SZABÁLYOS HÁROMSZÖGALAPRAJZÚ FORGÁSPARABOLOIDHÉJ KÖZÉPEN KÖR ALAKÚ FELÜLVILÁGÍTÓ NYÍLÁSSAL

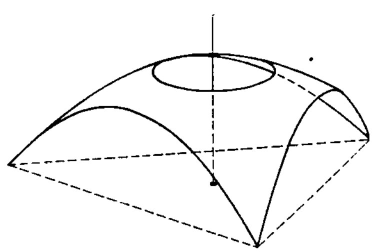
CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉKI MUNKAKÖZÖSSÉG, BUDAPEST

[Beérkezett 1968. dec.]

A tanulmány a címbeli feladatot a membránelmélet szokásos feltevéseinek a keretében tárgyalja. A feladat megoldása során a felülvilágító nyílás nélküli héj feszültségfüggvényéből indul ki. Ezt a függvényt egy háromtagú harmonikus függvénnyel egészíti ki. Utóbbinak ismeretlen együtthatóit úgy állapítja meg, hogy a belső kontúr mentén a függélyes erőalkotókra vonatkozó egyensúlyi feltétel pontosan teljesedjék, a külső kontúr mentén pedig a peremre merőleges oldalerő abszolút értékre nézve minimálisra adódjék. A bemutatott számpélda tanúsága szerint az eljárás egyszerűsége ellenére a gyakorlat igényeinek minden tekintetben megfelel.

1. Bevezetés

Jelen tanulmány tárgyát szabályos háromszög alaprajz fölé szerkesztett különleges alakú oly forgásparaboloidhéjak alkotják, melyeken a belső tér jobb megvilágítására középen kör alakú felülvilágító nyílás van (1. ábra).



1. ábra. Egyenlőoldalú háromszög alaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloidhéj központos elrendezésű kör alakú felülvilágító nyílással

Az ún. membránelmélet szokásos feltevéseire támaszkodva, a dolgozat közelítő eljárást mutat be a fenti héjak statikai vizsgálatára. Felteszi, hogy a héj peremét alátámasztó függélyes ívtartók oldalirányú erőkkel szemben csak kevéssé, vagy egyáltalán nem ellenállók, a felülvilágító nyílás peremét szegélyező gyűrűtartó viszont mindenféle membránerővel szemben kellő ellenállást tanúsít. Terhelésként csak forgásszimmetrikus megoszlású függélyes erőket vesz számításba.

2. A feladat differenciálegyenlete

A vizsgálatokat a 2. ábrán feltüntetett $0(x, y, z)$ derékszögű, illetve $0(r, \varphi, z)$ hengeres koordinátarendszerben végezzük.

A héj középfelületének alakját a

$$z = \frac{h}{4a^2}(x^2 + y^2) = \frac{h}{4a^2} r^2 \tag{1}$$

alakfüggvénnyel, a héjnak az alaprajz területegységére vonatkoztatott fajlagos terhét pedig a

$$g = g_0 + g_1 r + g_2 r^2 + \ldots + g_m r^m \tag{2}$$

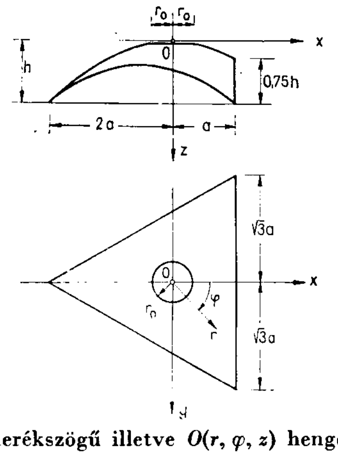
teherfüggvénnyel fejezzük ki, ahol a $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_m^m$ értékek ismert állandók.

Célunk a héj ismeretlen feszültségi állapotának meghatározása. Ennek leírására az

$$F = F(x, y) \tag{3}$$

feszültségfüggvényt használjuk fel. Ez utóbbi az x, y irányú redukált (vetületi) feszítőerőkkel a következő kapcsolatban áll (3. ábra):

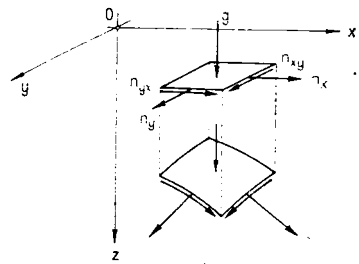
$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \qquad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{4}$$



2. ábra. Az $O(x, y, z)$ derékszögű illetve $O(r, \varphi, z)$ hengeres koordinátarendszer

A feszültségfüggvény meghatározására a *Pucher-féle* differenciálegyenletet használjuk fel, mely a tárgyalandó különleges esetben így írható:

$$\frac{h}{2a^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + g = 0. \tag{5}$$



3. *ábra.* Az n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y redukált feszítőerők

3. Kerületi feltételek

Az ismeretlen F feszültségfüggvény az (5) differenciálegyenleten felül a következő *a)* és *b)* alatti kerületi feltételeket tartozik teljesíteni.

a) *A héj belső kerülete mentén* kerületi feltételként az a követelmény támasztható, hogy a felülvilágító nyílás peremgerendájára ható erők egyensúlyban levő rendszert alkossanak. Minthogy a héj terhelése forgásszimmetrikus, a szóban forgó feltétel azt fejezi ki, hogy a felülvilágító nyílás peremgerendájára ható erők függélyes alkotóinak összege zérus tartozik lenni. Ha a felülvilágító nyílás peremgerendájának a peremvonal hosszegységére vonatkoztatott fajlagos súlya $G_0 =$ konst, az említett egyensúlyi követelmény így fogalmazható:

$$\int_0^{2\pi} \left[n_r \frac{dz}{dr} \right]_{r=r_0} \cdot r_0 \cdot d\varphi + 2\pi\, r_0 G_0 = 0\,.$$

E képletben n_r az $r =$ konst körök mentén működő redukált feszítő erőt jelenti, mely általában az

$$n_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

képlet szerint számítható. A felülvilágító nyílás peremén, vagyis az $r = r_0$ helyen, ezen feszítő erő értéke

$$\Big[n_r \Big]_{r=r_0} = \frac{1}{r_0} \left[\frac{\partial F}{\partial r} \right]_{r=r_0} + \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right]_{r=r_0},$$

s ugyanott

$$\left[\frac{dz}{dr} \right]_{r=r_0} = \frac{h r_0}{2a^2}\,.$$

Ezen értékek figyelembevételével az említett kerületi feltétel ekként fejezhető ki:

$$\frac{h}{2a^2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right]_{r=r_0} \cdot d\varphi + 2\pi G_0 = 0\,. \qquad \text{(6a)}$$

b) *A héj külső kerülete* mentén azt a követelményt kell biztosítanunk, hogy a peremívekre jutó oldalerő, vagyis az alaprajzi háromszög oldalaira merőleges redukált feszítő erő zérus legyen, vagy attól legfeljebb kevéssé térjen el. Ha az $x = a$ háromszögoldal mentén ezt az oldalerőt $\bar{n}_x$ betűvel jelöljük, az említett követelményt az $x = a$ peremívre vonatkozóan a következőképp fogalmazhatjuk:

$$\bar{n}_x = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{x=a} \cong 0 \,. \tag{6b}$$

4. A feladat megoldása

A következőkben a vizsgálandó héjhoz hasonló alakú, de felülvilágító nyílás nélküli héj feszültségfüggvényét F^I betűvel, a felülvilágító nyílással bíró héj feszültségfüggvényét pedig F betűvel jelöljük. Utóbbit úgy állítjuk elő, hogy az F^I feszültségfüggvényt az (5) differenciálegyenlet homogén alakjának egy alkalmas megoldásával — az F^{II} harmonikus függvénnyel — kiegészítjük.

$$F = F^I + F^{II}.$$

E két függvény közül az F^I függvényt ismeretesnek tekintjük

$$F^I = -\frac{2a^2}{h} \sum_{k=0,1,2,\dots,m} \frac{g_k r^{k+2}}{(k+2)^2} + \sum_{j=1,2,3,\dots} B_j r^{3j} \cos 3j\varphi \,. \tag{7}$$

Az F^{II} függvényt viszont a következőképp szerkesztjük meg:

$$F^{II} = C_0 \ln r^2 + C_1 r^3 \cos 3\varphi + C_2 r^6 \cos 6\varphi. \tag{8}$$

A fenti kifejezésben a C_0, C_1, C_2 értékek ismeretlen paraméterek. Ezeket a (6a) és (6b) kerületi feltételek figyelembevételével kell meghatározni.

a) Először a (6a) kerületi feltételt elégítjük ki. Ennek felírása során a trigonometrikus függvények ismert tulajdonsága folytán elégséges az integrandusznak csupán a φ szögtől független részét figyelembe venni. Ekként eljárva, a (7) és (8) alattiak behelyettesítésével a (6a) kerületi feltétel így fejezhető ki:

$$\frac{h}{2a^2}\int_0^{2\pi}\left(C_0\frac{2}{r_0} - \frac{2a^2}{h}\sum_{k=0,1,2,\dots,m}\frac{g_k r_0^{k+1}}{k+2}\right)d\varphi + 2\pi G_0 = 0.$$

Innen az integrálás elvégzése és egyszerűsítések után az eddig ismeretlen C_0 paraméterre a következő érték adódik:

$$C_0 = \frac{a^2 r_0}{h}\left(\sum_{k=0,1,2,\dots,m}\frac{g_k r_0^{k+1}}{k+2} - G_0\right). \tag{9}$$

b) Ezután a (6b) kerületi feltétel tárgyalására térünk át. Ennek felírása során az F függvény helyett elégséges csupán az F^{II} feszültségfüggvénnyel dolgoznunk, mivel az F^{I} feszültségfüggvény (a felülvilágító nyílás nélküli héj feszültségfüggvénye) eleve megfelel a (6b) feltételnek. Ezt figyelembevéve, a (6b) feltétel ekként egyszerűsödik:

$$[n_x]_{x=a} = \left[\frac{\partial^2 F^{II}}{\partial y^2}\right]_{x=a} \cong 0\,. \tag{10}$$

A fenti képletben szereplő F^{II} függvény (8) alatti képlete derékszögű koordinátákkal kifejezve

$$F^{II} = C_0 \ln (x^2 + y^2) + C_1(x^3 - 3xy^2) + C_2(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) \tag{11}$$

alakban írható. Innen

$$n_x = \frac{\partial^2 F^{II}}{\partial y^2} = 2C_0 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - 6C_1 x - 30C_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\,,$$

az $x = a$ peremre jutó oldalerő pedig

$$\bar{n}_x = 2C_0 \frac{a^2 - y^2}{(a^2 + y^2)^2} - 6C_1 a - 30C_2 (a^4 - 6a^2 y^2 + y^4). \tag{12}$$

Az $\bar{n}_x$ oldalerő fenti képletében a C_1 és C_2 paraméterek ismeretlenek. Ezeknek oly értéket kell tulajdonítanunk, hogy $|\bar{n}_x|$ az $x = a$ peremív mentén mindenütt lehetőleg kicsiny legyen.

Először is a C_2 paraméter értékét számítjuk ki, előírván azt a követelményt, hogy az $\bar{n}_x$ erő az $y = 0$ és az $y = \sqrt{3}a$ pontban azonos értékű legyen. Az $\bar{n}_x$ erő értéke az $y = 0$ pontban

$$\bar{n}_x = \frac{2C_0}{a^2} - 6C_1 a - 30C_2 a^4\,,$$

az $y = \sqrt{3}\,a$ pontban pedig

$$\bar{n}_x = -\frac{C_0}{4a^2} - 6C_1 a + 240\,C_2 a^4\,,$$

így az említett egyezés akkor következik be, ha

$$\frac{2C_0}{a^2} - 6C_1 a - 30C_2 a^4 = -\frac{C_0}{4a^2} - 6C_1 a + 240\,C_2 a^4\,.$$

Innen

$$C_2 = \frac{C_0}{120\,a^6}\,. \tag{13}$$

Ezután a C_1 paraméter kiszámítására térünk át. Evégett a (12) képletbe behelyettesítjük C_2 imént talált értékét, s az így nyert

$$\bar{n}_x = 2C_0 \frac{a^2 - y^2}{(a^2+y^2)^2} - 6C_1 a - \frac{2C_0}{8a^6}(a^4 - 6a^2y^2 + y^4) \tag{14}$$

kifejezésnek az $0 \leq y \leq \sqrt{3}a$ intervallumon fellépő szélső értékeit keressük. A szóban forgó szélső értékek helye a

$$\frac{d\bar{n}_x}{dy} = 0$$

feltételből határozható meg, ami a következő egyenletre vezet:

$$-2C_0 y \frac{3a^2 - y^2}{(a^2+y^2)^3} + \frac{C_0 y}{2a^6}(3a^2 - y^2) = 0\,. \tag{15}$$

Ennek az egyenletnek a gyökei a szélső értékek helyének a koordinátái. A szóban forgó gyökök egy csoportja azonnal felírható:

$$y = 0 \text{ és } y = \sqrt{3}a.$$

Ezek szerint a vizsgált intervallum két végpontjában az oldalerő szélső értékű. A (15) egyenlet a fenti gyökökkel való egyszerűsítés után

$$-\frac{2}{(a^2+y^2)^3} + \frac{1}{2a^6} = 0$$

alakba megy át. Ezen egyenletnek a vizsgált intervallumon belül egyetlen gyöke van, s ennek értéke

$$y_1 = \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} \cdot a\,.$$

Az $\bar{n}_x$ oldalerő ezen az $y = y_1$ helyen szintén szélső értékű.

Az y_1 koordinátát meghatározván, most azt a követelményt írjuk fel, hogy az oldalerőnek az $y = y_1$ helyen vett értéke az $y = 0$ helyen vett érték ellentettje tartozik lenni. Ily módon oly egyenlethez jutunk, melyben csupán a C_1 paraméter az ismeretlen. Ez az egyenlet a C_1 paraméterre a

$$C_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{48}\right)\frac{C_0}{a^3} = 0{,}21853\,\frac{C_0}{a^3} \tag{16}$$

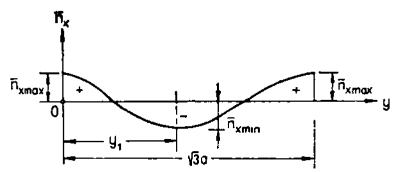
értéket szolgáltatja.

A C_0, C_1, C_2 paramétereket meghatározván, a (11) alatti F^{II} függvény teljesen ismeretessé vált, tehát kitűzött feladatunkat megoldottuk. Ellenőrzésképpen célszerű lesz azonban az $\bar{n}_x$ oldalerő abszolút értékének maximumát kiszámítani. Ezt egyszerűen úgy kapjuk meg, hogy a (12) képletben az $y = 0$ helyettesítést végezzük. Ezek szerint a szóban forgó szélső érték

$$|\bar{n}_x|_{\max} = (2 - 1{,}31116 - 0{,}25)\frac{C_0}{a^2} = 0{,}43884\frac{C_0}{a^2}, \tag{17}$$

ami az $x = a$ peremív mentén működő n_y feszítő erőhöz viszonyítva még a gyakorlatban szóba jövő szélsőséges $r_0 < a/3$ esetben is jelentéktelen.

Maga az $\bar{n}_x$ oldalerőnek az $x = a$ peremív $y = 0$ felén való megoszlását a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra. Az n_x oldalerő megoszlása az $x = a$ peremvonal mentén

Itt említjük meg, hogy az $x = a$ peremív mentén működő n_y feszítőerő független a felülvilágító nyílás r_0 sugarától, s felülvilágító nyílással bíró héjon ugyanakkora, mint felülvilágító nyílással nem rendelkező héj esetében. Értéke

$$\bar{n}_y = -\frac{2a^2}{h}g. \tag{18}$$

Ugyanez az érdekes megállapítás vonatkozik a héjsarkokban keletkező feszítőerőkre is. Ezek értéke is független attól, hogy van-e, vagy nincs a héjon felülvilágító nyílás.

5. Számpélda

Alkalmazzuk az ismertetett eljárást az 5. ábrán feltüntetett héjra, melynek jellemző méretei

$$a = 10{,}0 \text{ m}, \quad h = 8{,}0 \text{ m}, \quad r_0 = 3{,}0 \text{ m}.$$

A héj az alaprajz területén egyenletesen megoszló

$$g_0 = 300 \text{ kp/m}^2$$

intenzitású függélyes megoszló erővel van terhelve. A felületvilágító nyílás peremgerendájának fajlagos súlya

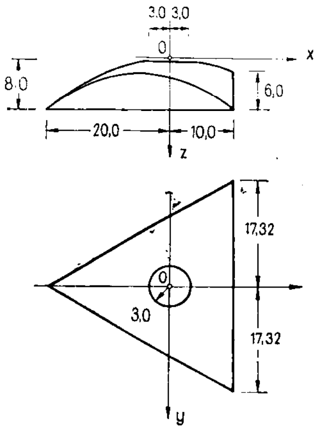
$$G_0 = 150 \text{ kp/m}.$$

Az adott esetben

$$g_1 = g_2 = g_3 = \ldots = g_m = 0,$$

tehát a (9) képlet szerint

$$C_0 = \frac{10{,}0^2 \cdot 3{,}0}{8{,}0}\left(\frac{300 \cdot 3{,}0}{2} - 150\right) = 11250 \text{ m kp},$$



5. *ábra.* Számpélda

a (16) illetve (13) képlet szerint pedig

$$C_1 = 0{,}21853 \frac{11250}{10{,}0^3} = 2{,}4585 \text{ kp/m}^2.$$

$$C_2 = \frac{11250}{120{,}10{,}0^6} = 0{,}000\,09375 \text{ kp/m}^5.$$

A C_0, C_1, C_2 paraméterek fenti értékeit a (11) képletbe behelyettesítve, az F^{II} függvényre az alábbi képletet kapjuk:

$$F^{II} = 11\,250 \ln (x^2 + y^2) + 2{,}4585\,(x^3 - 3xy^2) +$$
$$+ 0{,}000\,093\,75\,(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6).$$

Az F^I függvény viszont, mint ismeretes [2] a következő képlettel fejezhető ki:

$$F^I = -\frac{ag_0}{2h}\left(ax^2 + ay^2 + \frac{x^3}{3} - xy^2\right) =$$
$$= -187{,}5\left(10x^2 + 10y^2 + \frac{x^3}{3} - xy^2\right).$$

A feladat F feszültségfüggvénye a fenti F^I és F^{II} függvények összege, vagyis

$$F = -1875\,(x^2 + y^2) + 11\,250 \ln (x^2 + y^2) - 60{,}0415\,(x^3 - 3xy^2) +$$
$$+ 0{,}000\,093\,75\,(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6).$$

Ismervén az F függvényt, az x, y irányú redukált feszítő erők a (4) képletekkel számíthatók:

$$n_x = -3750 + 22\,500 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} - 360{,}249x - 0{,}002\,8125\,(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4),$$

$$n_{xy} = +45000 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} - 360{,}249y + 0{,}011\;250(x^3 y - xy^3),$$

$$n_y = -3750 - 22\,500 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} - 360{,}249x + 0{,}002\;8125\,(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4).$$

Az $x = 10{,}0$ peremívre jutó oldalerő a (14) képlet szerint

$$\bar{n}_x = 22500 \frac{100 - y^2}{(100 + y^2)^2} - 147{,}51 - 0{,}0005625(10000 - 600y^2 + y^4),$$

ezen erő abszolút értékének maximuma pedig a (17) képlettel számítva

$$|\bar{n}_x|_{\max} = 0{,}43884 \cdot \frac{11250}{10{,}0^2} = 49{,}37 \text{ kp/m}.$$

Ezzel szemben az $x = 10{,}0$ peremív mentén működő n_y erő értéke

$$\bar{n}_y = \frac{2 \cdot 10{,}0^2}{8{,}0}\,300 = 7500 \text{ kp/m}.$$

Mint a fentiekből megállapítható, az $x = 10{,}0$ peremív mentén működő oldal erő önmagában véve is jelentéktelen, de elhanyagolhatóan kicsiny az ugyanott működő y irányú redukált feszítőerőhöz viszonyítva is, abszolút értékének maximuma nem lévén nagyobb az y irányú erő abszolút értékének 0,0066-szorosánál.

IRODALOM

1. CSONKA, P.: Paraboloidal Shell of Revolution with an Eccentrical Skylight Opening. *World Conference on Shell Structures* October 1—4, 1962, Sanfrancisco, California. National Academy of Sciences — National Research Council. Washington, D. C. 1964, 501—508.
2. CSONKA, P.: Membranschalen. *Bauingenieur-Praxis*, Heft 16. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München 1966.

Rotationsparaboloidschale über regelmäßigem Dreieckgrundriß mit zentrischer Oberlichtsöffnung. Der Aufsatz befaßt sich im Rahmen der gewöhnlichen Annahmen der sog. Membrantheorie mit der statischen Untersuchung von Rotationsparaboloidschalen über einen regelmäßigen Dreieckgrundriß, die in der Mitte eine kreisförmige Oberlichtsöffnung besitzen. Er geht von der Spannungsfunktion einer Schale aus, die mit der zu untersuchenden identisch ist, jedoch mit keiner Oberlichtsöffnung versehen ist. Diese Spannungsfunktion wird mit einer dreigliedrigen harmonischen Funktion derart ergänzt, daß die Gleichgewichtsbedingungen, die sich auf die den Innenrand belastenden vertikalen Kraftkomponenten beziehen, genau erfüllt werden. Als zweite Bedingung wird verlangt, daß das Maximum des absoluten Wertes der für Ebene der Randbögen senkrechten reduzierten Spannkräfte so klein als möglich sei. Trotz ihrer Einfachheit entspricht die behandelte Methode allen Anforderungen der Praxis.

Paraboloid Shell of Revolution Triangular in Plan with a Circular Skylight Opening in its Centre. The paper deals within the customary assumptions of the so-called membrane theory with the statical investigation of paraboloid shells of revolution regular triangular in plane having a circular skylight opening in their centre. It starts out with the stress function of a shell similar to the one under investigation, but without any skylight opening. This function is completed by a three-membered harmonious function. The unknown parameters figuring in the latter are determined in such a way that the equilibrium condition referring to the vertical components of the forces to which the inner boundary is subjected, should be precisely satisfied. As a further postulate, it is required that the maximum of the absolute value of the reduced inner forces perpendicular to the plane of the edge arches should be as small as possible. Although the expounded method is quite simple, it fulfils all the requirements needed in practice.