NÉHÁNY MEGJEGYZÉS AZ INVERZ LEÍRÓ-FÜGGVÉNY FELADATHOZ

CSÁKI FRIGYES
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA LEVELEZŐ TAGJA
és
KOVÁCS TIVADAR

[Beérkezett 1968. július 25-én]

A szerzők az inverz feladat megoldására új kifejezések alkalmazását javasolják. Ezeknek a felhasználását példán is bemutatják. A példa azt is illusztrálja, hogy az új kifejezések alkalmazása megkönnyítheti a számítási munkát.

I. Bevezetés

Mint ismeretes [1—3] az inverz leíró-függvény feladat megoldása során speciális elsőfajú volterra-féle integrálegyenleteket kell megoldanunk. A következőkben bemutatjuk, hogy az integrálegyenletek megoldására M. SOUPLINE [4, 5] képlete is felhasználható, és sokszor még egyszerűbben vezet célhoz mint az eddig ismert eljárások.

A javasolt eljárás az [1—3]-ban megadottól eltérő, de természetesen azonos végeredményre vezet. A két eljárás összehasonlítására azonos példára alkalmaztuk őket. A bemutatott példa azt is igazolja, hogy az általunk javasolt eljárás sokszor valóban egyszerűbb számítást eredményez.

II. Analitikus megoldás

A frekvenciafüggetlen kétértékű szimmetrikus nemlinearitást

$$y = \varphi(x) \tag{1}$$

alakban adjuk meg. A $\varphi(x)$ szakaszonként folytonos függvény két egyértékű ugyancsak szakaszosan folytonos függvénnyel helyettesíthető:

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{ha} \quad \dot{x} < 0\,; \\ \varphi_2(x), & \text{ha} \quad \dot{x} > 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

Ha az (1) egyenletekben x helyébe $E \cos \alpha$-t helyettesítünk (ahol $\alpha = \omega t$), akkor $y(x)$ 2π szerint periodikus lesz. Feltéve, hogy ez az intervallum olyan végesszámú részintervallumokra bontható, amelyek mindegyikében $y(\alpha)$ folytonos és monoton, akkor $y(\alpha)$ Fourier-sorba fejthető:

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= M(E) + g_1(E)E \cos \alpha + g_2(E)E \cos 2\alpha + \dots \\ &\dots = b_1(E)E \sin \alpha + b_2(E)E \sin 2\alpha + \dots, \end{aligned} \tag{3}$$

ahol a $g_1(E)$, $b_1(E)$ és $M(E)$ a megfelelő Fourier együtthatók

$$
\begin{aligned}
g_1(E) &= \frac{1}{\pi E}\int_0^{2\pi} \varphi(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha\,,\\
b_1(E) &= \frac{1}{\pi E}\int_0^{2\pi} \varphi(E\cos\alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha,\\
M(E) &= \frac{1}{2\pi E}\int_0^{2\pi} \varphi(E\cos\alpha)\cdot d\alpha\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Ha a $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ egyértékű függvényeket felírjuk egy páros és egy páratlan függvény összegeként

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= p_1(x) + q_1(x),\\
\varphi_2(x) &= p_2(x) + q_2(x)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

egyenleteket kapjuk, ahol

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= p_1(-x),\\
p_2(x) &= p_2(-x);\\
&\text{és}\\
q_1(x) &= -q_1(-x),\\
q_2(x) &= -q_2(-x).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Felhasználva a *Függelékben* levezetett módon a

$$
\begin{aligned}
P(x) &= p_1(x) - p_2(x),\\
Q(x) &= q_1(x) + q_2(x);\\
P^*(x) &= p_1(x) + p_2(x),\\
Q^*(x) &= q_1(x) - q_2(x)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

összefüggéseket (ahol általában $Q^*(x) = 0$), valamint a rövidség kedvéért $g_1(E)$-nél és $b_1(E)$-nél elhagyva az indexeket, a következő összefüggésekhez jutunk:

$$
\begin{aligned}
g(E) &= \frac{2}{\pi E}\int_0^{\pi/2} Q(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha\,,\\
b(E) &= \frac{2}{\pi E}\int_0^{\pi/2} P(E\cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha\,,\\
M(E) &= \frac{1}{\pi E}\int_0^{\pi/2} P^*\,(E\cos\alpha)\, d\alpha\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Ha most visszatérünk az eredeti $x = E \cos \alpha$ változóhoz, akkor a (8) integrálok a következő alakra hozhatók:

$$g(E) = \frac{2}{\pi E^2} \int_0^E \frac{xQ(x)}{\sqrt{E^2 - x^2}} dx ,$$

$$b(E) = \frac{2}{\pi E^2} \int_0^E P(x) \cdot dx , \tag{9}$$

$$M(E) = \frac{1}{\pi E} \int_0^E \frac{P^*(x)}{\sqrt{E^2 - x^2}} dx .$$

A most már csupa egyértékű függvényeket tartalmazó integrálegyenletek megoldása [1—3] szerint:

$$Q(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \frac{z^3 g(z)}{\sqrt{x^2 - z^2}} dz \right],$$

$$P(x) = \frac{\pi}{2} \frac{d}{dx} \left[x^2 \cdot b(x) \right], \tag{10}$$

$$P^*(x) = 2 \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \frac{z^2 M(z)}{\sqrt{x^2 - z^2}} dz \right].$$

M. SOUPLINE [4, 5] (kissé más jelölésekkel) az

$$\int_0^E (E^p - x^p)^\alpha \psi(x) \cdot dx = f(E) \quad (-1 < \alpha < 0, \quad p \neq 0) \tag{11}$$

alakú integrálegyenletekre —feltéve, hogy $f(E)$ folytonosan differenciálható — a

$$\Psi(x) = \frac{-p \sin \alpha\pi}{\pi} x^{p-1} \left[f(0) + \int_0^x (x^p - u^p)^{-1-\alpha} f'(u) \cdot du \right] \tag{12}$$

megoldást találta.

Alkalmazzuk az általa talált eredményt a (9) egyenletekre. Ha a jelöléseket megtartjuk változatlannak és $Q(x)$-re, ill. $P^*(x)$-re $p = 2$ és $\alpha = -{}^1/_2$ mellett a

$$f(E) = \frac{\pi E^2}{2} g(E) ,$$

$$\psi(x) = xQ(x) ;$$

illetve

$$f(E) = \pi EM(E),$$

$$\varphi(x) = P^*(x)$$

helyettesítéseket alkalmazzuk, akkor

$$xQ(x) = \frac{2}{\pi} x \left\{ 0 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - u^2}} \left[\frac{d}{dE} \frac{\pi E^2 g(E)}{2} \right]_{E=u} \cdot du \right\} =$$

$$= x \int_0^x \frac{\frac{d}{du}[u^2 g(u)]}{\sqrt{x^2 - u^2}} du ,$$

illetve

$$P^*(x) = \frac{2}{\pi} x \left\{ 0 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - u^2}} \frac{d}{dE} [\pi E M(E)]_{E=u} du \right\} .$$

Minthogy $P(x)$-re a megoldás közvetlenül adódik, írhatjuk:

$$Q(x) = \int_0^x \frac{\frac{d}{du}[u^2 g(u)]}{\sqrt{x^2 - u^2}} du ,$$

$$P(x) = \frac{\pi}{2} \frac{d}{dx} [x^2 b(x)] , \tag{13}$$

$$P^*(x) = 2x \int_0^x \frac{\frac{d}{du}[u M(u)]}{\sqrt{x^2 - u^2}} du .$$

A (13) összefüggésből közvetlenül belátható, hogy $Q(x)$, $P(x)$ és $P^*(x)$-re megadott függvénytranszformációk nem egyértelműek. Ugyanis $g(u) + C/u^2$, $b(x) + C/x^2$ és $M(u) + C/u$ alakú függvényekhez rendre ugyanaz a $Q(x)$, $P(x)$ és $P^*(x)$ tartozik. Itt C-vel tetszőleges konstanst jelöltünk. Az újonnan javasolt (13) képletcsoport sokszor egyszerűbben vezet célhoz, mint a (10) képletcsoport. (A középső egyenletek persze azonosak.)

III. Példa az alkalmazásra

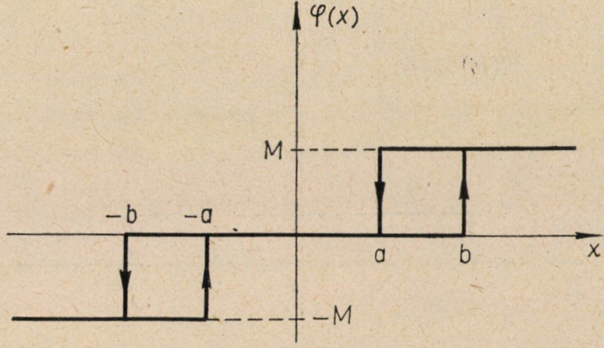
Induljunk ki az 1. ábrán felrajzolt kétállású relé-jelleggörbéből. Az egyértékű $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ függvények könnyen megállapíthatók (2. és 3. ábra). A $p_1(x)$ és $q_1(x)$ függvények a 4. és 5. ábrán láthatók. Most

$$p_2(x) = -p_1(x),$$

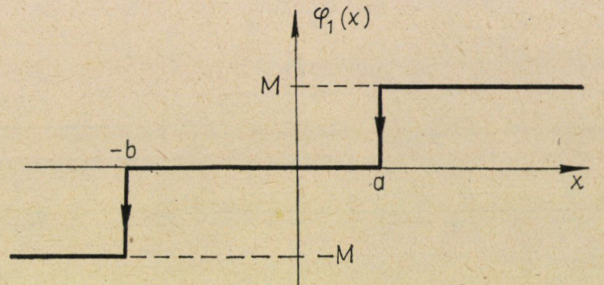
$$q_2(x) = q_1(x). \tag{14}$$

Ezzel a (7) egyenletekből

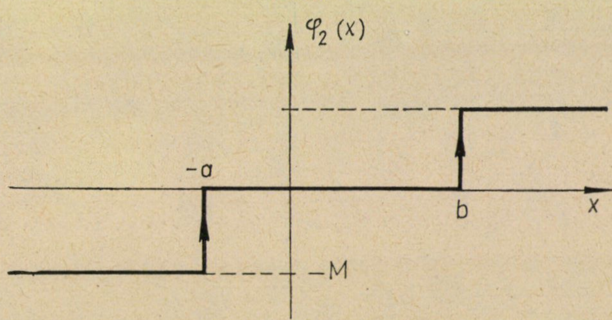
$$\begin{aligned} P^*(x) &= 0, \\ Q^*(x) &= 0; \\ P(x) &= 2p_1(x) = 2p(x), \\ Q(x) &= 2q_1(x) = 2q(x). \end{aligned} \tag{15}$$



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A (2) felhasználásával a (9)-ből egyrészt

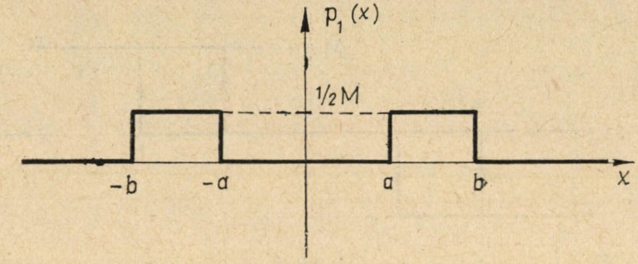
$$\begin{aligned} g(E) &= 0, \\ b(E) &= 0, \qquad 0 \leqq E \leqq a \\ M(E) &= 0; \end{aligned} \tag{16}$$

másrészt

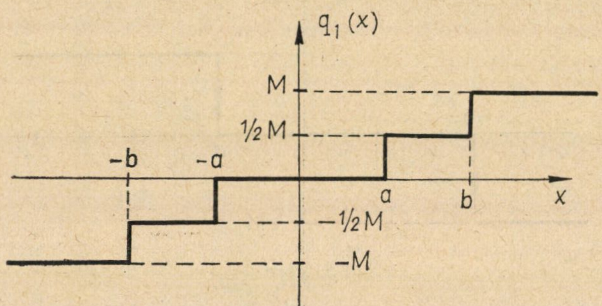
$$g(E) = \frac{2M}{\pi E^2} \int_0^E \frac{x\,dx}{a(E^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{2M}{\pi E^2} \sqrt{E^2 - a^2},$$

$$b(E) = \frac{2M}{\pi E^2}(E - a), \qquad a \leqq E \leqq b \tag{17}$$

$$M(E) = 0;$$



4. ábra



5. ábra

végül

$$g(E) = \frac{2}{\pi E^2}\left[M \int_a^b \frac{x\,dx}{(E^2 - x^2)^{1/2}} + 2M \int_b^E \frac{x\,dx}{(E^2 - x^2)^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{2\,M}{\pi E^2}\left(\sqrt{E^2 - a^2} + \sqrt{E^2 - b^2}\right),$$

$$b(E) = \frac{2M}{\pi E^2}(b - a), \qquad E \geqq b \tag{18}$$

$$M(E) = 0$$

egyenleteket nyerjük. Ha most az inverz leíró-függvény módszer alapján ezekből a komponensekből szándékozunk a nemlinearitást leíró jelleggörbét meghatározni, akkor a (10) vagy (13) összefüggéseket használhatjuk fel. Alkalmazzuk először a (10) egyenleteket [1—3]:

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &= 0, \\ P(x) &= 0, \\ P^*(x) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad 0 < x < a \tag{19}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{2M}{\pi}\int_a^x \frac{z\sqrt{z^2-a^2}}{\sqrt{x^2-z^2}}\,dz\right] = \\ &= \frac{2M}{\pi x}\frac{d}{dx}\left[-\frac{\sqrt{x^2-z^2}\sqrt{z^2-a^2}}{z} - \frac{x^2-a^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x^2-z^2}{x^2-a^2}}\right]_a^x = \\ &= \frac{2M}{\pi x}\frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{4}(x^2-a^2)\right] = M, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{2M}{\pi}\frac{d}{dx}(x-a) = M, \\ P^*(x) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad a < x < b \tag{20}$$

és

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{2M}{\pi}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\int_a^b \frac{z\sqrt{z^2-a^2}}{\sqrt{x^2-z^2}}\,dz + \int_b^x \frac{z\sqrt{z^2-a^2}}{\sqrt{x^2-z^2}} + \right. \\ &\left. + \int_b^x \frac{z\sqrt{z^2-b^2}}{\sqrt{x^2-z^2}}\,dz\right) = \\ &= \frac{2M}{\pi}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-a^2}{4}\pi + \frac{x^2-a^2}{4}\pi\right) = \\ &= \frac{M}{x}\frac{d}{dx}(x^2-a^2) = 2M, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{2M}{\pi}\frac{d}{dx}(b-a) = 0, \\ P^*(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad x > b \tag{21}$$

Most végezzük el a számítást a javasolt új eljárással, vagyis a (13) képletek felhasználásával:

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &= 0, \\ P(x) &= 0, \\ P^*(x) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad 0 < x < a \tag{22}$$

valamint

$$Q(x) = \int_a^x \frac{d}{du}\left[u^2 \frac{2M}{u}(u^2 - a^2)^{1/2}\right](x^2 - u^2)^{-1/2}\,du =$$

$$= \frac{2M}{\pi}\int_a^x \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}\sqrt{x^2 - u^2}}\,du = \frac{2M}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{u^2 - a^2}{x^2 - u^2}}\Bigg|_a^x = M\,,$$

$$\begin{aligned} P(x) &= M, & a < x < b \qquad (23)\\ P^*(x) &= 0; \end{aligned}$$

és

$$Q(x) = \int_a^b \frac{d}{du}\left[u^2(u^2 - a^2)^{1/2}\right](x^2 - u^2)^{-1/2}\cdot du +$$

$$+ \int_b^x \frac{d}{du}\left[u^2 \frac{2M}{\pi u^2}(u^2 - a^2)^{1/2}\right](x^2 - u^2)^{-1/2}\cdot du +$$

$$+ \int_b^x \frac{d}{du}\left[u^2 \frac{2M}{\pi u^2}(u^2 - b^2)^{1/2}\right](x^2 - u^2)^{-1/2}\cdot du =$$

$$= \frac{2M}{\pi}\left(\arctan\sqrt{\frac{u^2 - a^2}{x^2 - u^2}}\Bigg|_a^b + \arctan\sqrt{\frac{u^2 - a^2}{x^2 - u^2}}\Bigg|_b^x + \right.$$

$$\left. + \arctan\sqrt{\frac{u^2 - b^2}{x^2 - u^2}}\Bigg|_b^x\right) = \frac{2M}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2M\,,$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 0, & x > b \qquad (24)\\ P^*(x) &= 0. \end{aligned}$$

A (19)—(21) és a (22)—(24) egyenletek eredményei teljes megegyezésben vannak.*

Az így megkapott $Q(x)$, $P(x)$ és $P^*(x)$ komponensekből $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$ és $q_2(x)$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{2}[P(x) + P^*(x)]\,,\\ p_2(x) &= \frac{1}{2}[P^*(x) - P(x)]\,;\\ q_1(x) &= \frac{1}{2}[Q(x) + Q^*(x)],\\ q_2(x) &= \frac{1}{2}[Q(x) - Q^*(x)] \end{aligned} \qquad (25)$$

sorra megkaphatók.

* A vizsgált példában a (23) és (24) végeredmény integráltáblázatok pl. [6] felhasználásával közvetlenül leolvasható, míg a (20) és (21) megállapításához helyettesítéses integrálok kiszámítása szükséges.

Most

$$p_1(x) = -p_2(x),$$
$$q_1(x) = q_2(x);$$

mivel pedig $P^*(x) = 0$, és $Q^*(x) = 0$. A (22)—(24) végeredményeket figyelembe véve:

$$\left.\begin{aligned} p_1(x) &= -p_2(x) = 0, \\ q_1(x) &= q_2(x) = 0; \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < a$$

$$\left.\begin{aligned} p_1(x) &= -p_2(x) = \frac{1}{2} M, \\ q_1(x) &= q_2(x) = \frac{1}{2} M; \end{aligned}\right\} \quad a < x < b$$

$$\left.\begin{aligned} p_1(x) &= -p_2(x) = 0, \\ q_1(x) &= q_2(x) = M. \end{aligned}\right\} \quad x > b$$

Ezekkel visszafelé haladva az 5, 4, 3, 2. ábrákon visszakapjuk az 1. (kiindulási) ábrát. Az inverz feladatot tehát megoldottuk.

FÜGGELÉK

A (8) igazolásához induljunk ki a (4)-ből. Hagyjuk el az indexeket és vegyük figyelembe, hogy a $(0, \pi)$ intervallumban $\dot{x} > 0$.

Ekkor

$$\begin{aligned} g(E) &= \frac{1}{\pi E}\left[\int_0^\pi \varphi_1(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha + \int_\pi^{2\pi}\varphi_2(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha\right], \\ b(E) &= \frac{1}{\pi E}\left[\int_0^\pi \varphi_1(E\cos\alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha + \int_\pi^{2\pi}\varphi_2(E\cos\alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha\right] \qquad (1^*) \\ M(E) &= \frac{1}{\pi E}\left[\int_0^\pi \varphi_1(E\cos\alpha)\,d\alpha + \int_\pi^{2\pi}\varphi_2(E\cos\alpha)\,d\alpha\right]. \end{aligned}$$

A (5) és (6) összefüggések alkalmazásával, valamint

$$\alpha = \beta + \pi \qquad (2^*)$$

helyettesítéssel minden π-től 2π határú integrálnál, kapjuk:

$$\begin{aligned} g(E) = \frac{1}{\pi E}\Big\{&\int_0^\pi p_1(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha + \int_0^\pi p_2[E\cos(\beta+\pi)]\cos(\beta+\pi)\,d\beta + \\ &+ \int_0^\pi q_1(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha + \int_0^\pi q_2[E\cos(\beta+\pi)]\cos(\beta+\pi)\cdot d\beta\Big\}, \end{aligned}$$

$$b(E) = -\frac{1}{\pi E}\Big\{\int_0^\pi p_1(E\cos\alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha + \int_0^\pi p_2[E\cos(\beta+\pi)]\sin(\beta+\pi)\,d\beta +$$

$$+\int_0^\pi q_1(E\cos\alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha+\int_0^\pi q_2\left[E\cos(\beta+\pi)\right]\sin(\beta+\pi)\,d\beta\Big\}\,, \tag{3*}$$

$$M(E)=\frac{1}{2\pi E}\left\{\int_0^\pi p_1(E\cos\alpha)\,d\alpha+\int_0^\pi p_2\left[E\cos(\beta+\pi)\right]d\beta+\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi q_1(E\cos\alpha)\,d\alpha+\int_0^\pi q_2\left[E\cos(\beta+\pi)\right]d\beta\right\};$$

de

$$\cos(\beta+\pi)=-\cos\beta \tag{4*}$$

és

$$\sin(\beta+\pi)=-\sin\beta.$$

A $P(x)$, $P^*(x)$, $Q(x)$ és $Q^*(x)$-et definiálja a (7) egyenlet.

Így

$$g(E)=\frac{1}{\pi E}\left[\int_0^\pi P(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha+\int_0^\pi Q(E\cos\alpha)\cos\alpha\cdot d\alpha\right],$$

$$b(E)=-\frac{1}{\pi E}\left[\int_0^\pi P(E\cos\alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha+\int_0^\pi Q(E\cos\alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha\right], \tag{5*}$$

$$M(E)=\frac{1}{2\pi E}\left[\int_0^\pi P^*(E\cos\alpha)\,d\alpha+\int_0^\pi Q^*(E\cos\alpha)\,d\alpha\right].$$

Ha a (5*) egyenletekben a $(0, \pi)$ intervallumot $(0, \pi/2)$ és $(\pi/2, \pi)$ részekre osztjuk és a $(\pi/2, \pi)$ határok közötti integrálokban

$$\alpha=\pi-\beta \tag{6*}$$

változócserét hajtunk végre, akkor

$$\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta. \tag{7*}$$

$$\sin(\pi-\beta)=\sin\beta.$$

összefüggésekkel, valamint figyelembe véve, hogy $P(x)$, $P^*(x)$ páros $Q(x)$ és $Q^*(x)$ páratlan függvények, jutunk el a (8) egyenletekhez.

IRODALOM

1. Gibson, J. E. et al.: Describing Function Inversion: Theory and Computational Techniques. *Technical Report TR-EE* 62–10.
2. Gibson, J. E.: Nonlineare Automatic Control. McGraw-Hill 1963.
3. Csáki, F.: Szabályozások dinamikája. Nemlineáris és változó paraméterű rendszerek (sajtó alatt).
4. Soupline, M.: Resolution des equations integrales du type d'Abel. *Acad. Sc. URSS Ucraine Inst. Math.* (Rec. Trav. Inst. math.) **3** (1940), 113–131.
5. Schmeidler, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Akademische Verlaggesellschaft, Geest et Portig K. G.: Leipzig 1950.
6. Gröbner, W.–Hofreiter, N.: Integraltafel. Springer-Verlag, Wien 1961.

Bemerkungen zur Aufgabe der inversen Beschreibungsfunktion. Die Verfasser schlagen die Anwendung von neuen Formeln für die Lösung der Aufgabe der inversen Beschreibungsfunktion vor. Die Anwendung der Methode wird auch an einem Beispiel vorgeführt. Das Beispiel zeigt, daß die Anwendung der neuen Gleichung die Rechenarbeit erleichtert.

Some Remarks on the Inverse Describing Functions. The authors suggest the application of a new kind of formulae for the solution of an inverse describing function problem. The use of the method is illustrated by an example, too. The example demonstrates that the application of the new relation simplifies the work of compution.