A TORZIÓSLENGÉS ÖNLENGÉSSZÁMAINAK EGYSZERŰSÍTETT SZÁMÍTÁSA

BALOGH ARTHUR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1966. október 19-én]

I. A számítás elméleti alapjai

A torzióslengés önlengésszámainak kiszámításához algebrai egyenletet kell megoldani, és ez a módszer semmiképpen nem nevezhető egyszerűnek. Tehát minden lehetőt el kell követni e módszer mellőzéséhez. E kitűzött feladat megoldásához felhasználjuk a kontinuans determinánsok közötti ismert összefüggést:

$$D_n = W_{n-1,n-1,n}\, D_{n-1} - u_{n-2,n-1}\, u_{n-1,n-1}\, D_{n-2}\,, \tag{1}$$

ahol D a determinánst jelöli, n pedig a tömegek száma. A következő jelöléseket vezetjük be:

$$W_{n-1,n-1,n} = W^2 - u_{n-1,n-1} - u_{n-1,n} \tag{2}$$

és

$$u = \frac{c}{1} = \frac{\text{a tengelyrés merevségi tényezője}}{\text{a tömeg tehetetlenségi nyomatéka}}\,[1/s^{-2}]\,.$$

Itt w a körfrekvencia.

A legegyszerűbb esetben, két tömegnél

$$D_2 = w^2 - u_{11} - u_{12}; \tag{3}$$

8 tömegnél pedig

$$D_8 = W_{778} D_7 - u_{67} u_{77} D_6,$$

tehát a 8-ad fokú determináns a 6 és 7 fokúból kiszámítható.

A következőkben azt a feladatot tűztük ki, hogy bármely tömegszám esetében az ehhez tartozó determinánst a legegyszerűbbel, tehát D_2-vel fejezzük ki. Ez azt jelenti, hogy oly összefüggést keressünk tetszőleges tömegszám esetében, amelyben csak D_2 szerepel.

Kezdjük D_3-mal, amelyre nézve

$$D_3 = W_{223}\, D_2 - u_{12}\, u_{22} = W_{112}\, W_{223} - u_{12}\, u_{22}, \tag{4}$$

tehát a D_2 kifejezését helyettesítettük be. Hasonlóan

$$D_4 = W_{334} D_3 - u_{23} u_{33} D_2 = (W_{223} W_{334} - u_{23} u_{33})D_2 - u_{12} u_{22} W_{334}. \quad (5)$$

Ebben az esetben már a levezetett D_3 és a D_2 kifejezéseit helyettesítettük be. Hasonlóképpen

$$D_5 = W_{445} D_4 - u_{34} u_{44} D_3 = (W_{223} W_{334} W_{445} - u_{23} u_{33} W_{445} - \\ - u_{33} u_{44} W_{223})D_2 - u_{12} u_{22}(W_{334} W_{445} - u_{34} u_{44}). \quad (6)$$

Vezessük be a

$$K_5 = W_{334} W_{445} - u_{34} u_{44} \quad (7)$$

jelölést, akkor a (6) alatti kifejezést a következő egyszerűbb alakban írhatjuk fel:

$$D_5 = (W_{223} K_5 D_2 - u_{12} u_{22}) K_5 - u_{23} u_{33} W_{445} D_2. \quad (8)$$

A K_5 kifejezés bevezetésével a kifejezés lényegesen egyszerűbb, és ezt a továbbiakban is fogjuk használni.

Ezek után áttérünk a 6-od fokú determináns esetére:

$$D_6 = W_{556} D_5 - u_{45} u_{55} D_4,$$

ahol a D_4 és D_5 kifejezéseit mint D_2 függvényét már az előzőkben ismertettük. Ismét bevezetjük ez esetben is a K_6 kifejezését:

$$K_6 = W_{334} W_{445} W_{556} - u_{34} u_{44} W_{556} - u_{45} u_{55} W_{334}, \quad (9)$$

akkor

$$D_6 = W_{223}(W_{334}W_{445}W_{556} - u_{34}u_{44}W_{556} - u_{45}u_{55}W_{334})D_2 - u_{23}u_{33}(W_{445}W_{556} - \\ - u_{45}u_{55})D_2 - u_{12}u_{22}(W_{334}W_{445}W_{556} - u_{34}u_{44}W_{556} - u_{45}u_{55}W_{334}). \quad (10)$$

Ha e kifejezésbe bevezetjük a K_6 kifejezést, úgy a következő egyszerűbb alakú kifejezést kapjuk:

$$D_6 = (W_{223}D_2 - u_{12}u_{22})K_6 - u_{23}u_{33}(W_{445}W_{556} - u_{45}u_{55})D_2. \quad (11)$$

Megjegyezni kívánjuk, hogy a kifejezéseket teljes általánosságban vezetjük le, holott ismeretes, hogy a valóságban ez nem fordul elő, mert a hengerek száma szerint az u értékek egyenlőek.

Áttérünk 7 tömegű rendszer esetére:

$$D_7 = W_{667}D_6 - u_{56}u_{66}D_5. \quad (12)$$

E kifejezésben már az előzőkben a D_5 és D_6 kifejezése ismert, és azokat egyszerűen be kell helyettesíteni. Azonban ismét bevezetjük erre az esetre is a K kifejezést, amely

$$K_7 = W_{334}W_{445}W_{556}W_{667} - u_{34}u_{44}W_{556}W_{667} - u_{45}u_{55}W_{334}W_{667} - \\ - u_{56}u_{66}W_{334}W_{445} + u_{34}u_{44}u_{56}u_{66}. \tag{13}$$

Ennek figyelembevételével a következő eredményt kapjuk:

$$D_7 = (W_{223}D_2 - u_{12}u_{22})\,K_7 - u_{23}u_{33}(W_{445}W_{556}W_{667} - \\ - u_{56}u_{66}W_{445} - u_{44}u_{55}W_{667})D_2\,, \tag{14}$$

ami már lényegesen egyszerűbb. Azonban egyszerűsítést végezhetünk a K_7 kifejezésén is a következőképpen:

$$K_7 = W_{556}W_{667}(W_{334}W_{445} - u_{34}u_{44}) - W_{334}(u_{45}u_{55}W_{667} + u_{56}u_{66}W_{445}) + \\ u_{34}u_{44}u_{56}u_{66}; \tag{15}$$

8 tömege esetére a kifejezés:

$$D_8 = W_{778}D_7 - u_{67}u_{77}D_6. \tag{16}$$

Ismét a már levezetett D_6 és D_7 kifejezést helyettesítjük be, és az eredményt rendezzük, majd ismét bevezetjük a K_8 kifejezést:

$$K_8 = W_{334}W_{445}W_{556}W_{667}W_{778} - u_{34}u_{44}W_{556}W_{667}W_{778} + u_{34}u_{44}u_{67}u_{77}W_{556} - \\ - u_{45}u_{55}W_{334}W_{667}W_{778} + u_{45}u_{55}u_{67}u_{77}W_{334} - \\ - {}_{56}u_{66}W_{334}W_{445}W_{778} + u_{34}u_{44}u_{56}u_{66}W_{778} - \\ - u_{67}u_{77}W_{334}W_{445}W_{556}. \tag{17}$$

Természetesen úgy mint az előző esetben már bemutattuk, bizonyos kiemelésekkel a számítás tovább egyszerűsíthető.

Ezek után felírjuk a végeredményt;

$$D_8 = W_{223}(D_2 - u_{11}u_{12})K_8 - u_{23}u_{33}W_{445}W_{556}W_{667}W_{778}D_2 + \\ + u_{23}u_{33}u_{45}u_{55}W_{667}W_{778}D_2 + \\ + u_{23}u_{33}u_{56}u_{66}W_{445}W_{778}D_2 + \\ + u_{23}u_{33}u_{67}u_{77}W_{445}W_{556}D_2 - \\ - u_{23}u_{33}u_{45}u_{55}u_{67}u_{77}\;D_2. \tag{18}$$

További összevonásokkal:

$$
\begin{aligned}
D_8 = (W_{223}D_2 - u_{12}u_{22})K_8 - u_{23}u_{33}[W_{667}W_{778}(W_{445}W_{556} - u_{45}u_{55}) - \\
- W_{445}(u_{56}u_{66}W_{778} - u_{67}u_{77}W_{556}) - \\
- u_{45}u_{55}u_{67}u_{77}]\, D_2.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Eddig már annyira jutottunk, hogy a K kifejezésére bizonyos szabályosságot lehetett megállapítani abból a szempontból, hogy a tömegszámok növelésénél a végeredményt azonnal felírhassuk. Ezzel kívánunk a következőkben foglalkozni.

E célból a (7), (9), (13) és (17) kifejezéseket vesszük figyelembe. Ezekből a következő megállapítások tehetők:

a) Minden tagban a tényezők száma ugyanaz;

b) ha az első tagban a tényező, tehát a W értékek száma páratlan, úgy a további tagokban e tényezők is páratlanok, ill. ha párosok, akkor párosak maradnak;

c) az egyes tagok tényezőinél az u indexei és a W két első indexe nem lehetnek egyenlőek;

d) ha az u értékek indexeit az egyik tagcsoportnál függőlegesen a másik tagcsoportnál vízszintesen követjük, úgy olyan szabályosságot találunk, amelyet a továbbiakban felhasználhatunk.

Ezek alapján felírhatjuk a K_9-et a következőképpen:

$$
\begin{aligned}
K_9 = W_{334}W_{445}W_{556}W_{667}W_{778}W_{889} & - u_{34}u_{44}W_{556}W_{667}W_{778}W_{889} + \\
& - u_{45}u_{55}W_{334}W_{667}W_{778}W_{889} + \\
& - u_{56}u_{66}W_{334}W_{445}W_{778}W_{889} + \\
& - u_{67}u_{77}W_{334}W_{445}W_{556}W_{889} + \\
& - u_{78}u_{88}W_{334}W_{445}W_{556}W_{887} + \\
& + u_{34}u_{44}u_{56}u_{66}W_{778}W_{889} - \\
& - u_{34}u_{44}u_{56}u_{66}u_{78}u_{88} + \\
& + u_{34}u_{44}u_{67}u_{77}W_{556}W_{889} + \\
& + u_{34}u_{44}u_{78}u_{88}W_{556}W_{667} + \\
& + u_{45}u_{55}u_{67}u_{77}W_{334}W_{889} + \\
& + u_{45}u_{55}u_{78}u_{88}W_{334}W_{667} + \\
& + u_{56}u_{66}u_{78}u_{88}W_{334}W_{445}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Az említett szabályosságok a K_9 kifejezésében is megtalálhatók, és így felírható a kilenc tömegre vonatkozó D_9 determináns:

$$
D_9 = W_{889}D_8 - u_{78}u_{88}D_7. \tag{21}
$$

A behelyettesítés után:

$$\begin{aligned} D_9 = [W_{223}D_2 - u_{11}u_{22}]K_9 - u_{23}u_{33}[&W_{445}W_{556}W_{667}W_{778}W_{889} - \\ -\ &u_{45}u_{55}W_{667}W_{778}W_{889} - \\ -\ &u_{56}u_{66}W_{445}W_{778}W_{889} - \\ -\ &u_{67}u_{77}W_{445}W_{556}W_{889} - \\ -\ &u_{77}u_{78}W_{445}W_{556}W_{667}]D_2. \end{aligned} \tag{22}$$

A számításnál e kifejezésben is ismétlődések találhatók, ami a számítás menetét leegyszerűsítheti. Ennek részletezése elmaradhat, mert a kifejezés jól áttekinthető, és az előzetes számítás anyaga könnyen megállapítható.

Ezek után áttérünk a módszer gyakorlati alkalmazására, és erre nézve példákat mutatunk be. A tömegszámok fokozása az eddigiek után semmi újat sem jelent, és az előzők alapján könnyen elvégezhető.

Ha végigtekintünk a (20) és a (21) alatti kifejezéseken, megtaláljuk azokat a már említett tulajdonságokat, amelyek alkalmasak arra, hogy további tömegszámokra is felírhassuk a kifejezéseket. Minden tagban a tényezők száma ugyanaz, és ha például a K_9-ben a W értékek száma az első tagban páratlan, úgy a további tagcsoportokban ezek száma ugyancsak páratlan. Kövessük a K_9 második csoportjában az u indexeit felülről lefelé ugyanabban az oszlopban, akkor érdekes törvényszerűséget lehet megállapítani. Ugyancsak a K kifejezésében a harmadik csoportban kövessük az u indexeit, vízszintes és függőleges irányban ugyancsak törvényszerűséget találunk. Az indexek kialakításánál figyelemmel kell lenni arra, hogy az egyes tagokban a tényezők száma nem változhat.

II. Gyakorlati alkalmazások

A gyakorlatban az általános eset jóformán alig fordul elő, és a következőkben a levezetett kifejezések alkalmazását mutatjuk be gyakorlati, mégpedig a négyhengeres motorok esetére.

A következő jelölést vezetjük be:

$$l/nm/k,$$

ami annyit jelent, hogy az n tömegű rendszerben a motor egyik oldalán levő független tömegek száma l, a másik oldalon k, tehát a motor hengereinek száma $n—k—l$.

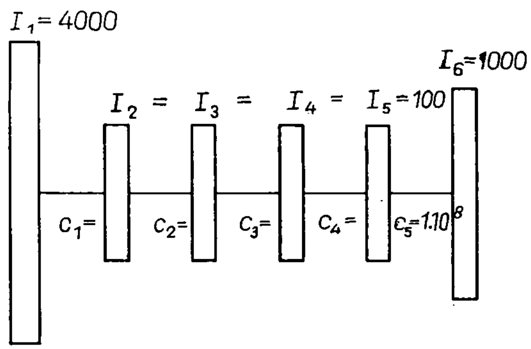
1. A négyhengerű motor mindegyik oldalán 1—1 tömeg van

$1/6m/1$, tehát a négyhengerű motor mindegyik oldalán egy-egy független tömeget találunk. Erre az esetre a változó értékek:

$$u_{11},\ u_{12},\ W_{112} = D_2,\ u_{55},\ u_{56},\ W_{556};$$

az állandó értékek pedig

$$u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{44} = u_{45}\ u = \text{és}\ W_{223} = W_{334} = W_{445} = W.$$



1. ábra

Ezen adatok felhasználásával a (9) alatti kifejezés a következőképpen alakul:

$$\frac{K_6}{u^2} = W_{556}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^2 - 1\right] - \frac{W}{u}\,u_{55}; \tag{9a}$$

a (11) alatti kifejezés pedig a következőképpen alakul ($D_6 = 0$)

$$\frac{K_6}{u^2} = \frac{\dfrac{W}{u}\,W_{556} - u_{55}}{\dfrac{W}{u} - \dfrac{u_{12}}{D_2}}. \tag{11a}$$

Ezek után áttérünk a számítás menetének ismertetésére.

A feladat abban áll $1/6m/1$ rendszernél, hogy megtaláljuk azt az w^2 értéket, amelynél a (9a) és a (11a) alatti K/u^2, tehát e két érték egymással egyenlő.

Az 1. ábrában bemutatott esettel fogunk foglalkozni, és kiszámítjuk a következőket:

$$u_{11} = \frac{1 \cdot 10^8}{4000} = 0{,}025 \cdot 10^6,$$

$$u = u_{12} = u_{22} = u_{23} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = \frac{c_1}{I_2} = \frac{1 \cdot 10}{100} = 1 \cdot 10^6;$$

$$u_{55} = \frac{c_5}{I_5} = \frac{1 \cdot 10^8}{100} = 1 \cdot 10^6;$$

$$u_{56} = \frac{c_5}{I_6} = \frac{1 \cdot 10^8}{1000} = 0{,}1 \cdot 10^6.$$

E kifejezésekből

$$u_{11} + u_{12} = 1{,}025 \cdot 10^6,$$

$$2u = 2 \cdot 10^6,$$

és

$$u_{55} + u_{56} = 1{,}1 \cdot 10^6.$$

I. táblázat

$w^2/10^6$	1	1,4	1,42	1,5	2
$W = w^2 - 2u$	—1	—0,6	0,58	—0,5	0
$W_{556} = w^2 - u_{55} - u_{56}$	—0,1	0,29	0,31	0,4	0,9
W/u	—1	—0,6	—0,58	—0,5	0
$(W/u)^2$	1	0,36	0,336	0,25	0
$D_2 = w^2u_{11} - u_{12}$	—0,025	0,375	0,395	0,476	0,975
K/u^2 (9a)	1	0,424	0,375	0,2	—0,9
K/u^2 (11a)	—0,023	0,36	0,378	0,46	0,98

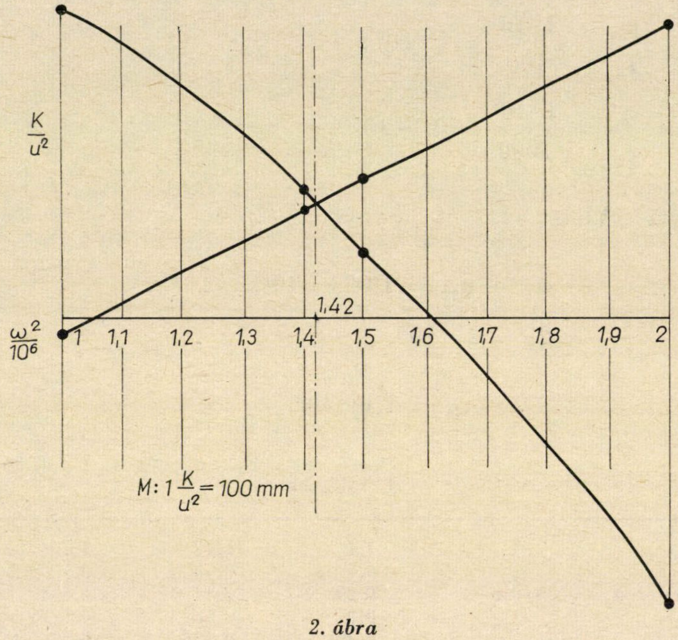
Ezen adatokkal az I. táblázatot állítottuk össze. A táblázat adatait a 2. ábrában találjuk. Ezekből az adatokból az látható, hogy K/u^2 értéke a (9a) kifejezés szerint számítva az egyik helyen negatív, és ugyanezen a helyen (11a) szerint számítva pozitív. A másik végen a (9a) kifejezés szerint számítva pozitív és a (10a) szerint számítva negatív. Ebből következik, hogy a (9a) és a (11a) szerint számított és rajzolt görbéknek metszeniök kell egymást. A metszéspont jelöli ki a keresett w^2 értékét, ami jelen esetben

$$\frac{w^2}{10^6} = 1{,}42\,.$$

Biztonság kedvéért még a$w^2 \cdot 10^6 = 1{,}4$ és 1,5 helyen is kiszámítottuk a K/u^2 értékeit, amivel a görbe helyes menetét biztosíthattuk.

Tehát arra kell törekedni, hogy a két $w^2/10^6$ kiválasztott helyen a K/u^2 oly értékeket vegyenek fel, hogy a két görbe metszése biztosítva legyen, amihez a tárgyalt eset mintául szolgálhat.

Kétségtelen, hogy ez az eljárás lényegesen egyszerűbb, mintha először egy ötödfokú egyenletet kellene felállítani, és azután ennek az egyenletnek a gyökeit kellene megkeresni.



2. ábra

2. A négyhengerű motor egyik oldalán 2, a másik oldalán 1 tömeg van

$2/7m/1$, tehát oly négyhengerű motorról van szó, amelynek egyik oldalán 2, a másik oldalán 1 a független tömegek száma. Erre az esetre a változó értékek:

$$u_{11},\ u_{12},\ u_{22},\ u_{23},\ W_{112},\ W_{223},\ u_{66},\ u_{67}\ W_{667};$$

az állandó értékek pedig

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56}$$

és

$$W = W_{334} = W_{445} = W_{556}.$$

Ezek figyelembevételével a (13) alatti kifejezés a következőképpen alakul:

$$\frac{K_7}{u^3} = W_{667}\frac{W}{u}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^2 - 2\right] - u_{66}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^2 - 1\right]; \qquad \text{(13a)}$$

a (14) alatti kifejezés pedig a következő alakot veszi fel ($D_7 = 6$):

$$\frac{K_7}{u^3} = u_{23} \frac{W_{667}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^2 - 1\right] - \frac{W}{u} u_{66}}{W_{223} - \frac{u_{12}\, u_{22}}{D_2}} . \tag{14a}$$

3. A négyhengerű motor egyik oldalán 3, a másik oldalán 1 tömeg van

$3/8m/1$, tehát oly négyhengerű motorról van szó, amelynek egyik oldalán a független tömegek száma 3, a másik oldalon 1. Erre az esetre a változó értékek:

$$u_{11},\ u_{12},\ u_{22}, u_{23}, u_{33},\ u_{34},\ W_{112},\ W_{223},\ W_{334},\ u_{77},\ u_{78},\ W_{778};$$

az állandó értékek pedig

$$u = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67} \text{ és } W = W_{445} = W_{556} = W_{667}.$$

Ezek figyelembevételével a (17) alatti kifejezés a következőképpen alakul:

$$\frac{K_8}{u^4} = W_{778}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^4 - 3\left(\frac{W}{u}\right)^2 + 1\right] - u_{77}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^3 - 2\frac{W}{u}\right]; \tag{17a}$$

a (18) alatti kifejezés pedig a következő alakot veszi fel ($D_8 = 0$)

$$\frac{K_8}{u^4} = u_{23}\, u_{33} \frac{W_{778}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^3 - 2\frac{W}{u}\right] - u_{77}\left[\left(\frac{W}{u}\right)^2 - 1\right]}{u\left[W_{223} - \frac{u_{12}\, u_{22}}{D_2}\right]} . \tag{18a}$$