ADALÉKOK A SZEMCSÉS TALAJOK NYÍRÓSZILÁRDSÁGÁHOZ

C. PIETSCH
HAJÓZÁSI, VÍZÉPÍTÉSI ÉS ALAPOZÁSI KUTATÓINTÉZET, BERLIN, NDK

[Beérkezett 1969. jan. 27.]

Összefüggés van a szemcsés talajok azonos normálterhelés mellett meghatározott súrlódási tényezője és hézagtényezője között. Ezt közelítően lineáris függvénnyel, pontosabban pedig a *Winterkorn—Kézdi*-féle hiperbolikus összefüggéssel lehet leírni. Különböző szerzők nyírókísérleteinek kiértékeléséből tájékozódhatunk, milyen határok között érvényesek e törvények. Kézdi egyik javaslatára hivatkozva ez a tétel kibővíthető. Eszerint a súrlódási tényező és a hézagtényező közötti összefüggés egy egyenlő szárú hiperbolával ábrázolható, amelynek aszimptotái egyben a koordinátatengelyek. A megfelelő egyenlet — a valódi gázok állapotegyenletének mintájára — a durvaszemcsés folyadékok izotermális állapotra vonatkozó bővített állapotegyenletének fogható fel. Elképzelhető, hogy a szemcsés talajok nyírási viselkedésének kutatása alapján a termodinamikához, ill. kémiai fizikához fűződő további analógiákra derül fény.

1. Bevezetés

A szemcsés talajok nyírószilárdságát általában szilárd testekről szóló Coulomb-féle elmélet szerint határozzuk meg. Eszerint

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_n \tan \varphi_s, \\ \mu &= \tan \varphi_s = \tau/\sigma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

A klasszikus talajmechanikában ez az összefüggés az állékonysági és biztonsági számítások alapja.

Pontosabban elvégzett nyírókísérletek azt mutatták, hogy a $\tan \varphi_s$ súrlódási együttható — az (1) összefüggéstől eltérően — nem mindig tekinthető állandónak. A Coulomb-„egyenes" inkább parabolikus alakú, vagyis a kis normálfeszültségek tartományában nagyobb, a nagy normálfeszültségek tartományában pedig kisebb a tényleges nyírószilárdság az (1) szerint várhatónál. Ezen kívül megfigyelhető a nyírószilárdságnak az e hézagtényezőtől való függése is. Idel [2] foglalta össze a befolyásoló tényezőket.

A pontosabb vizsgálatok azért fontosak, hogy a nyírás tényleges fizikai folyamatát megvilágíthassuk.

Jelentőségük abból fakad, hogy nagymodell-kísérlettel, ill. súlyos épületekből származó nagy igénybevételekkel kapcsolatos számos kérdés nem oldható meg kielégítően állandó nagyságú súrlódási tényező alkalmazásával.

Egyebek között ide tartozik a síkalapok törőterhelésének elméleti vizsgálata — különös tekintettel a csúszólapok alakjára és képződésére — valamint a magas gátak állékonysági vizsgálata.

A szemcsés talajokkal eddig végzett nyírási vizsgálatok alapján csupán a nyírószilárdság és a kezdeti hézagtényező e_A között tudtak világos összefüggést kimutatni (e_A a kísérlet kezdetén — a σ_1, ill. σ_3 normálfeszültségek alatti konszolidáció előtt mért hézagtényező). Ezért az alábbiak ennek az összefüggésnek vizsgálatára szorítkoznak.

2. A nyírószilárdság mint a kezdeti hézagtényező lineáris függvénye

NAUJOKS [9] és mások szerint az alábbi közelítő érvényességű lineáris összefüggések írhatók fel a súrlódási tényező, ill. súrlódási szög, valamint a kezdeti hézagtényező vagy a tömörségi fok között:

$$\begin{aligned} \varphi_s &= a' + b' \, e_A, \\ \tan \varphi_s &= a + b \, e_A, \\ \tan \varphi_s &= A + B \, D_r, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol a', b', a, b, A, B állandók, D_r pedig a tömörség mérőszáma

$$D_r = \frac{e_0 - e_A}{e_0 - e_d},$$

e_d a legtömörebb, e_0 pedig a leglazább állapotban mérhető hézagtényező.

A szerző intézetében végzett számos ellenőrző kísérlet alátámasztja ezen összefüggések érvényességét.

Újabban KÉRISEL (lásd SCHULTZE [11]) egyenletes szemeloszlású homokokra az alábbi tapasztalati összefüggést javasolja:

$$e_A \tan \varphi_s = \text{konst.} \tag{3}$$

Ez szerepel egyebek között a Hafenbautechnischen Gesellschaft ajánlásaiban is (LACKNER [7]). A (3) összefüggést a súrlódási tényező becslésszerű meghatározásához szabad felhasználni, ha kivételesen csak egyetlen hézagtényezővel végezték volna el a vizsgálatot.

A *TGL 11462, Blatt 12* javaslatában (Nyírószilárdság meghatározása dobozos nyírókészülékkel) [14] nincs semmilyen utalás, hogy a szemcsés talajok nyírószilárdságát hogyan kell közelítően meghatározni. Ott a vizsgálatok pontos kiértékeléséhez két eljárást adnak meg. Eszerint egyrészt az e_n természetes hézagtényezőhöz tartozó nyírószilárdságot $C = 0$ feltételezéssel öt részkísérletből kell meghatározni, amelyek során mindig azonos normál terhelést alkalmaznak, különböző kezdeti e_A hézagtényezők mellett. A másik eljárás szerint viszont $C \neq 0$ is lehet, három részvizsgálat szükséges különböző e_A kezdeti hézagtényezőkkel és legalább három-három különböző nagyságú normálfeszültséggel. Ezek alapján kell megrajzolni a nyírási egyenest.

3. A nyírószilárdság mint a kezdeti hézagtényezőnek nem-lineáris függvénye

A (2) és (3) egyenletekkel megadott összefüggések csak közelítések. Jobb és pontosabb ábrázolás is lehetséges, ha a talajt durvaszemcséjű folyadéknak tekintjük. Ezzel a módszerrel WINTERKORN [13] tapasztalati úton, ill. analógiák alapján, valamint KÉZDI [3—6] analitikusan a

$$\tan \varphi_s = \frac{C}{e_A - e_{\min}} \tag{4}$$

összefüggésre jutottak, ahol C, $e_{\min}$ állandók és $e_{\min} < e_d$.

Szigorúan véve a (4) egyenlőség csak a hézagtényezőknek $e_A < e_{\mathrm{krit}}$ tartományában érvényes, vagyis akkor, ha a talaj a nyírás folyamán lazul.

A könnyebb gyakorlati felhasználás végett ezt az egyenlőséget SCHULTZE [11]

$$\cot \varphi_s = e_A \frac{1}{C} - \frac{e_{\min}}{C},$$

ill.

$$\cot \varphi_s = a\, e_A + b \tag{5}$$

alakra formálta át, ahol a és b állandók.

A továbbiakban mégsem fogunk az (5) egyenlőséggel foglalkozni, mert ez megnehezítene egy lehetséges értelmezést.

Irjuk át a (4) egyenlőséget az alábbi alakba:

$$\eta \cdot \xi = C \tag{6}$$

ahol

$$\eta = \tan \varphi_s, \quad \xi = (e_A - e_{\min})$$

Ez tehát az $\eta - \xi$ koordinátarendszerben egy egyenlőszárú hiperbola. Ha mindkét oldalt megszorozzuk a k' egységnyi feszültséggel (WINTERKORN, [13]), akkor egy a Boyle—Mariotte-féle $p \cdot V =$ konst. állapot-törvénnyel analóg összefüggést kapunk:

$$k'\eta\xi = Ck' = c'. \tag{7}$$

Ezzel a (4) egyenlőség alkalmazását az azonos nyomások tartományára korlátoztuk, vagyis azon kísérletek esetére, amelyeket eltérő kezdeti hézagtényezővel bár, de mindig azonos normálfeszültség mellett végeztek. Ebből az analógiából még a következő megfogalmazás is lehetséges:

$$\begin{aligned} k' \tan \varphi_{s1}(e_{A1} - e_{\min}) &= Ck', \\ k' \tan \varphi_{s2})e_{A2} - e_{\min}) &= Ck', \\ k' \tan \varphi_{s3}(e_{A3} - e_{\min}) &= Ck', \\ k' \tan \varphi_{sn}(e_{An} - e_{\min}) &= Ck', \end{aligned} \tag{8}$$

egészen addig, amíg $e_{An} = e_{\text{krit}}$ nem lesz. Az analógiából következőleg tehát

$$\tan \varphi_s (e_A - e_{\min}) = \tan \varphi_g (e_{\text{krit}} - e_{\min}), \tag{9}$$

ahol $\tan \varphi_g$ a csúszási együttható az e_{krit} kritikus hézagtényező mellett.

Ha $e_A = e_{\text{krit}}$, a szemcsés talajnak elméletileg nincs térfogatváltozása a nyírás folyamán. A (9) egyenletet HERBST—WINTERKORN [1] számos nyírókísérlet elméleti kiértékelése alapján állították fel.

A (9) egyenlet alapja azonban egy lényeges egyszerűsítés. Ugyanis feltételezték, hogy a $\tan \varphi_g$ csúszási együttható azonos normálterhelés esetén gyakorlatilag állandó és független a kezdeti hézagtényezőtől. PETERMANN [10] és mások kísérletei (vö. SCHULTZE, [11]) azonban azt mutatták, hogy a csúszási együttható függ a kezdeti hézagtényezőtől és normálfeszültségtől, különösen a $\sigma_n \lesssim 0{,}5$ kp/cm^2 tartományban. Ezért e_{krit} csak közelítően határozható meg. Továbbra is fennmarad tehát a kérdés: megkaphatjuk-e a csúszási együtthatót nyírókísérletekből a térfogati korrekció figyelembevételével (SCHULTZE—HORN [12]).

4. Különböző szerzők nyírási vizsgálatainak kiértékelése

Különböző szerzők nyírókísérleteinek vizsgálata (mint pl. PETERMANN [10], MOUSSA [8], SCHULTZE [12]; valamint a szerző intézetében végzett vizsgálatok statisztikai kiértékelése) azt mutatja, hogy az eredményekkel igen jól egyezik a (4) összefüggés. Az ellenőrzés különösen akkor kedvező, ha nagyszámú nyírókísérlet áll rendelkezésünkre, különböző kezdeti hézagtényezőkkel.

Az $e_{\min}$ és C állandók meghatározásához felhasználhatók két olyan nyírókísérlet eredményei, amelyek során azonos nagyságú volt a normálterhelés, ill. a σ_3 hidrostatikus feszültség, de különbözőek voltak a kezdeti hézagtényezők. Célszerű mindkét kísérletből a legkisebb kezdeti értékeket ($e_{A2} > e_{A1}$) felhasználni.

Ha azonban több kísérleti eredmény is rendelkezésre áll, vagyis

$$e_{\text{krit}} \geq e_{An} > e_{An-1} > \ldots > e_{A3} > e_{A2} > e_{A1}$$

$$\text{és } e_{A1} \longrightarrow e_d,$$

akkor az e_{Ai}—e_{A1} értékpárok bármelyike figyelembe vehető. Ha pl. ilyen módon értékeljük ki PETERMANN (1939) kísérleteit, akkor kiderül, hogy az $e_{\min}$ és C állandók bizonyos határok között ingadoznak (I. táblázat).

I. táblázat

Példa nyírókísérlet kiértékelésére [PETERMANN (1939) kísérletei $\sigma = 1$ kp/cm²]

e_A	tan φ_s mért átl. értéke	Számítással meghatározott értékek							
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
0,490	0,876	x	0,876	0	0	x	0,876	0	0
0,521	0,831	x	0,831	0	0		0,831	0	0
0,552	0,789		0,790	−0,001	−0,13	x	0,789	0	0
0,583	0,750		0,754	−0,004	−0,53		0,752	−0,002	−0,27
0,614	0,715		0,720	−0,005	−0,70		0,718	−0,003	−0,42
0,645	0,685		0,691	−0,006	−0,87		0,689	−0,004	−0,58
0,676	0,656		0,663	−0,007	−1,06		0,660	−0,004	−0,61
0,707	0,635		0,637	−0,002	−0,31		0,635	0	0
0,738	0,616		0,613	+0,003	+0,49		0,609	+0,007	+1,15
0,769	0,603		0,591	+0,012	+2,03		0,588	+0,015	+2,56
0,800	0,593		0,570	+0,023	+4,03		0,567	+0,026	+4,60
		$C = 0{,}507$ $e_{\min} = -0{,}089$				$C = 0{,}499$ $e_{\min} = -0{,}080$			

e_A	tan φ_s mért ált. értéke	Számítással meghatározott értékek							
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
0,490	0,876	x	0,876	0	0	x	0,876	0	0
0,521	0,831		0,830	+0,001	+0,12		0,828	+0,003	+0,36
0,552	0,789		0,788	+0,001	+0,13		0,787	+0,002	+0,25
0,583	0,750	x	0,750	0	0		0,749	+0,001	+0,13
0,614	0,715		0,717	−0,002	−0,28	x	0,715	0	0
0,645	0,685		0,686	−0,001	−0,15		0,684	−0,001	−0,15
0,676	0,656		0,656	0	0		0,656	0	0
0,707	0,635		0,630	+0,005	+0,80		0,628	+0,007	+1,12
0,738	0,616		0,606	+0,010	+1,65		0,603	+0,013	+2,15
0,769	0,603		0,583	+0,020	+3,42		0,581	+0,022	+3,78
0,800	0,593		0,562	+0,029	+5,18		0,560	+0,033	+5,89
		$C = 0{,}487$ $e_{\min} = -0{,}066$				$C = 0{,}483$ $e_{\min} = -0{,}062$			

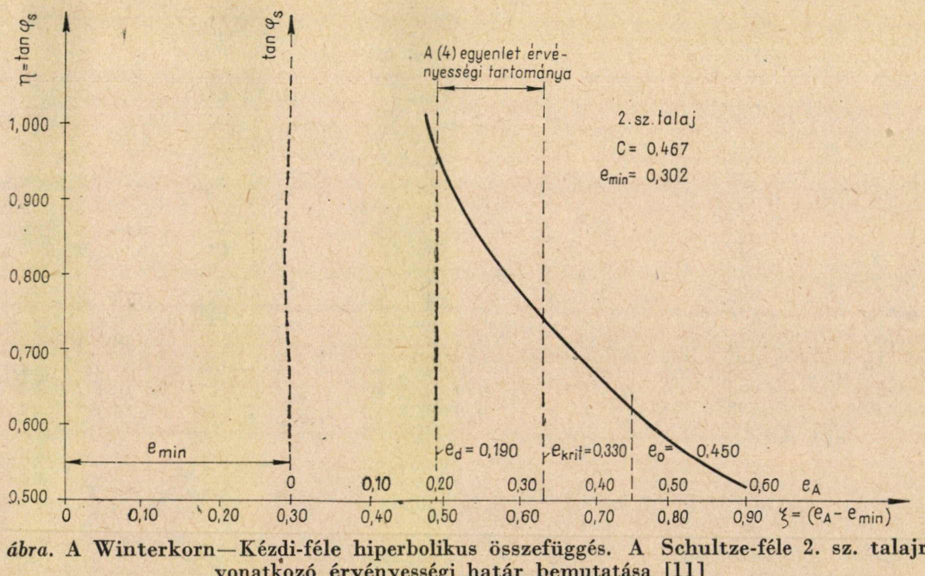
Megjegyzés: I = interpolált értékek II = tan φ_s III = Δ, a mért és számított értékek különbsége. IV = %, a mért és számított értékek különbsége

Például az alábbi eredmények nyerhetők:

$\sigma_n = 1$ kp/cm²	C	0,507	0,499	0,487	0,483
	e_{min}	—0,089	—0,08	—0,066	—0,062
	$C + e_{min}$	0,418	0,419	0,421	0,421
$\sigma_n = 0{,}25$ kp/cm²	C	0,633	0,572	0,518	—
	e_{min}	—0,115	—0,056	—0,005	—
	$C + e_{min}$	0,518	0,516	0,513	—

Ebből látjuk, hogy az e_{min} és C állandók különböző értékűek lehetnek egy — állandó normálterheléssel végzett — kísérletsorozatban, viszont összegük gyakorlatilag állandó. Ezzel egy kiegészítő ellenőrzés válik lehetségessé. A bemutatott számértékek egyben azt is mutatják, hogy az e_{min} és C állandók kielégítő fizikai értelmezése nem lehetséges. Erre utal pl. az e_{min} mennyiségek negatív előjele is.

A (4), ill. (6) összefüggések alkalmazási határai jobban megbecsülhetők az η—ξ koordinátarendszerben való ábrázolással. Az 1. ábrán Schultze (1966) szemcsés talajokkal végzett kísérletsorozatából a 2. sorszámú talaj ilyen ábrázolását mutatjuk be. Világosan látszik az a viszonylag szűk tartomány, amelyben a (4) egyenlőség használható, és amelyben csupán csekély eltérés mutatkozik az egyenestől.

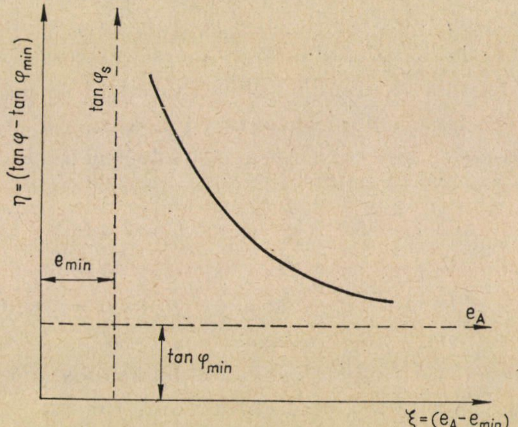


1. ábra. A Winterkorn—Kézdi-féle hiperbolikus összefüggés. A Schultze-féle 2. sz. talajra vonatkozó érvényességi határ bemutatása [11]

5. A nyírószilárdság módosított értékelése

Az eddigiekből és az 1. ábrából látható, hogy a (4) összefüggés nem tökéletesen kielégítő. Javítása lehetséges, ha a *Kézdi*-féle képletet egy B konstanssal bővítjük (KÉZDI [3—5]):

$$\tan \varphi_s = \frac{C}{e_A - e_{\min}} - B . \tag{10}$$



2. ábra. A kibővített hiperbolikus összefüggés. Az egyenlőszárú hiperbola aszimptotái a koordinátatengelyek

Ez továbbá ilyen alakban is írható:

$$(\tan \varphi_s + B)\,(e_A - e_{\min}) = C,$$

vagy — az $e_{\min}$-re utalva B helyett a $\tan \varphi_{\min}$ jelölést használva:

$$(\tan \varphi_s + \tan \varphi_{\min})\,(e_A - e_{\min}) = C, \tag{11}$$

ahol tehát $\tan \varphi_{\min}$ a súrlódási tényező határértéke.

A (11) egyenlőség három állandójának meghatározásához három — különböző kezdeti hézagtényezővel, de azonos normálterhelés mellett végzett — nyírókísérlet eredményei szükségesek. A (11) egyenlet is egy egyenlő szárú hiperbolával ábrázolható, ha

$$\eta\, \xi = C,$$

$$\eta = (\tan \varphi_s + \tan \varphi_{\min}), \tag{12}$$

$$\xi = (e_A - e_{\min})$$

amint a 2. ábrán látható.

A nyírókísérlet-sorozatok kiértékeléséből ismét eltérő értékű állandók adódnak, amelyek részben még előjelükben is különböznek. Ennek pontosabb magyarázata még hiányzik.

A (11) összefüggés további kutatás lehetőségét kínálja. Nyilvánvaló az analógia a termodinamika állapotegyenleteivel, amelyek a szilárd testek, ill. gázok állapotjellemzői (pl. tömeg és térfogat, nyomás és hőmérséklet) közötti matematikai kapcsolatot fejezik ki. Szemcsés anyagok nyírókísérleteinek esetében az állapotjellemzők a súrlódási tényező, a normálfeszültségek, tömeg-, ill. térfogatarányok (hézagtényező). Így pl. a (3) egyenlőség az ideális gáztörvény: $pV = nRT$ analógja (állandó hőmérséklet esetében $pV =$ konst.). A tényleges szemcsés talajok némileg eltérő viselkedése pedig kifejezésre jut a (11) összefüggésben. Ez a valódi gázokra vonatkozó van der Waals-féle állapotegyenletnek analógja, amely izotermális körülmények között

$$\left(p + \frac{a}{v_2}\right)(v - b) = nRT = \text{konst.}$$

alakú. Ennélfogva *a (11) összefüggést úgy tekinthetjük, mint a durvaszemcsés folyadék kibővített állapotegyenletét állandó hőmérsékleti viszonyok mellett.*

A (3), (4) és (11) összefüggések mindenkor azonos mértékű normálterhelés, ill. oldalnyomás esetére érvényesek. Viszont lehetséges egy rendszernek termikus állapotváltozása mechanikus hatásokra — pl. összenyomás következtében — is.

Egy ilyen hőközlés nélküli mechanikus hatás adiabatikus állapotváltozásnak felel meg. Ez a nyírókísérleteknél a normálterhelés, ill. oldalnyomás működésével jön létre. Utalni kell arra, hogy ily módon csak egyensúlyi állapotok vizsgálhatók, nem pedig a folyamat alatt fellépő változások.

A további vizsgálatok megmutathatják, hogy mennyire használhatók a termodinamika és a fizikai kémia alapelvei a szemcsés talajok nyírási tulajdonságainak jövőbeli kutatására.

IRODALOM

1. Herbst, T.—Winterkorn, H. F.: Shear Phenomena in Granular Random Packings. — Princeton Soil Eng., Dep. of Civ. Engng., Princeton University, Res. Ser. 2 (1965).
2. Idel, K.: Die Scherfestigkeit rolliger Erdstoffe. — *Veröffentl. Inst. f. Bodenmech. u. Grundbau, TH Karlsruhe,* H. 2 (1960).
3. Kézdi, Á.: Contribution to the Investigations of Granular Systems. — *Highway Research Record* (1964), 42—58.
4. Kézdi, Á.: Grundlagen einer allgemeinen Bodenphysik. — *VDI Zeitschrift* **108** (1966), 161—166.
5. Kézdi, Á.: Szemcsés talajok nyírószilárdsága. — *Mélyépítéstudományi Szemle,* (1966), 351—358.
6. Kézdi, Á.: Kohéziós talajok nyírószilárdsága. — *Mélyépítéstudományi Szemle* (1967), 1—11.
7. Lackner, E.: Technischer Jahresbericht 1967 des Arbeitsausschusses „Ufereinfassungen". — *Bautechnik* (1967), 429—435.
8. Moussa, A.: Untersuchungen über die Scherfestigkeit und die Durchlässigkeit von Sanden. — *Mitt. Inst. Verkehrswasserbau, Grundbau u. Bodenmechanik, TH Aachen,* (1967), 1—35.

9. NAUJOKS, L.: Über die Tragfähigkeit von mittig, vertikal belasteten Flachgründungen im Sand. — *Berichte aus der Bauforschung*, Berlin, H. 32. S. 1—102, Verlag W. Ernst u. Sohn.
10. PETERMANN, H.: Zusammenhang zwischen Scherwerschiebung, Dichte und Scherwiderstand bei nichtbindigen Böden. — *Dt. Wasserwirtschaft*, (1939), 441—447.
11. SCHULTZE, K.: Lockere und dichte Böden. — *Mitt. Inst. Baumaschinen u. Baubetrieb, TH Aachen, H.* IX. (1966), 107—123.
12. SCHULTZE, E.—HORN, A.: Der Zugwiderstand von Hängebrücken-Widerlagern. — *Mitt. Inst. Verkehrswasserbau, Grundbau u. Bodenmechanik (VGB), TH Aachen*, H. 38 (1967).
13. WINTERKORN, H. F.: Neue theoretische Erkenntnisse über den Scherwiderstand rolliger Böden und ihre praktische Anwendung Konferenzberichte Int. Diskussionstagung Bodenmechanik im Strassenbau, Wien 1964, 8 S.
14. *TGL* 11.462, Bl.12 *Entwurf* 1967: Baugrundmechanik, Prüfungen an Lockergesteinsproben im Laboratorium, Bestimmung der Scherfestigkeit im Flachschergerät.

Einige Bemerkungen zur Scherfestigkeit von sichbindigen Böden. Bei Scherversuchen mit nichtbindigen Böden besteht ein Zusammenhang zwischen Reibungsbeiwert und Porenzahl für Versuche gleicher Normalbelastung bzw. gleichen Seitendrucks. Dieser Zusammenhang kann näherungsweise durch verschiedene lineare Funktionen und genauer durch den Hyperbel-Ansatz nach Winterkorn/Kézdi beschrieben werden. Die Auswertung von Scherversuchen verschiedener Verfasser gibt weitere Hinweise zu den Gültigkeitsgrenzen und der praktischen Handhabung dieses Ansatzes. In Anlehnung an einen Vorschlag von KÉZDI läßt sich dieser Ansatz erweitern. Der Zusammenhang zwischen Reibungsbeiwert und Porenzahl wird dann durch eine gleichseitige Hyperbel dargestellt, deren Koordinatenachsen zugleich Asymptoten sind. Die entsprechende Gleichung kann analog zu der Zustandsgleichung realer Gase als erweiterte Zustandsgleichung der makromeritischen Flüssigkeit für isotherme Zustände aufgefaßt werden. Bei der Erforschung des Scherverhaltens nichtbindiger Böden sind weitere Analogien zur Thermodynamik bzw. chemikalischen Physik denkbar.

Some Remarks to the Shear Strength of Granular Soils. The results of shearing tests on granular soils indicate a relation between coefficient of friction and voids ratio for tests with the same confining pressure. A linear function demonstrates a first approximation. The hyperbolic function after Winterkorn and Kézdi provides a better agreement with the test results. Analysing this equation for the experimental data of several authors we get some new results concerning validity and practical usefulness. Using a suggestion of KÉZDI it is possible to complete this equation. By this we get a relation between coefficient of friction and voids ratio. This relation represents an equilateral hyperbola, the coordinate axes of which are asymptotes. Analogous to the equation of state of real gases we can define this new equation as an expanded isothermic equation of state for macromeritic liquids. Further analogies to thermodynamics and chemical physics are possible for the research of shearing behaviour of granular soils.