NAGYTELJESÍTMÉNYŰ RENDSZEREK TORZIÓSLENGÉS VIZSGÁLATA

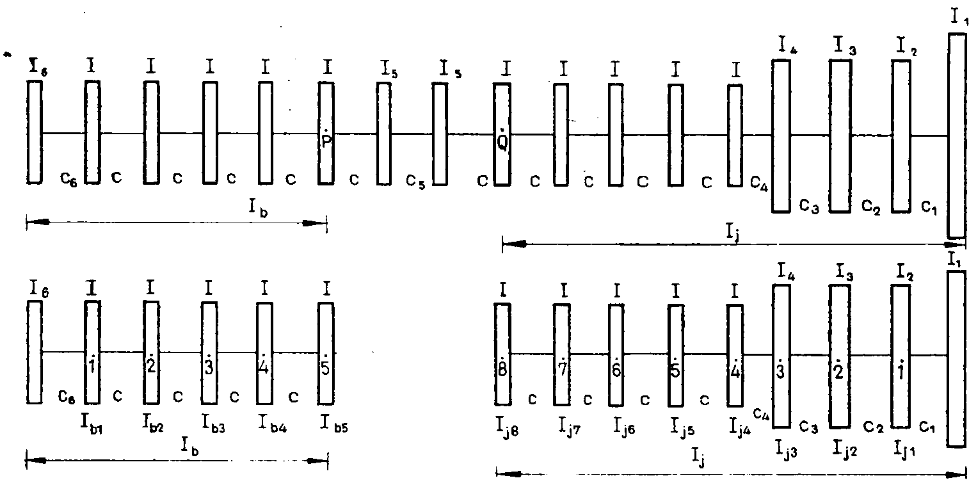
BALOGH ARTHUR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1967. május 2-án]

A szerző a tömegek tehetetlenségi nyomatékának redukción alapuló módszerét a nagyteljesítményű rendszerek torzióslengéseinek vizsgálatára alkalmazza, és ezzel kapcsolatosan olyan kifejezéseket vezet le, amelyekkel a számítás gyorsan és áttekinthetően végezhető el.

Nagy teljesítményt Diesel-motoroknál a hengerek méretének és a hengerek számának növelésével érik el. Ezzel azonban a tömegek mérete, valamint azok száma oly mértékben növekszik, hogy a kapcsolatos torzióslengés-számításoknál egyszerű és gyors eljárást kellene alkalmazni. Ilyen esetekben igen kedvező eredménnyel jár a tömegek tehetetlenségi nyomatékának redukcióján alapuló módszer alkalmazása [1], amellyel azt érhetjük el, hogy tetszőleges tömegszám esetén a rendszer számítását a 2—4-ig terjedő esetre vezethetjük vissza.

Az 1. ábrán példaképpen 17 tömegű rendszert mutatunk be, amelynél a tehetetlenségi nyomatékokat az ábrán feltüntetett P és Q jelű helyekre redukáljuk. Igy 4 tömegű rendszert kapunk, amelyre már egyszerű eszközökkel végezhetjük el a számításokat. A következőkben a tehetetlenségi nyomatékok



1. ábra

redukciójára oly kifejezéseket vezetünk le, amelyek gyorsan és áttekinthetően alkalmazhatók. Ezt számpéldán is be fogjuk bizonyítani.

A tehetetlenségi nyomatékot az 1. ábrában megadott *1* helyre redukáljuk:

$$I_{j1} = I_2 + \frac{\dot{I}_1}{1 - \frac{w^2}{c_1} I_1} . \tag{1}$$

Bevezetve az

$$s_{21} = \frac{I_2}{I_1}$$

és a

$$q_1 = \frac{w^2}{\frac{c_1}{I_1}} = \frac{w^2}{u_{11}} , \tag{2}$$

jelöléseket, az (1) alatti kifejezést a következő alakban írhatjuk fel:

$$I_{j1} = I_2 \left[1 + \frac{1}{s_{21}(1 - q)} \right] . \tag{3}$$

A redukálást ezek után a *2* megjelölésű helyre végezzük el:

$$I_{j2} = I_3 + \frac{I_{j1}}{1 - I_{j1} \frac{w^2}{c_1}} . \tag{4}$$

Behelyettesítve a (3) alatti kifejezést, rendezés után a következő összefüggést kapjuk:

$$I_{j2} = I_3 \frac{(1 - q_2 + s_{23}) [s_{21}(1 - q_1) + 1] - 1}{(1 - q_2) [s_{21}(1 - q_1) + 1] - 1} . \tag{5}$$

E kifejezésbe bevezetjük az

$$s_{23} = \frac{I_2}{I_3} , \quad q_2 = \frac{w^2}{\frac{c_2}{I_2}} = \frac{w^2}{u_{22}}$$

és az

$$s_{21}(1 - q_1) - 1 = S \tag{6}$$

jelöléseket, amelyekkel azt kapjuk, hogy

$$I_{j2} = I_3 \frac{(1 - q_2 + s_{23}) S - 1}{(1 - q_2) S - 1} . \tag{7}$$

A (7) alatti kifejezés teljes általánosságban érvényes. Abban a gyakorlati esetben, amikor $I_2 = I_3$ és $q_2 = q$ (mert $I_3 = I$) kifejezés egyszerűbb alakot ölt:

$$I_{j2} = I\frac{(2-q)S-1}{(1-q)S-1}. \tag{8}$$

Folytatólagosan végezzük tovább a tehetetlenségi nyomatékok redukcióját, mégpedig az ábrán *3*-mal jelölt helyre:

$$I_{j3} = I_4 + \frac{I_{j2}}{1 - I_{j2}\dfrac{w^2}{c_3}}. \tag{9}$$

E kifejezésbe helyettesítjük I_{j2} már levezetett értékét, a következő jelölések használata mellett:

$$s_{34} = \frac{I_3}{I_4}, \quad q_3 = \frac{w^2}{\dfrac{c_3}{I_3}} = \frac{w^2}{u_{33}}$$

és

$$(1 - q_2 + s_{23})S - 1 = T. \tag{10}$$

A helyettesítés után

$$I_{j3} = I_4\frac{(1-q_3+s_{34})[(1-q_2+s_{23})S-1] - s_{23}S}{(1-q_3)[(1-q_2+s_{23})S-1] - u_{23}S},$$

a végeredmény pedig

$$I_{j3} = I_4\frac{(1-q_3+s_{34})T - s_{23}S}{(1-q_3)T - s_{23}S}. \tag{11}$$

Abban az esetben, ha

$$I_3 = I_1, \quad s_{23} = s_{34} = 1 \quad \text{és} \quad T = (2-q)S - 1,$$

a kifejezés egyszerűbb, nevezetesen

$$I_{j3} = I\frac{(2-q)T - S}{(1-q)T - S}. \tag{12}$$

Ha a *4*-gyel jelölt helyre végezzük el a tehetetlenségi nyomaték redukcióját, akkor természetesen az eddigiekhez teljesen hasonlóan járhatunk el:

$$I_{j4} = I_5 + \frac{I_{j3}}{1 - I_{j3}\dfrac{w^2}{c_4}}. \tag{13}$$

Behelyettesítvén a már ismert I_{j3} kifejezést, az

$$s_{45} = \frac{I_4}{I_5}, \; q_4 = \frac{w^2}{\frac{c_4}{I_4}} = \frac{w^2}{u_{44}},$$

és

$$(1 - q_3 + s_{34})T - s_{23}S = Z \tag{14}$$

jelölésekkel rendezés után azt kapjuk, hogy

$$I_{j4} = I_5 \frac{(1 - q_4 + s_{45})[(1 - q_3 + s_{34})T - s_{23}S] - s_{34}T}{(1 - q_4)[(1 - q_3 + s_{34})T - s_{23}S] - s_{34}T}; \tag{15}$$

a végeredmény pedig

$$I_{j4} = I_5 \frac{(1 - q_4 + s_{45})Z - s_{34}T}{(1 - q_4)Z - s_{34}T}. \tag{16}$$

Abban az esetben, ha $I_4 = I_5$ és $s_{23} = s_{34} = 1$, akkor

$$I_{j4} = I \frac{(2 - q)Z - T}{(1 - q)Z - T}. \tag{17}$$

Ha végigtekintünk az I_{j3} és az I_{j4} kifejezések levezetésén, akkor azonnal láthatjuk, hogy a további levezetések elmaradhatnak, mert semmi újat sem szolgáltatnak. A végeredmények szerkezetileg mindig ugyanazok és a jelölések is szerkezetileg egyformák. Ezek után a végeredmény akárhány tömegre könnyűszerrel felírható.

Az I. táblázatban 11 tömeg esetére adtuk meg a végső kifejezéseket, a hozzátartozó adatokat pedig II. táblázat tartalmazza. Mindezek a teljesen általános esetre is érvényesek, amely azonban — mint ismeretes — a gyakorlatban szinte soha sem fordul elő, mert a tömegek tehetetlenségi nyomatéka és a merevségi tényezők jó része egyforma. Ez a körülmény a levezetett kifejezéseknél lényeges egyszerűsítést eredményez.

Példaképpen III. táblázatban 11 tömegre írtuk fel a végeredményeket, ha a 11 tömeg közül a független tömegek száma 1. Mint látható e kifejezések lényegesen egyszerűbbek és a számítások is gyorsan elvégezhetők a sok ismétlés miatt. A számítást ajánlatos akként vezetni, hogy a végeredményben lehetőleg legalább két tömegű rendszerhez jussunk. Ebben az esetben azonban egy 12-edik tömeg kell a feltétel teljesítéséhez.

A közölt módszer alkalmazását számpéldán mutatjuk be és e célból egy nagyobb rendszer egy jellemző részét használtuk fel. Áttekinthetőség kedvéért a táblázatos eljárást választottuk. E célból a IV. táblázatban felsoroltuk azokat

I. táblázat

$$I_{j1} = I_2 \left[1 + \frac{1}{s_{21}(1-q_1)}\right], \tag{a}$$

$$I_{j2} = I_3 \, \frac{(1-q_2+s_{23})\,S-1}{(1-q_2)\,S-1}, \tag{b}$$

$$I_{j3} = I_4 \, \frac{(1-q_3+s_{34})\,T-s_{23}\,S}{(1-q_3)\,T-s_{23}\,S}, \tag{c}$$

$$I_{j4} = I_5 \, \frac{(1-q_4+s_{45})\,Z-s_{34}\,T}{(1-q_4)\,Z-s_{34}\,T}, \tag{d}$$

$$I_{j5} = I_6 \, \frac{(1-q_5+s_{56})\,W-s_{45}\,Z}{(1-q_5)\,W-s_{45}\,Z}, \tag{e}$$

$$I_{j6} = I_7 \, \frac{(1-q_6+s_{67})\,U-s_{56}\,W}{(1-q_6)\,W-s_{56}\,W}, \tag{f}$$

$$I_{j7} = I_8 \, \frac{(1-q_7+s_{78})\,V-s_{67}\,U}{(1-q_7)\,V-s_{67}\,U}, \tag{g}$$

$$I_{j8} = I_9 \, \frac{(1-q_8+s_{89})\,X-s_{78}\,V}{(1-q_8)\,X-s_{78}\,V}, \tag{h}$$

$$I_{j9} = I_{10} \, \frac{(1-q_9+s_{9\,10})\,Y-s_{89}\,X}{(1-q_9)\,Y-s_{89}}, \tag{i}$$

$$I_{j10} = I_{11} \, \frac{(1-q_{10}+s_{10,11})\,R-s_{9,10}\,Y}{(1-q_{10})\,R-s_{9,10}\,Y}. \tag{j}$$

II. táblázat

$$S = s_{21}(1-q_1)+1 \qquad s_{21} = \frac{I_2}{I_1}, \quad q_1 = \frac{w^2}{u_{11}}, \quad u_{11} = \frac{c_1}{I_1};$$

$$T = (1-q_2+s_{23})\,S-1 \qquad s_{23} = \frac{I_2}{I_3}, \quad q_2 = \frac{w^2}{u_{22}}, \quad u_{22} = \frac{c_2}{I_2};$$

$$Z = (1-q_3+s_{34})\,T-s_{23}\,S \qquad s_{34} = \frac{I_3}{I_4}, \quad q_3 = \frac{w^2}{u_{33}}, \quad u_{33} = \frac{c_3}{I_3};$$

$$W = (1-q_4+s_{45})\,Z-s_{34}\,T \qquad s_{45} = \frac{I_4}{I_5}, \quad q_4 = \frac{w^2}{u_{44}}, \quad u_{44} = \frac{c_4}{I_4};$$

$$U = (1-q_5+s_{56})\,V-s_{45}\,Z \qquad s_{56} = \frac{I_5}{I_6}, \quad q_5 = \frac{w^2}{u_{55}}, \quad u_{55} = \frac{c_5}{I_5};$$

$$V = (1-q_6+s_{67})\,U-s_{56}\,W \qquad s_{67} = \frac{I_6}{I_7}, \quad q_6 = \frac{w^2}{u_{66}}, \quad u_{66} = \frac{c_6}{I_6};$$

$$X = (1-q_7+s_{78})\,V-s_{67}\,U \qquad s_{78} = \frac{I_7}{I_8}, \quad q_7 = \frac{w^2}{u_{77}}, \quad u_{77} = \frac{c_7}{I_7};$$

$$Y = (1-q_8+s_{89})\,X-s_{78}\,V \qquad s_{89} = \frac{I_8}{I_9}, \quad q_8 = \frac{w^2}{u_{88}}, \quad u_{88} = \frac{c_8}{I_8};$$

$$R = (1-q_9+s_{9,10})\,Y-s_{89}\,X \qquad s_{9,10} = \frac{I_9}{I_{10}}, \quad q_9 = \frac{w^2}{u_{99}}, \quad u_{99} = \frac{c_9}{I_9}.$$

III. táblázat

$$I_{j1} = I_2\left[1 + \frac{1}{s_{21}(1-q)}\right] \qquad s_{21} = \frac{I_2}{I_1},\ q_1 = \frac{w^2}{c_1/I_1} = \frac{w^2}{u_{11}},\ I_2 = I\,;$$

$$I_{j2} = I\,\frac{(2-q)\,S-1}{(1-q)\,S-1} \qquad S = s_{21}(1-q)-1,\ s_{23} = s = 1,\ q = \frac{w^2}{c/I}\,;$$

$$I_{j3} = I\,\frac{(2-q)\,T-S}{(1-q)\,T-S} \qquad T = (2-q)\,S-1;$$

$$I_{j4} = I\,\frac{(2-q)\,Z-T}{(1-q)\,Z-T} \qquad Z = (2-q)\,Z-T\,;$$

$$I_{j5} = I\,\frac{(2-q)\,W-Z}{(1-q)\,W-Z} \qquad W = (2-q)\,Z-T;$$

$$I_{j6} = I\,\frac{(2-q)\,U-W}{(1-q)\,U-W} \qquad U = (2-q)\,W-Z;$$

$$I_{j7} = I\,\frac{(2-q)\,V-U}{(1-q)\,V-U} \qquad V = (2-q)\,U-W;$$

$$I_{j8} = I\,\frac{(2-q)\,X-V}{(1-q)\,X-V} \qquad X = (2-q)\,V-U;$$

$$I_{j9} = I\,\frac{(2-q)\,Y-X}{(1-q)\,Y-X} \qquad Y = (2-q)\,X-V;$$

$$I_{j10} = I\,\frac{(2-q)\,R-Y}{(1-q)\,R-Y} \qquad R = (2-q)\,Y-X.$$

IV. táblázat

$w^2 = 155{,}25$

I	$\frac{c}{10^6}$	$u = \frac{c}{I}$	$q = \frac{w^2}{u}$	$1-q$	s
47,8	0,2392	$5{,}4 \cdot 10^2$	0,0308	0,9692	0,409
19,56	0,2436	$124 \cdot 10^2$	0,0125	0,9875	1,12
17,32	0,2726	$157 \cdot 10^2$	0,098	0,9902	0,91
19	0,085	$44{,}7 \cdot 10^2$	0,0347	0,9653	1,95
9,673	0,2778	$286 \cdot 10^2$	0,0054	0,9945	1
9,673	0,2778	$286 \cdot 10^2$	0,0054	0,9945	1

az elemeket, amelyekre a további számítások során szükség van. Ezeket az elemeket egyszerű eljárással lehet megállapítani. Ismeretükben állítottuk össze az V. táblázatot az előzőkben levezetett kifejezések segítségével és az egyes helyekre kiszámítottuk a redukált tehetetlenségi nyomatékokat. Az eredmények helyesek, azokat más eljárással is ellenőriztük. Ezzel tehát bemutattuk módszerünk gyakorlati alkalmazását, megjegyezve, hogy a számítás közben oly jelenségek is mutatkoznak, amellyel a számítás menetét lényegesen meg lehet rövidíteni.

V. táblázat

$(1-q_1)s_{21} = 0,396$		$1 + \dfrac{1}{(1-q_1)\,s_{21}} = 3,52$	$S = s_{21}(1-q_1)+1 = 1,396$	$I_{j1} = 19,56 \cdot 3,52 = 68,85$
$(1-q_2)s = 1,378$	$s_{23}S = 1,563$	$(1-q_2)S - 1 = 0,378$	$T=(1-q_2+s_{23})S-1 = 1,948$	$I_{j2} = 17,32 \cdot 5,130 = 88,86$
$(1-q_3)T = 1,918$	$s_{34}T = 1,083$	$(1-q_3)T - s_{23}S = 0,358$	$Z=(1-q_3+s_{34})T-s_{23}S = 2,16$	$I_{j3} = 19 \cdot 6,03 = 114,6$
$(1-q_4)Z = 2,085$	$s_{45}Z = 4,069$	$(1-q_4)Z - s_{34}T = 0,285$	$W=(1-q_4+s_{45})Z-s_{34}T = 4,353$	$I_{j4} = 9,67 \cdot 1,54 = 149$
$(1-q_5)W = 4,191$	$s_{56}W = 4,191$	$(1-q_5)W - s_{45}Z = 0,261$	$U=(1-q_5+s_{56})W-s_{45}Z = 4,624$	$I_{j5} = 9,67 \cdot 17,7 = 171$

IRODALOM

1. BALOGH ARTHUR: Torzióslengéseknél keletkező tehetetlenségi nyomatékok redukciója. *MTA VI. Oszt. Közl.* **33** (1962), 65–84.
2. BALOGH ARTHUR: Fogaskerékhajtásos berendezések torzióslengés önlengésszámainak meghatározása. *MTA VI. Oszt. Közl.* **33** (1964), 151–176.

Investigation of the Torsional Vibrations of High-Duty Systems. The examination o. torsional vibrations in high-duty systems is based on the reduction of the inertia moments o the masses. The derived expressions are suitable to make calculations quick and easy to survey

Untersuchung der Torsionsschwingungen in Hochleislungstytemen. Zur Untersuchung von Torsionsschwingungen in Hochleistungssystemen wird die Methode der Reduktion der Trägheitsmomente der Massen herangezogen. Die abgeleiteten Formeln ermöglichen ein rasche und übersichtliche Berechnung.