsilon \geq 1,4$  esetében  $\kappa = 1,2$  legyen [4].

Eljárhatunk azonban úgy is, hogy az  $e_L = \overline{L_1L_2}$  lenyesett kapcsolóhosszt az alaposztás meghatározott hányadában vesszük fel, tehát hogy  $e_L = C_L \cdot t_a$ , ahol  $C_L = 0,8 \sim 1$  közötti érték [1].

A kétfajta módon megállapított  $\kappa$  értékeket az 5. ábrán tüntettük fel az  $\varepsilon$  kapcsolószám függvényében. A  $\kappa$  lépcsőzetes értékeivel szemben  $C_L =$  állandó értékkel ferde egyenest kapunk. A  $C_L = 0,9$  jó középértéknek látszik.



5. ábra. A lenyesett kapcsolóhossz és az  $\varepsilon$  kapcsolószám összefüggése

Ha különös súlyt helyezünk arra, hogy a fogaskerek kis terheléseknél is nyugodtan járjanak, akkor  $C_L = 1$ -et ajánlatos választani.

Az  $e_L = C_L \cdot t_a$  összefüggés bevezetésével

$$\begin{aligned} e' = \overline{A'E'} &= C_L \cdot t_a + \frac{F'}{F_{\max}} \cdot (\varepsilon \cdot t_a - C_L \cdot t_a) = \\ &= t_a \cdot \left[ C_L + \frac{F'}{F_{\max}} \cdot (\varepsilon - C_L) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

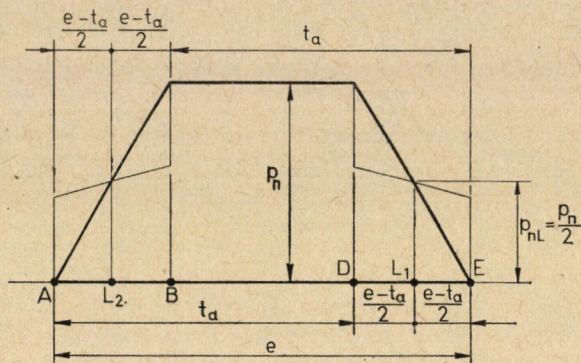
Ha tehát az egyes terhelési fokozatokban — a hozzájuk tartozó  $n'$  fordulatszámoknak megfelelően — meghatározzuk az  $F'_n$  fognyomást, illetve az  $F'$  kerületi erőt, akkor az ennek megfelelően megváltozott  $e'$  kapcsolóhosszt minden terhelési fokozatra kiszámíthatjuk.

### III. Az egyfogpárkapcsolás $\overline{BD}$ szakaszának változása a terheléssel

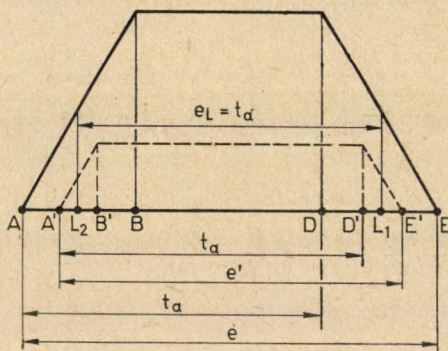
Lenyesett egyenes fogú fogakerékpárok  $b$  fogszélességének hosszegységére eső  $F_n$  fognyomás, az ún. *vonalnyomás* ( $p_n = F_n/b$ ) az egyfogpárkapcsolás  $\overline{BD}$  szakaszán belül állandó. SCHLAF vizsgálatai [6] kimutatták, hogy evolvensprofilú fogfejlenyesés esetén, ha  $C_L = 1$ , vagyis  $e_L = t_a$ , akkor a vonalnyomás



a kétfogpárkapcsolás  $\overline{AB}$  és  $\overline{DE}$  szakaszain lineárisan változik (6. ábra). Ez a változás természetesen függ a lenyesés minőségétől, valamint a lenyesett profilszakasz alakjától és méretétől. Az a feltevés, hogy a vonalnyomás válto-



6. ábra. A  $p_n$  vonalnyomás változása a kapcsolóhosszon, ha  $e_L = t_a$  és a változás lineáris



7. ábra. A  $p_n$  vonalnyomás lefolyásának összefüggése a kapcsolóhossz változásával, változó terhelésnél

zása lineáris törvényszerűséget követ, a számításban egyszerűsítést jelent. Előfeltétele a fogprofil lenyesésének helyes elkészítése.

Ha a terhelés a teljes  $e = \overline{AE}$  kapcsolóhossznak megfelelő maximális terheléshez képest csökken, az előbbieket szerint a lenyesett fogú fogaskerékpár  $e' = \overline{A'E'}$  kapcsolóhossza is csökken (2. ábra). Az  $\overline{AD} = \overline{A'D'} = \overline{BE} = \overline{B'E'} = t_a$  összefüggés miatt egyben a  $B'$  és  $D'$  pontok távolodnak egymástól. Tegyük fel, hogy a következőkben  $C_L = 1$  (7. ábra).

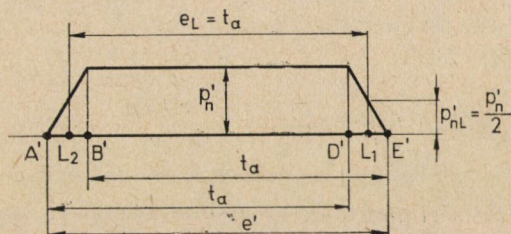
Szimmetrikus lenyesés és lineáris vonalnyomás-változás esetében az  $L_1$  és  $L_2$  lenyesési pontokban fellépő  $p_{nL}$  vonalnyomás értéke a 6. ábra alapján

$$p_{nL} = p_n \cdot \frac{\overline{AL_2}}{\overline{AB}} = p_n \cdot \frac{\overline{L_1E}}{\overline{DE}} = \frac{p_n}{2}. \quad (4)$$

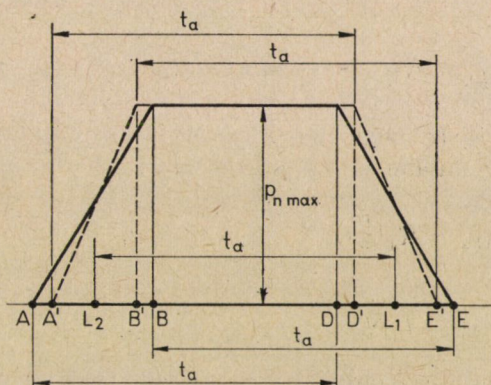
$p'_n$  vonalnyomás esetében (8. ábra) természetesen  $p'_{nL} = p'_n/2$ .



A fogaskerékpár teherbírásának számításakor a kapcsolóhossz-változást figyelembe kell venni. A berágódási teherbírást az első esetben nem elég a  $B'$  és  $D'$  pontokra megvizsgálni, hanem a számítást el kell végezni az  $L_1$  és  $L_2$  lenyesési pontokra is, mert előfordulhat, hogy habár az itt fellépő  $p_{nL}$  vonal-



8. ábra. A  $p_n$  vonalnyomás lefolyása részterhelésnél



9. ábra A  $p_n$  vonalnyomás túlságosan nagy lenyesési foghézagnál

nyomás kisebb az egyfogpárkapcsolás  $B'D'$  szakaszán fellépő teljes  $p_n$  vonalnyomásnál, itt mégis magasabb kontakt-hőmérséklet áll elő a nagyobb csúszósebesség, illetve a berágódási teherbírás szempontjából döntő  $e_{\max}$  távolságnak — a szélső kapcsolópontnak a  $C$  fő ponttól számított távolságának — nagyobb volta miatt. Az  $L_1$  és  $L_2$  lenyesési pontokban ilyenkor a fogtőigénybevétel  $S_B$  és a palástnyomás  $S_G$  biztonságát felesleges vizsgálni, mivel azok a  $p_{nL}$  csökkent értéke miatt mindig nagyobbak, mint a  $B'$ , ill. a  $D'$  pontokban.

Ha a lenyesés legnagyobb értéke a fogprofilok fejkörpontjaiban — a *lenyesési foghézag* — nagyobb, mint az  $F_{\max}$ -nak megfelelő fogdeformáció, akkor a maximális  $p_{n\max}$  vonalnyomásnál nem alakul ki a fejköri kapcsolópontoknak megfelelő teljes  $e = \overline{AE}$  kapcsolóhossz, hanem egy annál rövidebb  $\overline{A'E'}$  hossz (9. ábra). Ekkor azonban  $\overline{B'D'} > \overline{BD}$ , és a  $B'$  pontban nagyobb a Hertz-feszültség, mint a  $B$  pontban. A fogtőigénybevételek is megnőnek a  $B'$  és  $D'$  pontokban.



## IV. Görbületi sugarak a B' és D' kapcsolópontokban

A fogak felületi igénybevételénél (palástnyomásánál) fontos szerepet játszó görbületi sugarakat a kapcsolat említett jellemző pontjaiban az 1. és a 7. ábra egybevetéséből  $C_L = 1$  esetre az ismertetett összefüggések segítségével a következőképpen számíthatjuk:

A 3. ábra szerint

$$\overline{AL_1} = \overline{L_2E} = \frac{e + e_L}{2} = \frac{\varepsilon + C_L}{2} \cdot t_a = \frac{\varepsilon + 1}{2} \cdot t_a, \quad (5a)$$

tehát az  $L_1$  lenyesési pontnak megfelelő görbületi sugarak:

$$\varrho_{2L1} = \overline{L_1N_2} = \overline{AN_2} - \overline{AL_1} = \varrho_{2A} - \frac{\varepsilon + 1}{2} \cdot t_a \quad (5b)$$

és

$$\varrho_{1L1} = \overline{N_1L_1} = a \cdot \sin \alpha_g - \varrho_{2L1}, \quad (5c)$$

ahol  $a$  a fogaskerékpár tengelytávja,  $\alpha_g$  pedig a fogaskerékpár kapcsolószöge.

Ezzel analóg módon az  $L_2$  ponthoz tartozó görbületi sugarak:

$$\varrho_{1L2} = \overline{N_1L_2} = \overline{N_1E} - \overline{L_1E} = \varrho_{1E} - \frac{\varepsilon + 1}{2} \cdot t_a \quad (5d)$$

és

$$\varrho_{2L2} = \overline{L_2N_2} = a \cdot \sin \alpha_g - \varrho_{1L2}. \quad (5e)$$

Ezek a görbületi sugarak csak a fogaskerek geometriai méreteitől és a lenyesés magasságától függenek, tehát a terheléstől függetlenek. A lenyesés magasságát az említett  $C_L = 1$  felvétele már meghatározta.

E sugarakkal számítva, és figyelembe véve, hogy szimmetrikus lenyesés esetén a 7. ábra szerint

$$\overline{A'L_2} = \overline{L_1E'} = \frac{e' - e_L}{2} = \frac{\Delta e'}{2},$$

a megváltozott kapcsolóhossz jellemző pontjainak görbületi sugarai:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_{1A'} &= \varrho_{1L2} - \overline{A'L_2} = \varrho_{1L2} - \frac{\Delta e'}{2}; \\ \varrho_{1D'} &= \varrho_{1A'} + t_a, \\ \varrho_{2D'} &= a \cdot \sin \alpha_g - \varrho_{1D'}; \\ \varrho_{1E'} &= \varrho_{1L1} + \Delta e'/2; \\ \varrho_{1B'} &= \varrho_{1E'} - t_a, \\ \varrho_{2B'} &= a \cdot \sin \alpha_g - \varrho_{1B'}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

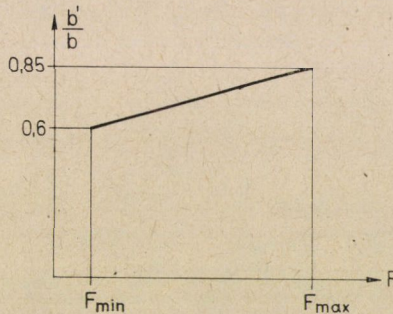


Ezek után kiszámítható minden adott vagy választott terhelési fokozatban (terhelési pontban) az  $e' = \overline{A'E'}$  megváltozott kapcsolóhossz és az ehhez tartozó megváltozott fenti görbületi sugarak számértéke. Ezeknek segítségével a szokásos szilárdsági számítások most már minden terhelési fokozatban a valóságos igénybevételt jól megközelítve végezhetők el, szemben az eddigi méretezési módszerekkel.

Megjegyezzük, hogy *ferde fogazatra* ugyanezt a méretezési módszert alkalmazhatjuk, vagyis a kapcsolóhossz változását hasonló módon figyelembe vesszük, de természetesen az egyfogpárkapcsolás *BD* szakaszával kapcsolatos részletek nélkül.

### V. Számítási példa

Az ismertetett gondolatmenetnek egy fogaskerékpár számítása során való alkalmazását számpéldán mutatjuk be. Példaként egy villamos mozdony fejlenyeséssel készített trakciós fogaskerékpárját választottuk ki, mert egyrészt e kerekeket mindig lenyesett profiláll készítik, másrészt a járművek fogaskerekei a változó igénybevételű hajtások tipikus esetei.



10. ábra. A  $b'$  működő fogszélesség és a  $b$  teljes fogszélesség viszonyának változása a terheléssel (a számpélda kidolgozásához)

A számítást NIEMANN által ismertetett [5] módszer szerint végeztük el, és pedig a következő feltételezésekkel:

a) A  $b'$  működő fogszélesség a teljes  $b$  fogszélességnél kisebb, nemcsak a kis kerék konzolos („repülő”) ágyazása miatt, hanem azért is, mert a fogaskerékpár kiskerekét a trakciós motor marokcsapágyas felfüggesztése miatt a csapágyházagokból eredő elkerülhetetlen tengelypárhuzamossági és tengelykitérési hibára való tekintettel nagyobb igénybevételek esetében domború fogazattal készítik. A domború fogazat kedvező a kis kerék tengelyének rugalmas behajlása szempontjából is.

A  $b'/b$  viszonyszám a terhelés növekedésével együtt nő a fogfelületek rugalmas belapulása miatt. A  $b'/b$  viszonyzámmak az  $F$  kerületi erőtl való függését egyszerűség kedvéért lineárisnak tételeztük fel, és pedig oly módon, hogy a jelen példa szerinti 130 mm teljes foghossz mindkét végén 1–1 mm-re leélezett homlokélek között megmaradó  $b = 128$  mm fogszélességhez viszonyítva a  $b'/b$  hányados értéke a 10. ábra szerint változik, tehát a mozdony indításakor fellépő maximális kerületi erőnél 85%-ot (kereken 109 mm-t), a mozdony maximális sebessége esetén mutatkozó minimális kerületi erőnél pedig 60%-ot (kereken 77 mm-t) tesz ki, ami gyakorlati tapasztalataink szerint megfelelő domborúság esetében körülbelül meg is felel a valóságos helyzetnek.

b) Ezzel összefüggésben a NIEMANN szerinti  $C_T$  hordképtényezőre a fennálló viszonyokra való tekintettel a

$$C_T = \frac{4}{3} \frac{b}{b'}$$

összefüggést alkalmaztuk [5; (83/1) egyenlet].

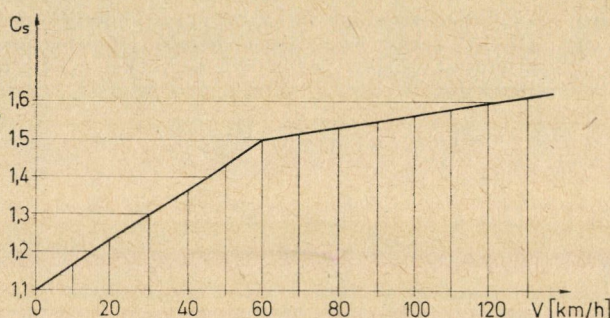


c) Feltételeztük, hogy a fogprofilok lenyesését helyesen számították és előírás szerint készítik el, úgyhogy a  $p_n$  vonalnyomás a kétfogpárkapcsolás  $AB$  (ill.  $A'B'$ ) és  $DE$  (ill.  $D'E'$ ) szakaszain lineárisan változik (6. és 7. ábra), továbbá az előbbiek szerint az  $e$  kapcsolóhossz is lineárisan változik a terheléssel, tehát az  $F$  kerületi erővel (4. ábra).

d) Az  $L_1$  és  $L_2$  lenyesési pontokat a kapcsolás  $A$  és  $E$  határpontjaihoz képest szimmetrikusan vettük fel a kapcsolóvonalon, éspedig úgy, hogy a kis terhelésnél is szükséges nyugodt járás miatt  $e_L = t_a$ .

e) Feltételeztük, hogy a részterhelésnél megrövidülő kapcsolóhossz egyenlő mértékben rövidül a belépő és a kilépő kapcsolószakaszon (tehát az  $A$  és az  $E$  pontnál), vagyis  $\overline{AA'} = \overline{E'E'}$  (2. ábra). Ebből és az előbb említett  $\overline{AL_1} = \overline{L_2E}$  feltételből következik, hogy  $\overline{A'L_2} = \overline{L_1E'}$  (7. ábra). Ez a feltételezés a kiskerék és a nagykerék profiljának eltérő görbülete miatt csak körülbelül valósul meg, de ebből különösebb számítási pontatlanság nem származik, úgyhogy gyakorlati számításokhoz alkalmazható. Tehát feltételeztük, hogy

$$\overline{A'L_2} = \overline{L_1E'} = \frac{\overline{A'E'} - \overline{L_1L_2}}{2} = \frac{e' - e_L}{2} = \frac{\Delta e'}{2}.$$



11. ábra. A  $C_S$  ütközési tényező változása a mozdonysebesség függvényében (a számpélda kidolgozásához)

f) NIEMANN számításában [5] szereplő  $C_S$  ütközési tényező a mozdony  $V$  sebességétől függ, mert a sínillesztésekből eredő dinamikus erőhatások, ütközések az áthaladás sebességével nőnek. Bizonyos sebességen túl viszont az ütközés már nem érvényesül teljes mértékben a keréktárcsák, a mozdonytengely és az arra erősített nagyfogaskerék anyagának rugalmassága miatt. Ezért a  $C_S = f(V)$  függvényt gyakorlati megfontolások alapján a 11. ábra szerint vettük fel. E függvény helyességét elméleti számításokkal nem volt módunkban ellenőrizni. Lehetséges, hogy a valóságban nem mutatkozik kifejezett töréspont a függvény két szakasza között.

A példaképpen számított egyenesfogú hengereskerékpár adatai a következők:

Tengelytáv:  $a = 495$  mm;  
 fogs számok:  $z_1 = 17$  és  $z_2 = 79$ ;  
 modul:  $m = 10$  mm;  
 alapprofil szög:  $\alpha_0 = 20^\circ$ ;  
 fejmagasságtényező:  $f'_0 = 1$ ;  
 fejhézag tényező:  $c'_0 = 0,25$  (állandó fejhézag);  
 gördülőkör sugarak:  $r_{g1} \cong 87,6562$  és  $r_{g2} \cong 407,3438$  mm;  
 fejkör sugarak:  $r_{f1} \cong 99,4850$  és  $r_{f2} \cong 413,9118$  mm;  
 kapcsolószög:  $\alpha_g \cong 24^\circ 19' 33''$ ;  
 teljes kapcsolóhossz:  $e = 38,5678$  mm;  
 lenyesett kapcsolóhossz:  $e_L = \overline{L_1L_2} = t_a = 29,5213$  mm;  
 kapcsolóhossz-különbség:  $\Delta e = e - e_L \cong 9,0464$  mm;  
 kapcsolóvonal hossza:  $\overline{N_1N_2} = a \cdot \sin \alpha_g = 203,9036$  mm;  
 $e_{1L} = \overline{N_1L_1} = 54,7845$  mm;  
 $e_{1L2} = \overline{N_1L_2} = 25,2632$  mm;  
 $e_{1C} = \overline{N_1C} = r_{g1} \cdot \sin \alpha_g = 36,1079$  mm;



profileltolástényezők:  $x_1 \cong +0,6089$  és  $x_2 \cong +1,0515$ ;  
fogalaktényezők [5; 119. ábra szerint]:  $q_{k1} \cong 2,05$  és  $q_{k2} \cong 2,02$ ;  
 $y_C = y_{wz} = 1/(\sin \alpha_g \cdot \cos \alpha_g) = 2,664$  [5; (88/1) egyenlet].

A fogaskerek anyaga BNC 35 jelű betétedzett krómnikkelacél, amelynek fogtőkfáradási határa:  $\sigma_D = \sigma_0 = 44$  kp/mm<sup>2</sup>, és a palástnyomás kifáradási határa:  $k_0 = 5$  kp/mm<sup>2</sup> [5; 120. táblázata szerint];

a fogfelületek keménysége: HRC = min. 58, tehát  $y_H = (605/650)^2 = 0,865$ , és acél—acél párosítás lévén  $y_G = 1$  [5; 121. oldal].

A fogazat pontosságát DIN 7-es fokozatra vettük fel a számításakor, és az e szerint megengedett maximális fogazási hibának megfelelően határoztuk meg a  $p_n$  és  $\varepsilon_w$  értékeit.

A fogaskerékpár kenésére SAE 140 viszkozitás-kategóriájú enyhén adalékolt kenőolajat vettünk számításba, amelynek  $M_{7est}$  berágódási nyomatékára NIEMANN ugyan nem közöl adatot [5; 122/2. táblázat], de ez az olajfajta feltehetőleg elbírja az FZG-Normaltest 9. terhelési fokozatát, amelynek  $M_{Test} = 30,8$  mkp felel meg. Ezzel számoltunk. Minthogy pedig az olaj kinematikai viszkozitása a feltételezett 70 °C üzemi hőmérsékletnél min. 73 cSt, a Niemann-féle számításnál használt, viszkozitástól függő  $y_S$ -tényező [5; 121. oldal] értékét 0,925-tel vettük számításba.

A kérdéses fogaskerékpár 6-tengelyű mozdonyba való, amelynek közepesen kopott futókerék-átmérője 1210 mm, legnagyobb sebessége:  $V_{max} = 130$  km/h, vonóerőgörbőjét a 12. ábra mutatja, és mind a 6 tengelye hajtott.

A fogaskerékpár Niemann szerinti biztonsági tényezőit összesen 10 terhelési pontra határoztuk meg. Az egyes terhelési pontokat 1-től 10-ig számoztuk. Az 1-es terhelési pont az indító vonóerőnek, az 5-ös a trakciós motor állandó nyomatékának, a 10-es a mozdony maximális sebességének felel meg.

#### I. táblázat

Számítási példa Niemann [5] módszere szerint,  
az e kapcsolóhossz rövidülésének figyelembevételével

| A terhelési pont<br>sorszáma                  | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       |
|-----------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $V$ [km/h]                                    | 0       | 7,75    | 15,5    | 22      | 29,4    |
| $Z$ [kp]                                      | 40 000  | 38 000  | 36 000  | 29 700  | 23 200  |
| $F'$ [kp]                                     | 9 901,5 | 9 406,5 | 8 911,4 | 7 351,9 | 5 742,9 |
| $e'$ [mm]                                     | 38,5678 | 38,1154 | 37,6631 | 36,2383 | 34,7682 |
| $b'$ [mm]                                     | 109     | 107,1   | 105,3   | 99,5    | 93,5    |
| $C_T$ (83/1)                                  | 1,567   | 1,593   | 1,62    | 1,715   | 1,825   |
| $C_S$ (11. ábra)                              | 1,1     | 1,155   | 1,21    | 1,25    | 1,30    |
| $\varepsilon_w$ (80/4)                        | 1,216   | 1,2125  | 1,2083  | 1,177   | 1,1424  |
| $q_{w1}$ (85/1)                               | 1,682   | 1,697   | 1,713   | 1,764   | 1,820   |
| $q_{w2}$ (85/1)                               | 1,75    | 1,755   | 1,760   | 1,794   | 1,831   |
| $B_w$ (77/2) [kp/mm <sup>2</sup> ]            | 0,76    | 0,7985  | 0,833   | 0,775   | 0,6915  |
| $S_{B1}$ (86/1)                               | 2,025   | 1,91    | 1,812   | 1,894   | 2,058   |
| $S_{B2}$ (86/2)                               | 1,948   | 1,845   | 1,764   | 1,862   | 2,044   |
| $y_s$ (88/3)                                  | 0,781   | 0,7798  | 0,779   | 0,768   | 0,7547  |
| $y_{w1}$ (88/4)                               | 3,41    | 3,416   | 3,42    | 3,47    | 3,528   |
| $y_\sigma$ (121. o.)                          | 0,7     | 0,7191  | 0,77    | 0,8255  | 0,893   |
| $k_D$ (121. o.) [kp/mm <sup>2</sup> ]         | 2,8     | 2,875   | 3,08    | 3,303   | 3,572   |
| $S_{G1}$ (89/1)                               | 0,889   | 0,8675  | 0,8895  | 1,01    | 1,204   |
| $S_{G2}$ (89/2)                               | 1,138   | 1,112   | 1,141   | 1,317   | 1,598   |
| $D'$                                          |         |         |         |         |         |
| $e_{max} (= e_{1D})$ [mm]                     | 14,1534 | 14,3796 | 14,6057 | 15,3181 | 16,0532 |
| $y_F$ (89/4)                                  | 0,1225  | 0,1292  | 0,136   | 0,1592  | 0,1887  |
| $k_{Test}$ (122. o.)<br>[kp/mm <sup>2</sup> ] | —       | —       | (~12)   | 7,5     | 4,6     |
| $S_F$ (89/6)                                  | —       | —       | ~32,7   | 18,77   | 10,88   |
| $L_1$                                         |         |         |         |         |         |
| $B_{wL}$ (77/2) [kp/mm <sup>2</sup> ]         | 0,38    | 0,3992  | 0,4165  | 0,3875  | 0,3457  |
| $S_F$ (89/6)                                  | —       | —       | ~27,5   | 18,48   | 12,69   |



| A terhelési pont<br>sorszáma          | 6                                                | 7       | 8       | 9       | 10      |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| $V$ [km/h]                            | 35                                               | 55      | 80      | 105     | 130     |
| $Z$ [kp]                              | 19 680                                           | 12 500  | 8600    | 6570    | 5350    |
| $F'$ [kp]                             | 4 871,6                                          | 3 094,2 | 2128,8  | 1626,3  | 1324,3  |
| $e'$ [mm]                             | 33,9722                                          | 32,3483 | 31,4663 | 31,0072 | 30,7312 |
| $b'$ [mm]                             | 90,25                                            | 83,6    | 80      | 78,13   | 77      |
| $C_T$ (83/1)                          | 1,89                                             | 2,04    | 2,132   | 2,182   | 2,218   |
| $C_S$ (11. ábra)                      | 1,335                                            | 1,47    | 1,535   | 1,575   | 1,615   |
| $\varepsilon_w$ (80/4)                | 1,1237                                           | 1,0848  | 1,0638  | 1,05295 | 1,0464  |
| $q_{w1}$ (85/1)                       | 1,850                                            | 1,919   | 1,960   | 1,979   | 1,990   |
| $q_{w2}$ (85/1)                       | 1,856                                            | 1,903   | 1,930   | 1,945   | 1,955   |
| $B_w$ (77/2) [kp/mm <sup>2</sup> ]    | 0,641                                            | 0,5282  | 0,4374  | 0,3775  | 0,3402  |
| $S_{B1}$ (86/1)                       | 2,182                                            | 2,550   | 3,015   | 3,464   | 3,824   |
| $S_{B2}$ (86/2)                       | 2,175                                            | 2,572   | 3,062   | 3,525   | 3,892   |
| $y_\varepsilon$ (88/3)                | 0,739                                            | 0,7333  | 0,7257  | 0,722   | 0,719   |
| $y_{w1}$ (88/4)                       | 3,605                                            | 3,632   | 3,67    | 3,69    | 3,705   |
| $y_v$ (121. o.)                       | 0,941                                            | 1,074   | 1,167   | 1,215   | 1,242   |
| $k_D$ (121. o.) [kp/mm <sup>2</sup> ] | 3,765                                            | 4,3     | 4,665   | 4,86    | 4,97    |
| $S_{G1}$ (89/1)                       | 1,34                                             | 1,843   | 2,39    | 2,869   | 3,245   |
| $S_{G2}$ (89/2)                       | 1,816                                            | 2,515   | 3,295   | 3,97    | 4,515   |
| $D'$                                  | $e_{\max} (= e_{1D'})$ [mm]                      | 16,4512 | 17,2631 | 17,9337 | 18,0717 |
|                                       | $y_F$ (89/4)                                     | 0,2038  | 0,242   | 0,2648  | 0,2847  |
|                                       | $k_{T_{est}}$ (122. o.)<br>[kp/mm <sup>2</sup> ] | 3,6     | 2,2     | 1,48    | 1,05    |
|                                       | $S_F$ (89/6)                                     | 8,51    | 5,31    | 3,945   | 3,347   |
| $L_1$                                 | $B_{wL}$ (77/2) [kp/mm <sup>2</sup> ]            | 0,3205  | 0,2641  | 0,2187  | 0,1887  |
|                                       | $S_F$ (89/6)                                     | 10,72   | 7,95    | 6,46    | 6,10    |
|                                       |                                                  |         |         |         | 5,895   |

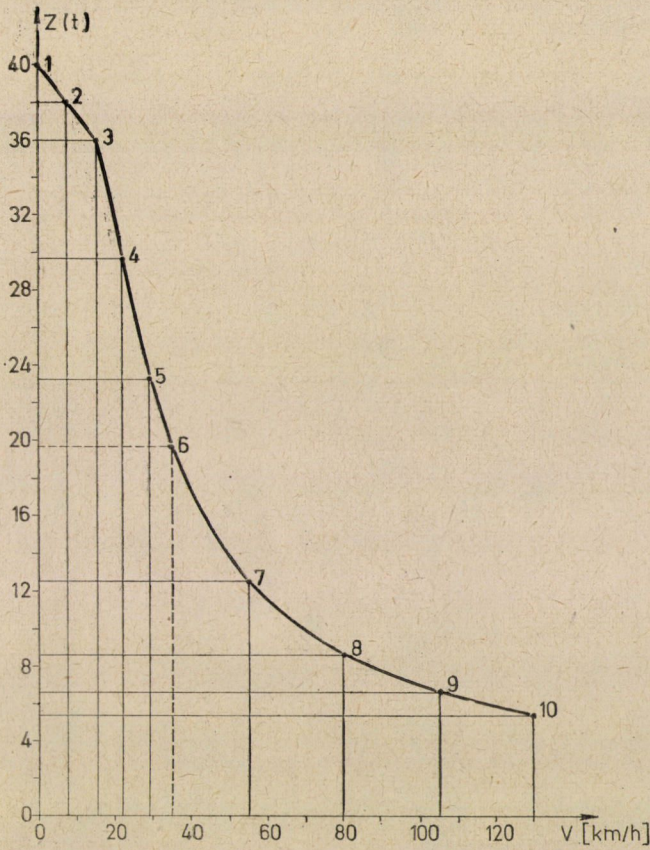
A számítás főbb eredményeit az I. táblázatban foglaltuk össze. Itt az egyes tételek könnyebb azonosíthatósága céljából NIEMANN eredeti jelöléseit alkalmaztuk. Az egyes betűjelek után zárójelben feltüntetett számok NIEMANN könyvében [5] található egyenletek számai; a törvonal előtti szám a könyv oldalszámára utal. A  $C_S$  tényező értékeit e tanulmány 11. ábrája szerint, az  $y_v$  és  $k_D$  értékeit az [5] alatti mű 121. oldala szerint, a  $k_{T_{est}}$  értékeit az [5] 122. ábrája szerint vettük. A  $B'$  és  $D'$  pontra való számítások a berágódási biztonság meghatározásához szükséges  $e_{\max}$  távolság értékei mindig a C főpont (1. ábra) és a  $D'$  pont távolságaként adódtak.

## II. táblázat

Az I. táblázat szerinti számítási példa, de változatlan e kapcsolóhosszal

| A terhelési pont<br>sorszáma | 1     | 2      | 3      | 4      | 5      |
|------------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|
| $\varepsilon_w$ (80/4)       | 1,216 | 1,2237 | 1,2316 | 1,2381 | 1,2453 |
| $q_{w2}$ (85/1)              | 1,75  | 1,741  | 1,733  | 1,726  | 1,7185 |
| $S_{B1}^*$ (86/1)            | 2,025 | 1,927  | 1,848  | 1,987  | 2,225  |
| $S_{B2}^*$ (86/2)            | 1,943 | 1,86   | 1,791  | 1,933  | 2,177  |
| $y_\varepsilon$ (88/3)       | 0,781 | 0,7842 | 0,788  | 0,7912 | 0,7951 |
| $y_{w1}$ (88/4)              | 3,41  | 3,397  | 3,38   | 3,369  | 3,35   |
| $S_{G1}^*$ (89/1)            | 0,889 | 0,872  | 0,9    | 1,04   | 1,268  |
| $D   S_F^*$ (89/6)           | —     | —      | ~36,35 | 24,4   | 16,77  |





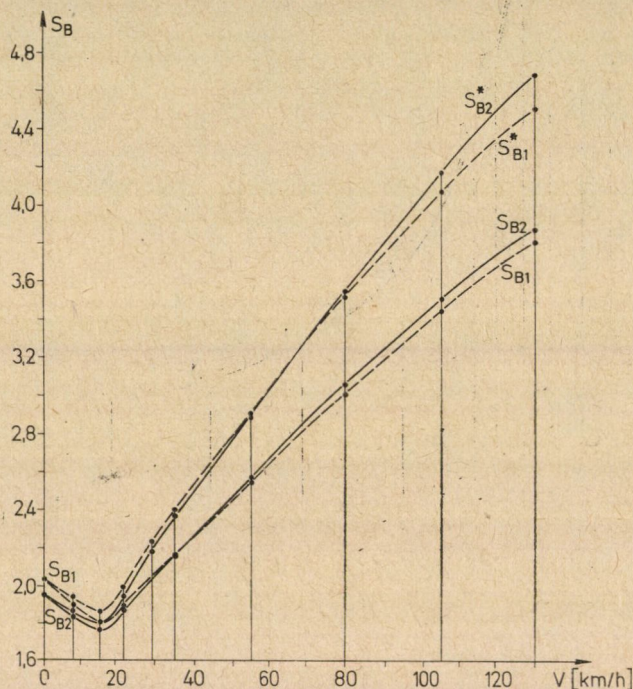
12. ábra. A példaképpen felvett mozdony vonóerőgörbéje a sebesség függvényében

| A terhelési pont<br>sorszám | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\varepsilon_{11}$ (80/4)   | 1,2512 | 1,271  | 1,2968 | 1,3223 | 1,3469 |
| $q_{112}$ (85/1)            | 1,7115 | 1,691  | 1,666  | 1,6415 | 1,6185 |
| $S_{B1}^*$ (86/1)           | 2,40   | 2,912  | 3,519  | 4,079  | 4,52   |
| $S_{B2}^*$ (86/2)           | 2,358  | 2,892  | 3,55   | 4,17   | 4,695  |
| $y_e$ (88/3)                | 0,7973 | 0,8075 | 0,8202 | 0,8325 | 0,8447 |
| $y_{v1}$ (88/4)             | 3,343  | 3,3    | 3,248  | 3,2    | 3,155  |
| $S_{G1}^*$ (89/1)           | 1,445  | 2,029  | 2,7    | 3,306  | 3,81   |
| $D   S_F^*$ (89/6)          | 14,16  | 10,5   | 8,53   | 8,05   | 7,79   |



A berágódási biztonságot a  $D'$  ponton kívül az  $L_1$  lenyesési pontra is kiszámítottuk. Itt  $e_{\max} = e_{1L1} = 18,6766$  mm, úgyhogy [5; (89/4)] egyenlet szerint  $\gamma_F = 0,3235$ , a terheléstől függetlenül. Az  $e$  pontra meghatározott  $B_w$ -értékeket és  $S_F$  biztonsági tényezőket az I. táblázat utolsó két sorában tüntettük fel (az  $e$  feletti  $S_F$ -értékek a  $D'$  pontra vonatkoznak).

Összehasonlításként meghatároztuk ugyanennek a fogaskérpárnak biztonsági tényezőit ugyanezzel a módszerrel, csupán azzal a különbséggel, hogy az  $e$  kapcsolóhossz rövidülését *nem* vettük figyelembe, tehát az általában szokásos módon számoltunk. Ekkor mindegyik terhelési pontban  $e = 38,5678$  mm. Az  $F'$ ,  $b'$ ,  $C_T$ ,  $C_S$ ,  $B_w$ ,  $\gamma_v$ ,  $k_D$ ,  $S_{G2}$ ,  $k_{Test}$  és  $B_{wL}$  értékei, valamint az  $L_1$  pontra vonatkozó  $S_F$ -értékek ugyanazok, mint az I. táblázatban.  $q_{w1} = 1,682$ , a  $B$ , ill.  $D$  pontra vonatkozólag  $e_{\max} = e_{1D} = 14,1534$  mm és  $\gamma_F = 0,1225$ , végül az  $L$  lenyesési pontokra vonatkozólag  $\gamma_F = 0,3235$  az egész sebességtartományban változatlan.



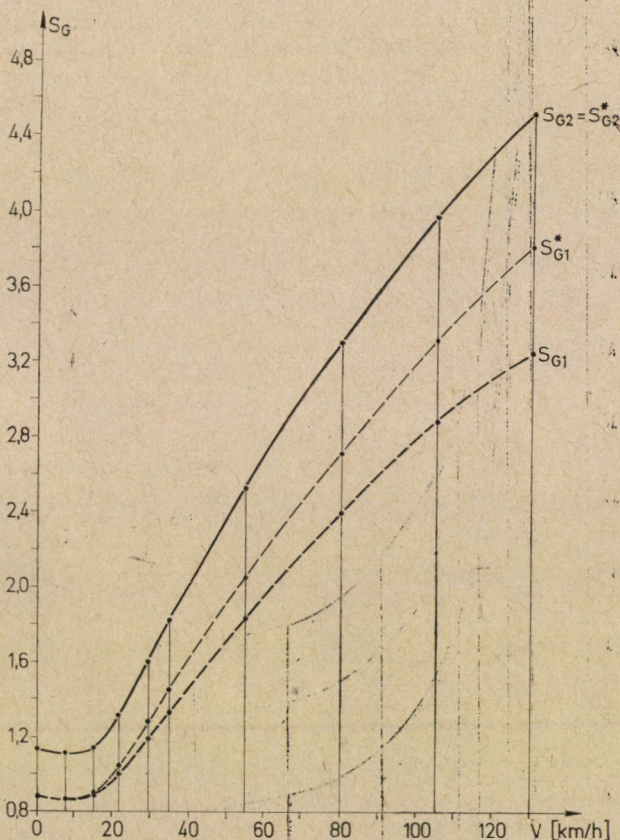
13. ábra. A példaképpen kiszámított fogaskérpár NIEMANN [5] szerint számított biztonsági tényezői fogtőigénybevételre ( $S_{B1}$  a kiskerék és  $S_{B2}$  a nagy kerék biztonsági tényezője;  $S_{B1}^*$  és  $S_{B2}^*$  a kapcsolóhossz változását figyelmen kívül hagyó szokásos számítással nyert biztonsági tényezők)

Az I. táblázathoz képest eltérő, a sebességtartományban változó értékeket a II. táblázatban tüntettük fel. Az ilyen módon kiadódó biztonsági tényezőket az I. táblázat  $S$ -értékeitől való megkülönböztetésül  $S^*$ -gal jelöltük. A II. táblázat utolsó sorában láthatók a  $D$  pontra kiszámított  $S_F$ -értékek.

Az elvégzett számítások szerint kiadódó biztonsági tényezőknek a mozdonysebesség függvényében való változását a 13., 14. és 15. ábrákon tüntettük fel: a 13. ábrán a fogtőigénybevétel  $S_B$  biztonsági tényezőjét ( $S_{B1}$  a kiskerékre és  $S_{B2}$  a nagykerékre vonatkozik), a 14. ábrán a palástnyomás  $S_G$  biztonsági tényezőjét ( $S_{G1}$  a kiskerékre és  $S_{G2}$  a nagykerékre vonatkozik), a 15. ábrán pedig a berágódás  $S_F$  biztonsági tényezőjét. Az  $e$  kapcsolóhossz változását figyelmen kívül hagyó számítás biztonsági tényezőit a II. táblázattal össz-



hangban a 13. és 14. ábrán  $S^*$ -gal jelöltük. A görbék összehasonlítása mutatja, hogy az  $e$  kapcsolóhossz változásának figyelembe vétele a számított  $S_B$  és  $S_G$  biztonsági tényezők csökkenését eredményezi, adott esetben főként a nagyobb sebességeknél, — ámbár a biztonsági tényezők a számítási példában alapul vett terhelési viszonyok esetében itt általában nagyobbak adódnak. Más terhelés-karakteristika esetében a helyzet ennél kedvezőtlenebb is lehet.

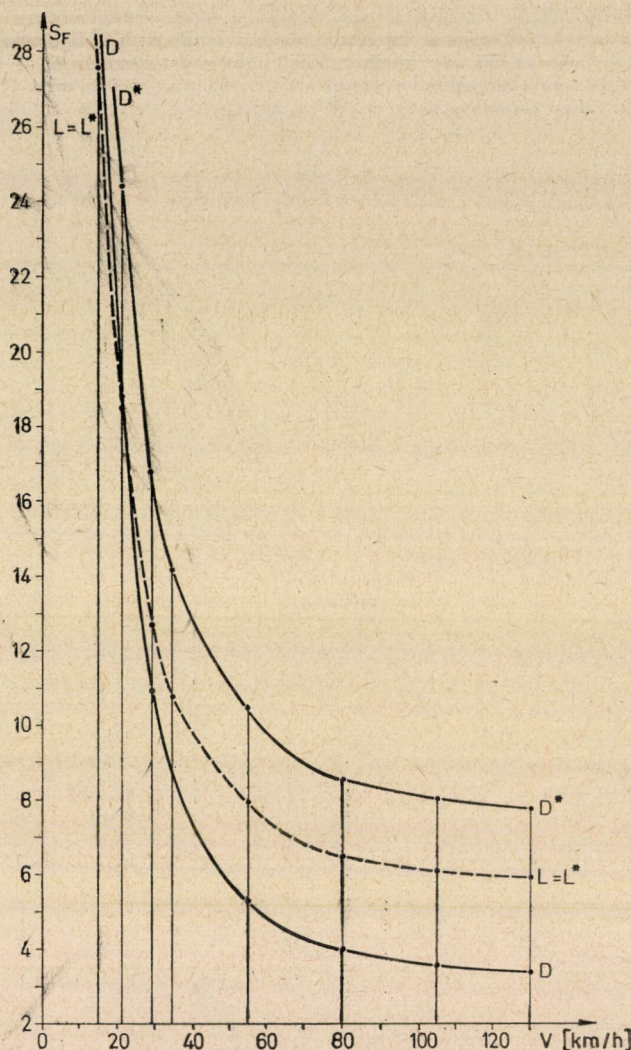


14. ábra. A példaképpen kiszámított fogaskerékpár NIEMANN [5] szerint számított biztonsági tényezői felületi igénybevételre, pontosabban palástnyomásra ( $S_{G1}$  a kiskerék és  $S_{G2}$  a nagy kerék biztonsági tényezője;  $S_{G1}^*$  és  $S_{G2}^*$  a kapcsolóhossz változását figyelmen kívül hagyó szokásos számítással nyert biztonsági tényezők)

A berágódás biztonsági tényezőjének változását mutató 15. ábrán  $D$  és  $L$  betűvel jelöltük az  $e$  kapcsolóhossz változását figyelembe vevő, az előbbieken ismertetett számításból az I. táblázat szerint a  $D'$  és az  $L_1$  pontra kiadódó  $S_F$  biztonsági tényezőket. Az  $e$  változását figyelmen kívül hagyó szokásos számítás II. táblázat szerinti  $S_F$  biztonsági tényezőinek a  $D$  pontra számított értékeit feltüntető görbét az ábrán  $D^*$ -gal jelöltük. Ez az ábra jól szemlélteti, hogy nagy sebességeknél mennyivel kisebb biztonsági tényező adódik akkor, ha a számításakor figyelembe vesszük a kapcsolóhossz változását.

Adott terhelési viszonyok között a berágódási biztonságának az  $L_1$  pontra kiszámított  $S_F$  biztonsági tényezői csak kis sebességek esetében kisebbek (tehát kedvezőtlenebbek) a  $D'$  pontra kiszámított értékeknél, — amely sebességtartományban a biztonsági tényezők amúgyis elég nagyok. Ez esetben tehát berágódás szempontjából a  $D'$  pont veszélyesebb az  $L_1$  pontnál.





15. ábra. A példaképpen kiszámított fogaskerékpár NIEMANN [5] szerint számított biztonsági tényezői berágódásra ( $D$  az egyfogpárkapcsolás  $D'$  határpontjára,  $L$  pedig az  $L_1$  lenyesési pontra számított biztonsági tényező;  $D^*$  és  $L^*$  olyan biztonsági tényezők, amelyeket a kapcsolóhossz változását figyelmen kívül hagyó számítással kapunk)

#### IRODALOM

1. BOTKA I.: Fogaskerékméretezés kiegyenlített kontakthőmérsékletre (az 1963. évi *Budapesti Fogaskerék Konferencián* elhangzott előadás). *Gép* 16 (1964), 425–430.
2. DUDLEY, D. W.: Practical Gear Design. McGraw-Hill Book Comp., New York/Toronto/London 1954.
3. DUDLEY, D. W.—WINTER, H.: Zahnräder. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961.
4. ERNEY GY.: Egyenes fogú evolvens fogazatú hengereskerékek fogfejlenyesésének számítása és ellenőrzése. *A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei* 30 (1962), 185–196.



5. NIEMANN, G.: Maschinenelemente, 2. kötet. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960.
6. SCHLAF, G.: Verbesserung der Tragfähigkeit und Laufruhe geradverzahnter Stirnräder durch Profilrücknahme. *Maschinenbautechnik* 11 (1962), 83—93.

**Berechnung von Stirnräderpaaren mit Profilrücknahme unter wechselnder Belastung.** Gegenstand der Arbeit ist ein Verfahren für die Festigkeitsberechnung von wechselnd beanspruchten Stirnrädern mit Profilrücknahme, unter Berücksichtigung der Änderung der Eingriffslänge in Abhängigkeit von der Belastung. Die praktische Anwendung der Methode wird an einem Zahnradantrieb für Bahntraktion gezeigt.

**Calculation of Spur Gear Pairs with Modified Profiles under Varying Load.** The paper presents the strength calculation of spur gear pairs with modified profiles under varying loads, taking the variation of contact length with the load into consideration. The calculation of a railway traction gear drive shows the application of the method.