

# A GÖMBHÉJ HOMOGÉN DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK PARTIKULÁRIS MEGOLDÁSAI

CSONKA PÁL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA  
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1968. február 23-án]

A szakirodalom a hajlításmentes gömbhéj homogén differenciálegyenletének Fourier-alakú általános megoldását gömb-koordináta-rendszerben vezeti le, s a héj feszültségi állapotát a tényleges fajlagos feszítőerőkkel jellemzi. Ez a tárgyalásmód derékszögű négyszög alaprajzú gömbsüveghéjak esetében több tekintetben kényelmetlen. Az ebből fakadó nehézségek kiküszöbölésére jelen dolgozat az ismert megoldásokat gömbkoordináták helyett derékszögű koordinátákkal fejezi ki, a héj feszültségi állapotát pedig a tényleges feszítőerők helyett az ún. redukált feszítőerőkkel jellemzi. A dolgozat a Fourier-alakú megoldásokon kívül egyes egyéb, a szakirodalomban eddig nem ismertett megoldásokat is bemutat, s mindezen esetekben a redukált feszítőerők képletein felül a feszültségfüggvény egyenletét is megadja.

## I. Bevezetés

A derékszögű négyszög alaprajzú gömbsüveghéjak számítása még az ún. membránelmélet egyszerűsítő feltevései keretében is súlyos matematikai nehézségekkel jár. Ezért a gyakorlat a szóban forgó probléma tárgyalásakor közelítő eljárásához kénytelen folyamodni.

A gyakorlatban alkalmazott közelítő eljárások rendszerint ún. *kerületi módszerek*. Ezek a feladatot két lépésben oldják meg. Első számítási lépésként a feladat *inhomogén* differenciálegyenletének egy partikuláris megoldását állítják elő, mely — természetszerűleg — általában nem teljesíti a feladat kerületi feltételeit. Ezért a számítás második lépésként az inhomogén partikuláris megoldást a *homogén* differenciálegyenlet egyes partikuláris megoldásaival egészítik ki. Ezt a műveletet oly módon hajtják végre, hogy a kiegészített megoldás kellő pontossággal feleljen meg a feladat kerületi feltételeinek is.

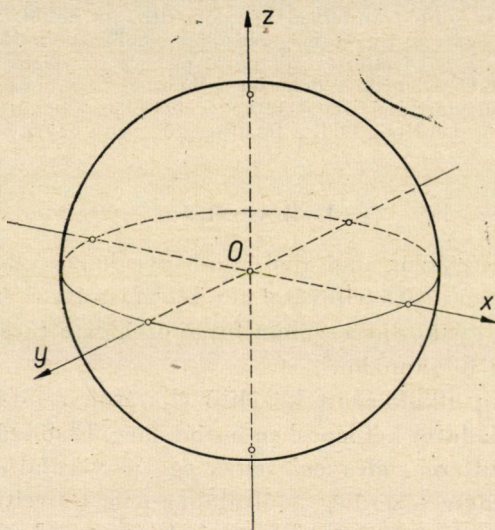
A szakirodalom a gömbhéj differenciálegyenletének megoldását gömb-koordináta-rendszerben adja meg, a héj feszültségi állapotát pedig a felületi koordináta irányokba eső *tényleges* feszítőerő alkotókkal jellemzi. Ez a tárgyalásmód köralaprajzú gömbsüveghéjak esetében igen célszerű, a gyakorlatban sűrűn alkalmazott derékszögű négyszög alaprajzú gömbsüveghéjak esetében azonban elönytelen. Ez utóbbi esetben gömbkoordináták helyett derékszögű koordináták használata, a tényleges feszítőerők helyett pedig az ún. *redukált* feszítőerők bevezetése indokolt.

Jelen dolgozat a derékszögű négyszög alaprajzú gömbsüveghéjak számításához óhajt a tervezőknek segítséget nyújtani. E cél érdekében a gömbsüveg-

hég homogén differenciálegyenletének a számítások során célszerűen felhasználható egyes partikuláris megoldásait derékszögű koordinátarendszerben adja meg, a hég feszültségi állapotát pedig a redukált feszítőerőkkel jellemzi. A bemutatandó megoldások egy része a szakirodalomból ismert Fourier-alakú megoldásnak derékszögű koordinátarendszerbe transzformált változata, másik része azonban a szakirodalomban eddig nem szereplő újszerű megoldás.

## 2. Alapismeretek

Az alábbi fejtegetésekben feltételezzük, hogy a gömbhég membránszerű feszültségi állapotban van, s erőjátéka az ún. membránelmélet egyszerűsítő feltevéseivel kellő pontossággal írható le.



1. ábra. Az  $O(x, y, z)$  koordinátarendszer

Vizsgálataink céljára olyan  $O(x, y, z)$  derékszögű koordinátarendszert vezetünk be, melynek kezdőpontja az  $R$  sugarú gömb középpontjában van,  $z$  tengelye pedig függélyes (1. ábra). A  $z$  tengely pozitív ága felfelé mutat.

Vizsgálataink tárgyát a teljes (a zárt) gömbhég képezi, de a közlendő képletek közvetlenül csak a gömbhég felső,  $z > 0$  felére alkalmazhatók. Itt a hég középfelületének alakja a

$$z = (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2} \quad (1)$$

egyenlettel jellemezhető. Ugyanez az egyenlet a

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad (2)$$

relatív koordináták bevezetésével

$$\zeta = (1 - \xi^2 - \eta^2)^{1/2} \quad (3)$$

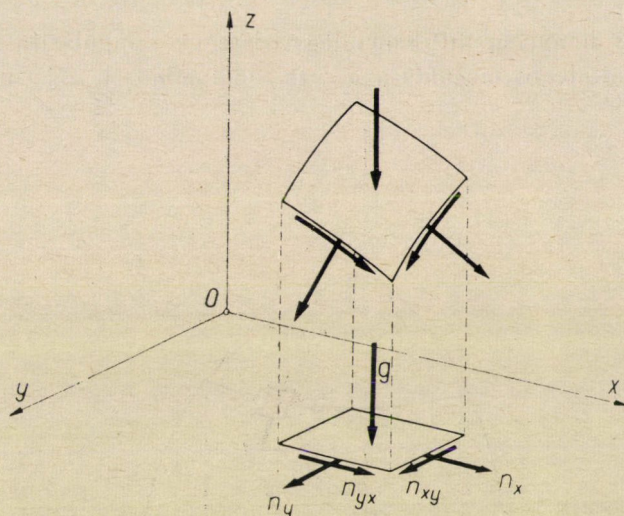
alakban írható.

### 3. A gömbhég homogén differenciálegyenlete

A hég  $x, y$  irányú redukált feszítőerőit

$$n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y$$

betűkkel jelöljük (2. ábra).



2. ábra. Az  $n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y$  redukált feszítőerők

Ezek a redukált feszítőerők, mint ismeretes, az ún. Pucher-féle  $F = F(x, y)$  feszültségfüggvény második deriváltjaival a következőképp fejezhetők ki:

$$n_x = F_{yy}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -F_{yx}, \quad n_y = F_{xx}. \quad (4)$$

Utóbbi képletek a  $\xi, \eta$  relatív koordináták bevezetésével ekként alakulnak:

$$n_x = \frac{1}{R^2} F_{\eta\eta}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{1}{R^2} F_{\xi\eta}, \quad n_y = \frac{1}{R^2} F_{\xi\xi}. \quad (5)$$

A fentiekben szereplő feszültségfüggvény eleget tartozik tenni a membrán-elmélet ismert parciális differenciálegyenletének, mely a gömbhég terheletlen felületrészein

$$(R^2 - y^2) F_{yy} - 2xy F_{xy} + (R^2 - x^2) F_{xx} = 0 \quad (6)$$

alakú. Ugyanez az egyenlet — a gömbhéj homogén differenciálegyenlete — a  $\xi, \eta$  relatív koordináták bevezetésével

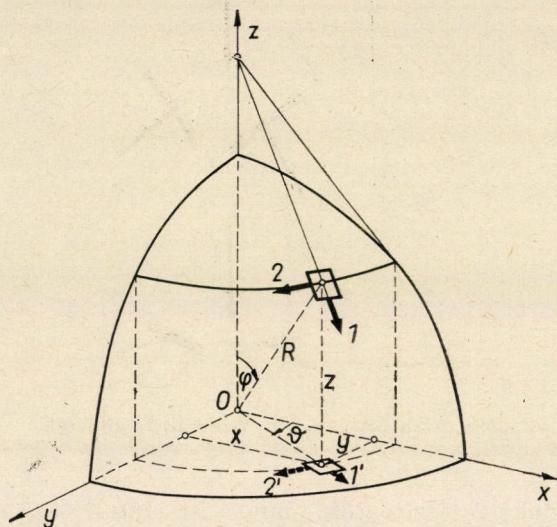
$$(1 - \eta^2) F_{\eta\eta} - 2\xi\eta F_{\xi\eta} + (1 - \xi^2) F_{\xi\xi} = 0 \quad (7)$$

alakban írható.

Az alábbiakban a fenti differenciálegyenletnek egyes partikuláris megoldásait ismertetjük, de tárgyalásainkban csak a függélyes koordináta síkokra szimmetrikus megoldások bemutatására szorítkozunk.

#### 4. A homogén differenciálegyenlet Fourier-alakú reguláris megoldásai

A feladat homogén differenciálegyenletének szingularitással nem bíró Fourier-alakú általános megoldása a szakirodalomból [1–7] ismeretes. Ezen



3. ábra. Jelölések

megoldásoknak megfelelő  $N_1, N_{12}, N_{21}, N_2$  tényleges fajlagos feszítőerők a 3. ábrán szereplő  $(\varphi, \vartheta)$  gömb-koordinátarendszerben a következő ismert képletekkel fejezhetők ki:

$$\begin{aligned} N_1 &= +A_m \frac{\tan^m(\varphi/2)}{\sin^2 \varphi} \cos m\vartheta = +A_m \frac{\sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \cos m\vartheta, \\ N_{12} = N_{21} &= -A_m \frac{\tan^m(\varphi/2)}{\sin^2 \varphi} \sin m\vartheta = -A_m \frac{\sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \sin m\vartheta, \\ N_2 &= -A_m \frac{\tan^m(\varphi/2)}{\sin^2 \varphi} \cos m\vartheta = -A_m \frac{\sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \cos m\vartheta. \end{aligned} \quad (8)$$

Ezekben a képletekben szimmetria okokból

$$m = 2, 4, 6, \dots$$

Az  $m = 0$  esetet, mely a  $\varphi = 0$  helyen szingularitással bír, a tárgyalásból ki kell rekeszteni.

A (8) alatti tényleges feszítőerők alaprajzi vetülete

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_1 \cos \varphi = N_1 \frac{z}{R}, \\ N'_{12} &= N_{12}, \\ N'_{21} &= N_{21} \cos \varphi = N_{21} \frac{z}{R}, \\ N'_2 &= N_2, \end{aligned}$$

ezen vetületi erők redukált (fajlagos) értéke pedig:

$$\begin{aligned} n'_1 &= N'_1 = N_1 \frac{z}{R}, \\ n'_{12} &= N'_{12} = N_{12}, \\ n'_{21} &= \frac{N'_{21}}{\cos \varphi} = N_{21}, \\ n'_2 &= \frac{N'_2}{\cos \varphi} = N_2 \frac{R}{z}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ezek után az  $x, y$  irányú redukált feszítőerők egyszerű feszültség-transzformációval számíthatók:

$$\begin{aligned} n_x &= n'_1 \cos^2 \vartheta + n'_2 \sin^2 \vartheta - n'_{12} \sin 2 \vartheta, \\ n_{xy} &= (n'_1 - n'_2) \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta + n'_{12} \cos 2 \vartheta, \\ n_y &= n'_1 \sin^2 \vartheta + n'_2 \cos^2 \vartheta + n'_{12} \sin 2 \vartheta. \end{aligned}$$

Behelyettesítve ide a (8) és (9) alattiakat, azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{A_m \sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \left[ \left( \frac{z}{R} \cos^2 \vartheta - \frac{R}{z} \sin^2 \vartheta \right) \cos m \vartheta + \sin 2 \vartheta \cdot \sin m \vartheta \right], \\ n_{xy} &= \frac{A_m \sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \left[ \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \frac{\sin 2 \vartheta}{2} \cos m \vartheta - \cos 2 \vartheta \cdot \sin m \vartheta \right], \\ n_y &= \frac{A_m \sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \left[ \left( \frac{z}{R} \sin^2 \vartheta - \frac{R}{z} \cos^2 \vartheta \right) \cos m \vartheta - \sin 2 \vartheta \cdot \sin m \vartheta \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Mint ahogy

$$\begin{aligned} \frac{z}{R} \cos^2 \vartheta - \frac{R}{z} \sin^2 \vartheta &= \cos \varphi \cdot \cos^2 \vartheta - \frac{1}{\cos \varphi} \sin^2 \vartheta = \\ &= \frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{\cos \varphi}, \\ \frac{z}{R} + \frac{R}{z} &= \cos \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\cos \varphi}, \\ \frac{z}{R} \sin^2 \vartheta - \frac{R}{z} \cos^2 \vartheta &= \cos \varphi \cdot \sin^2 \vartheta - \frac{1}{\cos \varphi} \cos^2 \vartheta = \\ &= \frac{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta}{\cos \varphi}, \end{aligned}$$

az előbbi képletek ily alakra hozhatók:

$$\begin{aligned} n_x &= - \frac{A_m \sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \left[ \frac{\sin^2 \vartheta - \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta}{\cos \varphi} \cos m\vartheta - \sin 2\vartheta \cdot \sin m\vartheta \right], \\ n_{xy} &= + \frac{A_m \sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \left[ \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin 2\vartheta}{2} \cos m\vartheta - \cos 2\vartheta \cdot \sin m\vartheta \right], \quad (11) \\ n_y &= - \frac{A_m \sin^{m-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} \left[ \frac{\cos^2 \vartheta - \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \vartheta}{\cos \varphi} \cos m\vartheta + \sin 2\vartheta \cdot \sin m\vartheta \right]. \end{aligned}$$

a) az  $m = 2$  esetAz itt tárgyalandó esetben az  $x$ ,  $y$  irányú redukált feszítőerők (11) képletei a

$$\xi \equiv \frac{x}{R}, \quad \eta \equiv \frac{y}{R},$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \equiv \zeta, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \equiv \varrho,$$

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\xi}{\varrho}, \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\eta}{\varrho}$$

helyettesítéssel a következőképp alakulnak:

$$\begin{aligned} n_x &= - \frac{A_2}{(1 + \zeta)^2 \varrho^4} \left[ \frac{\eta^2 - \xi^2 \zeta^2}{\zeta} (\xi^2 - \eta^2) - 4 \xi^2 \eta^2 \right], \\ n_{xy} &= + \frac{A_2}{(1 + \zeta)^2 \varrho^4} \xi \eta (\xi^2 - \eta^2) \frac{(1 - \zeta)^2}{\zeta}, \quad (12) \\ n_y &= - \frac{A_2}{(1 + \zeta)^2 \varrho^4} \left[ \frac{\xi^2 - \eta^2 \zeta^2}{\zeta} (\xi^2 - \eta^2) + 4 \xi^2 \eta^2 \right]. \end{aligned}$$

b) Az  $m = 4$  eset

Ilyenkor az  $x, y$  irányú redukált feszítőerők (11) képletei a

$$\sin 4 \vartheta = 4 \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta),$$

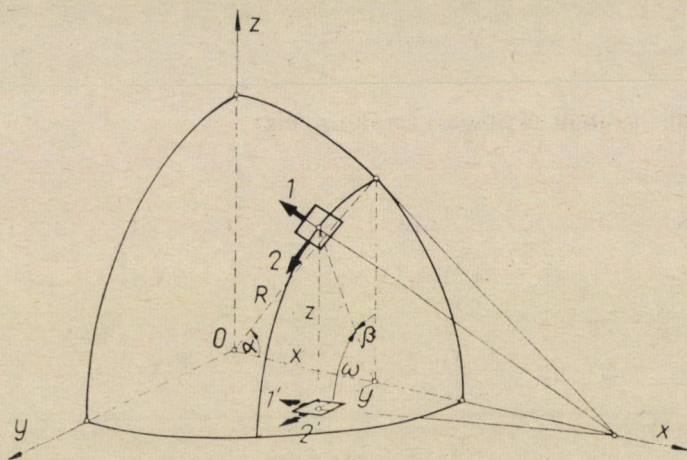
$$\cos 4 \vartheta = \cos^4 \vartheta - 6 \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta$$

összefüggések figyelembevételével ekként írhatók:

$$\begin{aligned} n_x &= -\frac{A^4}{(1+\zeta)^4 \rho^4} \left[ \frac{\eta^2 - \xi^2 \zeta^2}{\zeta} (\xi^4 - 6 \xi^2 \eta^2 + \eta^4) - 8 \xi^2 \eta^2 (\xi^2 - \eta^2) \right], \\ n_{xy} &= +\frac{A_4}{(1+\zeta)^4 \rho^4} \left[ \frac{1+\zeta^2}{\zeta} \xi \eta (\xi^4 - 6 \xi^2 \eta^2 + \eta^4) - 4 \xi \eta (\xi^2 - \eta^2)^2 \right], \\ n_y &= -\frac{A_4}{(1+\zeta)^4 \rho^4} \left[ \frac{\xi^2 - \eta^2 \zeta^2}{\zeta} (\xi^4 - 6 \xi^2 \eta^2 + \eta^4) + 8 \xi^2 \eta^2 (\xi^2 - \eta^2) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

### 5. A homogén differenciálegyenlet Fourier-alakú szinguláris megoldásai

A gömbhéj homogén differenciálegyenletének a  $z = 0$  metszet egyes pontjain szingularitással bíró Fourier-alakú általános megoldása a szakirodalmól szintén [1–7] ismert. E megoldások közül a feladat szimmetria követelményeinek megfelelő megoldások esetében az  $N_1, N_{12}, N_{21}, N_2$  tényleges feszítőerők a 4. ábrán szereplő  $0$  ( $\alpha, \beta$ ) gömb-koordinátarendszerben a követ-



4. ábra. Jelölések

kezőképp fejezhető ki:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{B_m}{2 \sin^2 \alpha} \left[ + \tan^m(\alpha/2) + \cot^m(\alpha/2) \right] \cos m\beta = \\
 &= \frac{B_m}{2 \sin^{m+2} \alpha} \left[ + (1 - \cos \alpha)^m + (1 + \cos \alpha)^m \right] \cos m\beta, \\
 N_{12} = N_{21} &= \frac{B_m}{2 \sin^2 \alpha} \left[ - \tan^m(\alpha/2) + \cot^m(\alpha/2) \right] \sin m\beta = \\
 &= \frac{B_m}{2 \sin^{m+2} \alpha} \left[ - (1 - \cos \alpha)^m + (1 + \cos \alpha)^m \right] \sin m\beta, \\
 N_2 &= \frac{B_m}{2 \sin^2 \alpha} \left[ - \tan^m(\alpha/2) - \cot^m(\alpha/2) \right] \cos m\beta = \\
 &= \frac{B_m}{2 \sin^{m+2} \alpha} \left[ - (1 - \cos \alpha)^m - (1 + \cos \alpha)^m \right] \cos m\beta.
 \end{aligned} \tag{14}$$

A fenti képletekben

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Az  $N_1, N_{12}, N_{21}, N_2$  tényleges feszítőerők alaprajzi vetülete:

$$N'_1 = N_1 \cos \gamma = N_1 \frac{u}{v},$$

$$N'_{12} = N_{12} \cos \beta = N_{12} \frac{z}{s},$$

$$N'_{21} = N_{21} \cos \gamma = N_{21} \frac{u}{v},$$

$$N'_2 = N_2 \cos \beta = N_2 \frac{z}{s},$$

e vetületi erők redukált (fajlagos) értéke pedig:

$$n'_1 = \frac{N'_1}{\cos \beta} = N_1 \frac{u}{v} \cdot \frac{s}{z},$$

$$n'_{12} = \frac{N'_{12}}{\cos \beta} = N_{12} \frac{z}{s} \cdot \frac{s}{z} = N_{12},$$

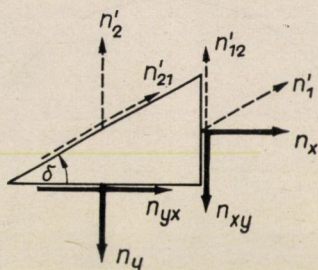
$$n'_{21} = \frac{N'_{21}}{\cos \gamma} = N_{21} \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u} = N_{21},$$

$$n'_2 = \frac{N'_2}{\cos \gamma} = N_2 \frac{z}{s} \cdot \frac{v}{u}.$$



Ezek után az  $x, y$  irányú redukált feszítőerőket az 5. ábrán alaprajzban feltüntetett héjelem egyensúlyi vizsgálatával határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
 n_x &= n'_1 \cos \delta = n'_1 \frac{t}{u} = N_1 \frac{s t}{v z}, \\
 n_{xy} &= n'_{12} - n'_1 \sin \delta = -N_{12} - N_1 \frac{s y}{v z}, \\
 n_y &= \frac{n'_2}{\cos \delta} + n'_{21} \tan \delta - n_{xy} \tan \delta = \\
 &= N_2 \frac{v z}{s t} + 2 N_{12} \frac{y}{t} + N_1 \frac{s y^2}{t v z}.
 \end{aligned}$$



5. ábra. A vizsgált héjelem alaprajzi vetülete

Figyelembe véve, hogy

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{R^2 - x^2} = R \sqrt{1 - \xi^2}, \\
 t &= \frac{s^2}{x} = \frac{R^2 - x^2}{x} = \frac{R(1 - \xi^2)}{\xi}, \\
 v &= \frac{R s}{x} = \frac{R \sqrt{R^2 - x^2}}{x} = \frac{R \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}, \\
 z &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = R \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} = R \zeta,
 \end{aligned}$$

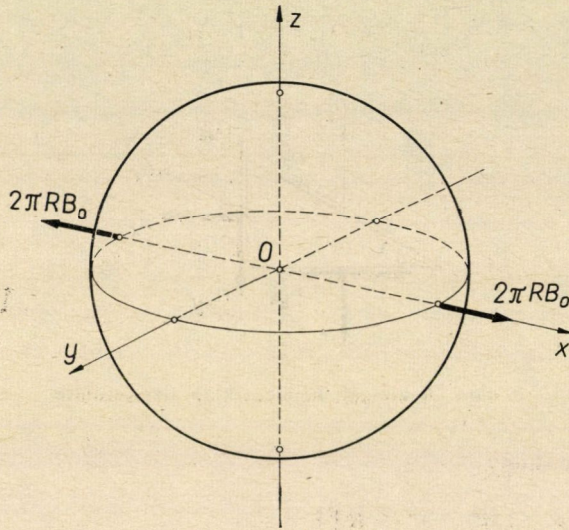
az előbbi képleteket ekként írhatjuk:

$$\begin{aligned}
 n_x &= N_1 \frac{1 - \xi^2}{\zeta}, \\
 n_{xy} &= -N_{12} - N_1 \frac{\xi \eta}{\zeta}, \\
 n_y &= N_2 \frac{\zeta}{1 - \xi^2} + 2 N_{12} \frac{\xi \eta}{1 - \xi^2} + N_1 \frac{\xi^2 \eta^2}{(1 - \xi^2)\zeta}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

a) Az  $m = 0$  eset

$\alpha$ ) Az alapfeladat. Az általános esetre vonatkozó (14) képletek az  $m = 0$  esetben a következőképp egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{B_0}{\sin^2 \alpha} = \frac{B_0 R^2}{R^2 - x^2} = \frac{B_0}{1 - \xi^2}, \\ N_{12} &= N_{21} = 0, \\ N_2 &= -\frac{B_0}{\sin^2 \alpha} = -\frac{B_0 R^2}{R^2 - x^2} = -\frac{B_0}{1 - \xi^2}. \end{aligned} \quad (16)$$



6. ábra. Gömbhéj, két átellenes pontban egy-egy ellentett ponterővel terhelve

Ezen értékeket a (15) képletekbe behelyettesítve, az alábbi képletcsoportot kapjuk:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{B_0}{\zeta}, \\ n_{xy} &= -\frac{B_0 \xi \eta}{(1 - \xi^2) \zeta}, \\ n_y &= \frac{B_0 (\xi^2 \eta^2 - \zeta^2)}{(1 - \xi^2)^2 \zeta}. \end{aligned} \quad (17)$$

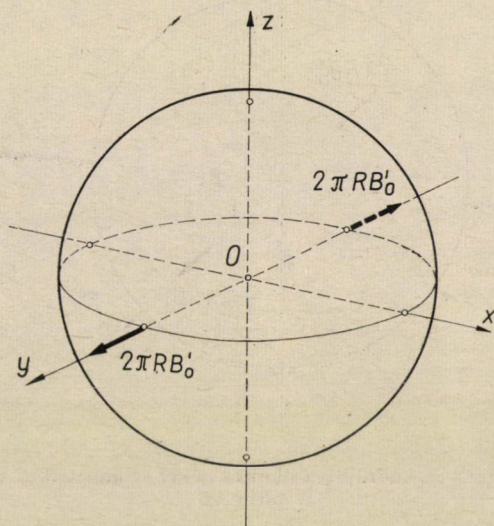
A feszítőerők fenti rendszerének megfelelő feszültségfüggvény könnyen előállítható:

$$F = B_0 R^2 \left( \eta \arcsin \frac{\eta}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \zeta \right). \quad (18)$$

Egyszerű számítással igazolható, hogy a (17), (18) képletek a 6. ábrán feltüntetett alapfeladat megoldását képezik.

$\beta$ ) Az alapfeladat első változata. Az  $\alpha$ ) alatt tárgyalt alapfeladathoz hasonlóan tárgyalható a 7. ábrán látható feladat is. Ez esetben

$$F = B'_0 R^2 \left( \xi \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{1-\eta^2}} + \zeta \right), \tag{19}$$



7. ábra. Gömbhéj, két áttelnes pontban egy-egy ellentett ponterővel terhelve

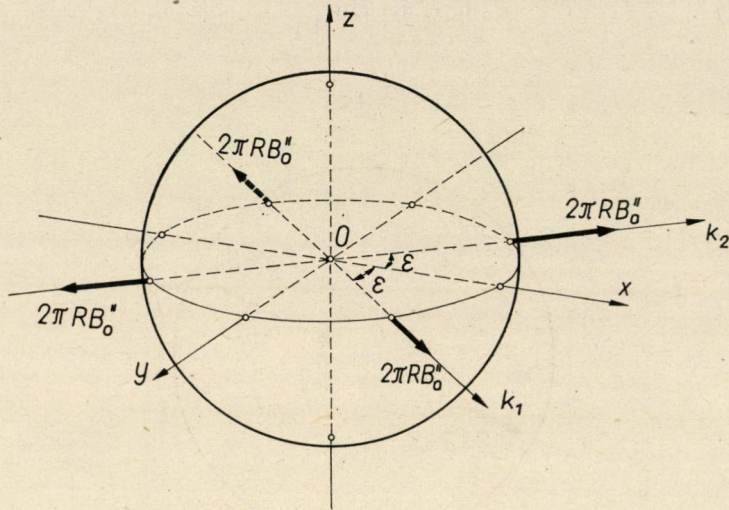
az  $x, y$  irányú redukált feszítőerők pedig:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{B'_0 (\xi^2 \eta^2 - \zeta^2)}{(1 - \eta^2)^2 \zeta}, \\ n_{xy} &= - \frac{B'_0 \xi \eta}{(1 - \eta^2) \zeta}, \\ n_y &= \frac{B'_0}{\zeta}. \end{aligned} \tag{20}$$

$\gamma$ ) Az alapfeladat második változata. Az  $\alpha$ ) alatt tárgyalt alapfeladat megoldását ismerve, azonnal előállíthatjuk a 8. ábrán feltüntetett összetett feladat

megoldását is. Ebben az esetben a feszültségfüggvény két ellentett erőből álló két teherrészletnek megfelelő két részből állítható elő:

$$F = B_0'' R^2 \left( \lambda_1 \arcsin \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \kappa_1^2}} + \lambda_2 \arcsin \frac{\lambda_2}{\sqrt{1 - \kappa_2^2}} + 2\zeta \right). \quad (21)$$



8. ábra. Gömbhéj, a függélyes koordináta síkokra nézve szimmetrikus elrendezésű ponterőkkel terhelve

A fenti képletben

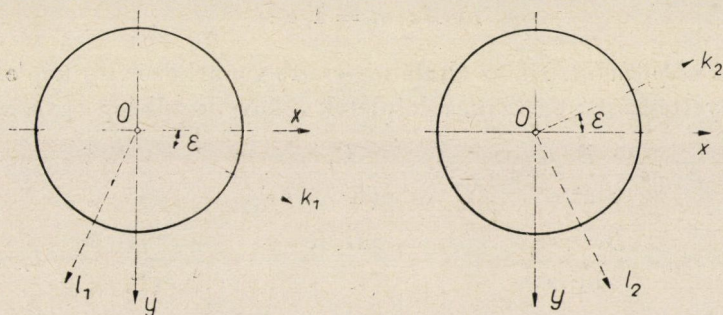
$$\kappa_1 = \frac{k_1}{R} = \xi \cos \varepsilon + \eta \sin \varepsilon,$$

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{R} = -\xi \sin \varepsilon + \eta \cos \varepsilon, \quad (22)$$

$$\kappa_2 = \frac{k_2}{R} = \xi \cos \varepsilon - \eta \sin \varepsilon,$$

$$\lambda_2 = \frac{l_2}{R} = \xi \sin \varepsilon + \eta \cos \varepsilon.$$

A  $k_1, l_1, k_2, l_2$  koordináták értelmét a 9. ábra magyarázza.

9. ábra. Az  $O(k_1, l_1)$  és  $O(k_2, l_2)$  koordináta-rendszer

Ismervén a feszültségfüggvényt, az  $x, y$  irányú redukált feszítőerőket az alábbi képletek szerint számíthatjuk:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} \right) \cos^2 \varepsilon + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2^2} \right) \sin^2 \varepsilon + \\
 &\quad + 2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1 \cdot \partial \lambda_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2 \cdot \partial \lambda_2} \right) \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon, \\
 n_{xy} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2^2} \right) \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon - \\
 &\quad - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1 \cdot \partial \lambda_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2 \cdot \partial \lambda_2} \right) (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon), \\
 n_y &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} \right) \sin^2 \varepsilon + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2^2} \right) \cos^2 \varepsilon - \\
 &\quad - 2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1 \cdot \partial \lambda_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2 \cdot \partial \lambda_2} \right) \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{23}$$

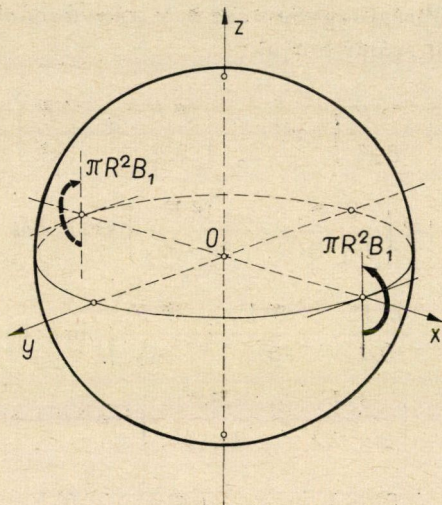
A jelen esetben

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} &= \frac{B_0''}{\zeta}, & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} &= \frac{B_0''}{\zeta}, \\
 \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1 \cdot \partial \lambda_1} &= \frac{B_0'' \kappa_1 \lambda_1}{(1 - \kappa_1^2) \zeta}, & \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2 \cdot \partial \lambda_2} &= \frac{B_0'' \kappa_2 \lambda_2}{(1 - \kappa_2^2) \zeta}, \\
 \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1^2} &= \frac{B_0'' (\kappa_1^2 \lambda_1^2 - \zeta^2)}{(1 - \kappa_1^2)^2 \zeta}, & \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2^2} &= \frac{B_0'' (\kappa_2^2 \lambda_2^2 - \zeta^2)}{(1 - \kappa_2^2)^2 \zeta}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

b) Az  $m = 1$  eset

$\alpha$ ) Az *alappfeladat*. Ha az általános esetre vonatkozó (14) képletekben az  $m = 1$  helyettesítést végezzük, e képletek a következőképp egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{B_1}{\sin^3 \alpha} \cos \beta = \frac{B_1 R^3 z}{(R^2 - x^2)^2} = \frac{B_1 \zeta}{(1 - \xi^2)^2}, \\ N_{12} = N_{21} &= \frac{B_1 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \sin \beta = \frac{B_1 R^2 xy}{(R^2 - x^2)^2} = \frac{B_1 \xi \eta}{(1 - \xi^2)^2}, \\ N_2 &= -\frac{B_1}{\sin^3 \alpha} \cos \beta = -\frac{B_1 R^3 z}{(R^2 - x^2)^2} = -\frac{B_1 \zeta}{(1 - \xi^2)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$



10. ábra. Gömbhéj, két átellenes pontban egyegy ellentett erőpárral terhelve

Ezen értékek behelyettesítésével a (15) képletek az alábbi alakot öltik:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{B_1}{1 - \xi^2}, \\ n_{xy} &= -\frac{2 B_1 \xi \eta}{(1 - \xi^2)^2}, \\ n_y &= \frac{B_1 (3 \xi^2 \eta^2 - \zeta^2)}{(1 - \xi^2)^3}. \end{aligned} \quad (26)$$

A feszítőerők fenti rendszerének megfelelő feszültségfüggvény:

$$F = \frac{B_1 R^2}{2} \left( \frac{\eta^2}{1 - \xi^2} - \frac{\xi}{2} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right). \quad (27)$$

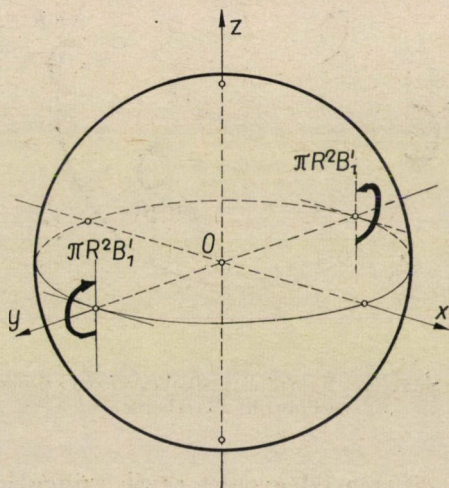
A (26), (27) képletek a 10. ábrán látható alapfeladatot oldják meg.

β) Az alapfeladat első változata. Az α) alatt tárgyalt alapeset képleteihez hasonló képletek érvényesek a 11. ábrán feltüntetett feladat esetében is. Ilyenkor

$$F = \frac{B'_1 R^2}{2} \left( \frac{\xi^2}{1 - \eta^2} - \frac{\eta}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right), \tag{28}$$

és ennek megfelelően

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{B'_1 (3 \xi^2 \eta^2 - \xi^2)}{(1 - \eta^2)^3}, \\ n_{xy} &= -\frac{2 B'_1 \xi \eta}{(1 - \eta^2)^2}, \\ n_y &= \frac{B'_1}{1 - \eta^2}. \end{aligned} \tag{29}$$



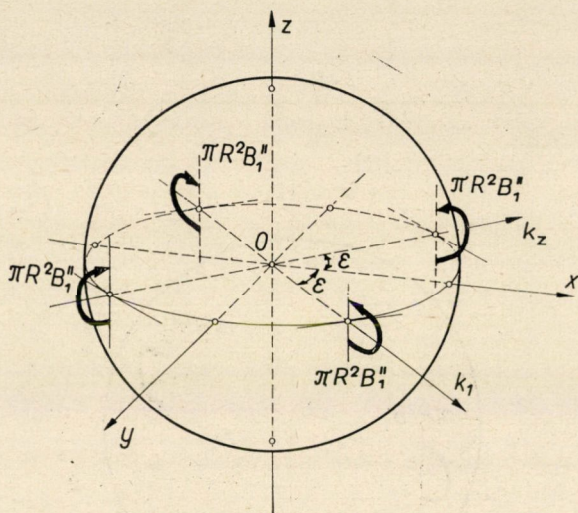
11. ábra. Gömbhéj, két átellenes pontban egy-egy ellentett erőpárral terhelve

γ) Az alapfeladat második változata. Az α) alatt tárgyalt alapfeladat képletanyagának felhasználásával tárgyalható a 12. ábrán vázolt összetett feladat is. Ennek feszültségfüggvénye a két ellentett erőpárból álló két erőrendszernek megfelelő két részből tehető össze, s a (22) képlettel értelmezett, illetve a 9. ábrán magyarázott jelölésekkel így fejezhető ki:

$$F = \frac{B'_1 R^2}{2} \left( \frac{\lambda_1^2}{1 - \kappa_1^2} - \frac{\kappa_1}{2} \ln \frac{1 + \kappa_1}{1 - \kappa_1} + \frac{\lambda_2^2}{1 - \kappa_2^2} - \frac{\kappa_2}{2} \ln \frac{1 + \kappa_2}{1 - \kappa_2} \right). \tag{30}$$

Az  $x, y$  irányú redukált feszítőerők a (23) képletek szerint számíthatók. A jelen esetben

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} &= \frac{B_1''}{1 - \kappa_1^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} &= \frac{B_1''}{1 - \kappa_2^2}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1 \cdot \partial \lambda_1} &= \frac{2 B_1'' \kappa_1 \lambda_1}{(1 - \kappa_1^2)^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2 \cdot \partial \lambda_2} &= \frac{2 B_1'' \kappa_2 \lambda_2}{(1 - \kappa_2^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1^2} &= \frac{B_1''(3 \kappa_1^2 \lambda_1^2 - \zeta^2)}{(1 - \kappa_1^2)^3}, & \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2^2} &= \frac{B_1''(3 \kappa_2^2 \lambda_2^2 - \zeta^2)}{(1 - \kappa_2^2)^3}. \end{aligned} \quad (31)$$



12. ábra. Gömbhég, a függélyes koordináta síkokra nézve szimmetrikus elrendezésű erőpárokkal terhelve

## 6. A homogén differenciálegyenlet egyéb szinguláris megoldásai

Az alábbiakban a gömbhég homogén differenciálegyenletének néhány eddig nem ismert oly megoldását mutatjuk be, mely a  $z = 0$  metszet egyes pontjaiban szingularitással bír.

### a) megoldás

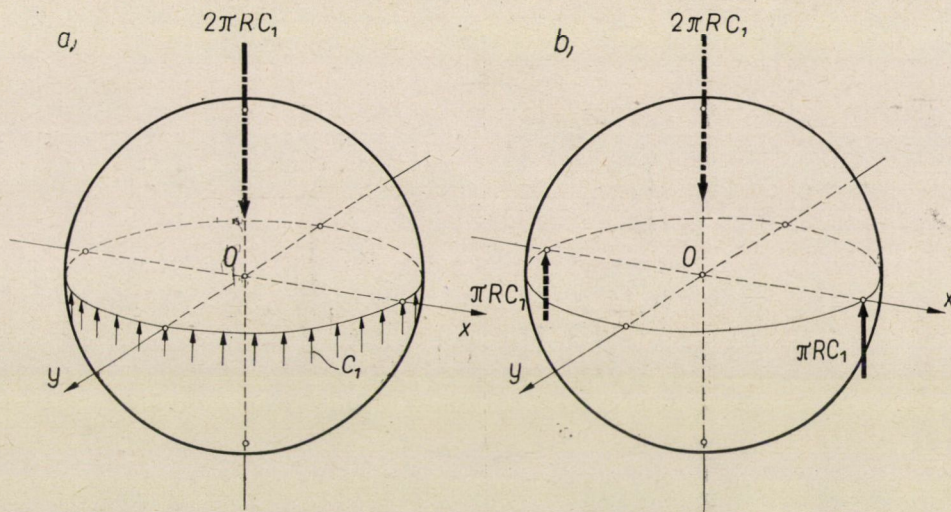
$\alpha$ ) *Az alapfeladat.* Az alábbiakban tárgyalandó feladat a  $p = C_1/2 R = \text{konst.}$  terheléssel terhelt gömbhég inhomogén differenciálegyenletének két partikuláris megoldásából, e két megoldás különbségeként állítható elő. Az egyik partikuláris megoldás esetében a hég a  $z = 0$  metszet mentén egyenletesen megoszló



függélyes erőkkkel van megtámasztva (13a ábra); a másik partikuláris megoldás esetében a héjat a  $z = 0$  metszet két átellenes pontján két függélyes ponterő támasztja (13b ábra). A szóban forgó két terhelési eset különbségként a 14. ábrán látható terhelési eset jön létre.

Egyszerű számítással igazolhatóan a 13a ábrán vázolt terhelési esetben a feladat feszültségfüggvénye

$$F_I = \frac{C_1 R^2}{2} \left[ \ln(1 + \zeta) - \varrho^2 - \zeta \right], \quad (31a)$$



13. ábra. A  $p = C_1/2R = \text{konst}$  teherrel (önsúlyteherrel) terhelt gömbhéj két különleges megtámasztási esete (az eredményvonallal jelölt függélyes erő a héjra ható terhek eredőjét jelenti)

a 13b ábrán feltüntetett terhelési esetben pedig

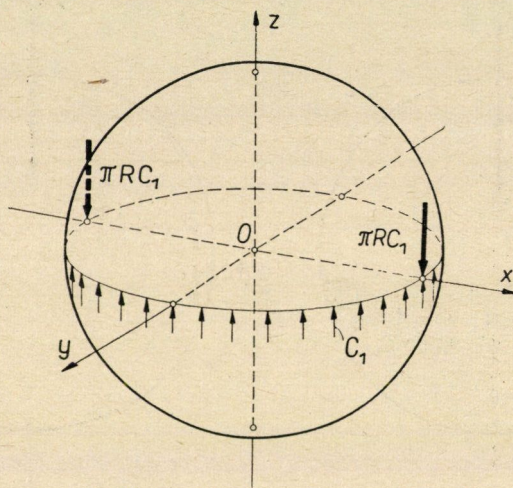
$$F_{II} = \frac{C_1 R^2}{2} \left[ \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln(1 + \xi) + \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln(1 - \xi) - \frac{\varrho^2}{2} \right]. \quad (31b)$$

A 14. ábrán vázolt alapfeladat feszültségfüggvénye az előbbi két feszültségfüggvény különbsége:

$$F = \frac{C_1 R^2}{2} \left[ \ln(1 + \zeta) - \frac{\varrho^2}{2} - \zeta - \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln(1 + \xi) - \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln(1 - \xi) \right]. \quad (32)$$

Ismervén a feszültségfüggvényt, az  $x$ ,  $y$  irányú redukált feszítőerőket az (5) képletek utasítása szerint határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{C_1}{2} \cdot \frac{(1 - \xi^2 + \zeta)}{(1 + \zeta)^2 \zeta}, \\ n_{xy} &= -\frac{C_1}{2} \cdot \frac{\xi \eta}{(1 + \zeta)^2 \zeta}, \\ n_y &= \frac{C_1}{2} \left[ \frac{1 - \eta^2 + \zeta}{(1 + \zeta)^2 \zeta} - \frac{1}{1 - \xi^2} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$



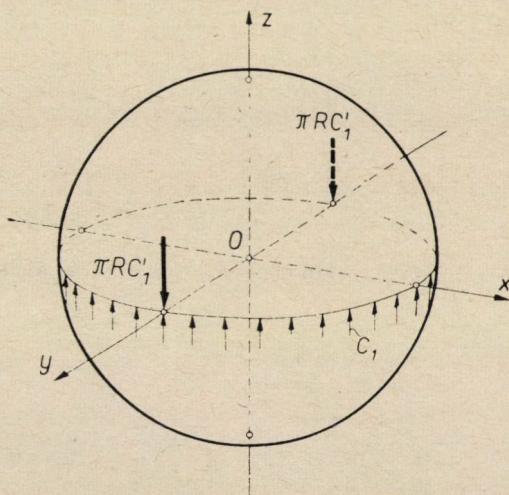
14. ábra. Egyensúlyban levő erővel terhelt gömbhøj

$\beta$ ) Az alapeladat első változata. Az  $\alpha$ ) alatti alapeladathoz hasonlóan tárgyalható a 15. ábrán feltüntetett feladat is. Ez esetben a feszültségfüggvény

$$\begin{aligned} F &= \frac{C'_1 R^2}{2} \left[ \ln(1 + \zeta) - \frac{\varrho^2}{2} - \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (1 + \eta) \ln(1 + \eta) - \frac{1}{2} (1 - \eta) \ln(1 - \eta) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

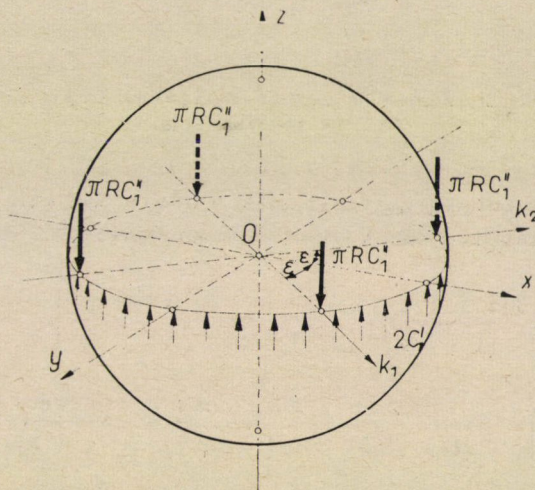
a redukált feszítőerők pedig:

$$\begin{aligned} n_x &+ \frac{C'_1}{2} \left[ \frac{1 - \xi^2 + \zeta}{(1 + \zeta)^2 \zeta} - \frac{1}{1 - \eta^2} \right], \\ n_{xy} &= -\frac{C'_1}{2} \cdot \frac{\xi \eta}{(1 + \zeta)^2 \zeta}, \\ n_y &= \frac{C'_1}{2} \cdot \frac{1 - \eta^2 + \zeta}{(1 + \zeta)^2 \zeta}. \end{aligned} \quad (35)$$



15. ábra. Egyensúlyban levő erővel terhelt gömbhéj

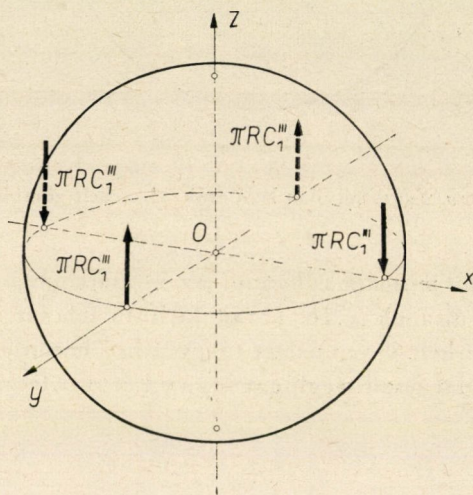
$\gamma$ ) Az alapeladat második változata. Az  $\alpha$ ) alatt megismert képletek egyszerű lehetőséget nyújtanak a 16. ábrán látható feladat megoldására is. Ez esetben a gömbhéj terhelése az  $\alpha$ ) alatt tárgyalthoz hasonló két terhelési részre bontható fel, s a feladat feszültségfüggvénye e két rész feszültségfüggvényének



16. ábra. Gömbhéj, a függélyes koordináta síkokra nézve szimmetrikus elrendezésű erővel terhelve

összegeként állítható elő:

$$\begin{aligned}
 F = \frac{C_1'' R^2}{2} & \left[ 2 \ln(1 + \zeta) - \varrho^2 - 2\zeta - \right. \\
 & - \frac{1}{2} (1 + \kappa_1) \ln(1 + \kappa_1) - \frac{1}{2} (1 - \kappa_1) \ln(1 - \kappa_1) - \\
 & \left. - \frac{1}{2} (1 + \kappa_2) \ln(1 + \kappa_2) - \frac{1}{2} (1 - \kappa_2) \ln(1 - \kappa_2) \right]. \quad (36)
 \end{aligned}$$



17. ábra. Gömbhéj, a függélyes koordináta síkokra nézve szimmetrikus elrendezésű ponterőkkel terhelve

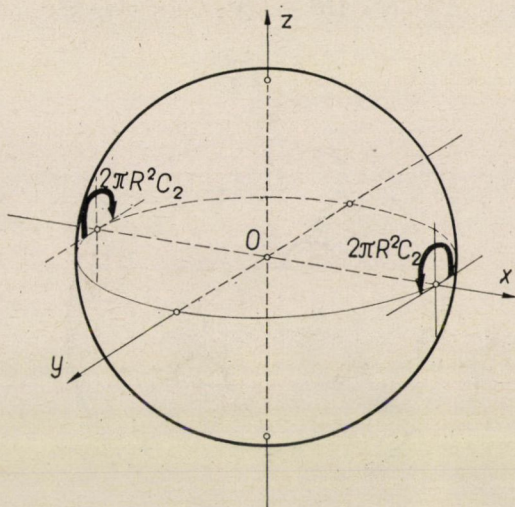
Ismervén a feszültségfüggvényt, az  $x$ ,  $y$  irányú redukált feszítőerők a (23) képletek szerint számíthatók. A számítás eredménye:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \frac{C_1''}{2} \left[ \frac{2(1 - \xi^2 + \zeta)}{(1 + \zeta)^2 \zeta} - \frac{\sin^2 \varepsilon}{1 - \kappa_1^2} - \frac{\sin^2 \varepsilon}{1 - \kappa_2^2} \right], \\
 n_{xy} &= \frac{C_1''}{2} \left[ - \frac{2\xi\eta}{(1 + \zeta)^2 \zeta} + \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{1 - \kappa_1^2} - \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{1 - \kappa_2^2} \right], \quad (37) \\
 n_y &= \frac{C_1''}{2} \left[ \frac{2(1 - \eta^2 + \zeta)}{(1 + \zeta)^2 \zeta} - \frac{\cos^2 \varepsilon}{1 - \kappa_1^2} - \frac{\cos^2 \varepsilon}{1 - \kappa_2^2} \right].
 \end{aligned}$$

A fenti képletekben szereplő  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  mennyiségek a (22) képletek szerint számítandók.

δ) Az alappeladat harmadik változata. Egyszerű volta miatt itt mutatjuk be a 17. ábrán feltüntetett feladat megoldását is. Ez esetben a feszültségfüggvény a (32) és (34) alatti feszültségfüggvények különbségeként állítható elő:

$$F = \frac{C_1''' R^2}{4} \left[ - (1 + \xi) \ln (1 + \xi) - (1 - \xi) \ln (1 - \xi) + (1 + \eta) \ln (1 + \eta) + (1 - \eta) \ln (1 - \eta) \right]. \quad (38)$$



18 ábra. Gömbhéj, két átellenes pontban egy-egy ellentett erőpárral terhelve

Hasonlóképp a (33) és (35) alattiak különbségeként számíthatók a redukált feszültségek is:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{C_1'''}{2(1 - \eta^2)}, \\ n_{xy} &= 0, \\ n_y &= - \frac{C_1'''}{2(1 - \xi^2)}. \end{aligned} \quad (39)$$

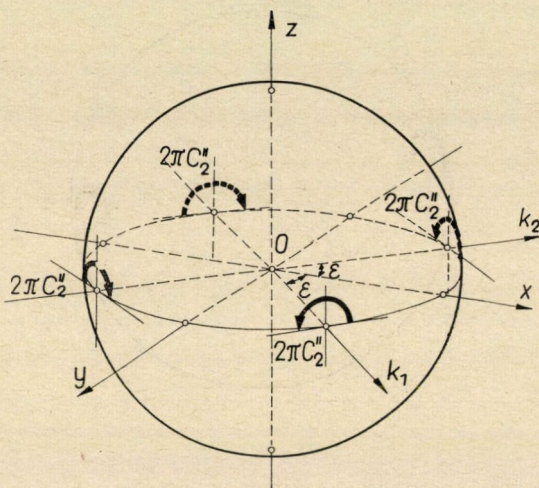
b) megoldás

Ennek levezetéséhez a 18. ábrán feltüntetett — a függélyes koordináta síkokra nézve *nem szimmetrikus* — feladat alábbi megoldásából indulunk ki:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0, \\ N_{12} = N_{21} &= - \frac{C_2 R^2}{R^2 - x^2} = - \frac{C_2}{1 - \xi^2}, \\ N_2 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

A fenti tényleges feszítőerőknek megfelelő  $x, y$  irányú redukált feszítőerők a (15) képletek szerint határozhatók meg:

$$\begin{aligned} n_x &= 0, \\ n_{xy} &= + \frac{C_2 R^2}{R^2 - x^2} = + \frac{C_2}{1 - \xi^2}, \\ n_y &= - \frac{2 C_2 R^2 x y}{(R^2 - x^2)^2} = - \frac{2 C_2 \xi \eta}{(1 - \xi^2)^2}. \end{aligned} \quad (41)$$



19. ábra. Gömbhéj, a függélyes koordináta síkokra nézve szimmetrikus elrendezésű erőpárokkal terhelve

Maga a feszültségfüggvény is könnyen megadható:

$$F = - \frac{C_2 R^2}{2} \eta \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi}. \quad (42)$$

Ezen előkészítés után hozzáláthatunk a 19. ábrán feltüntetett — a függőleges koordinátasíkokra *szimmetrikus* — feladat megoldásához. A feladat feszültségfüggvényét a 18. ábrán feltüntetett terhelési esethez hasonló két részből rakjuk össze. Ekként eljárva, a (22) képletekkel értelmezett, illetve a 9. ábrán magyarázott jelölésekkel a következő kifejezéshez jutunk:

$$F = - \frac{C_2'' R^2}{2} \left( \lambda_1 \ln \frac{1 + \kappa_1}{1 - \kappa_1} - \lambda_2 \ln \frac{1 + \kappa_2}{1 - \kappa_2} \right). \quad (43)$$

Ezután az  $x, y$  irányú redukált feszítőerők a (23) képletek utasítása szerint számíthatók. A számítás eredménye:

$$\begin{aligned}
 n_x &= 2 C_2'' \sin \varepsilon \left[ \frac{-\cos \varepsilon + \xi \kappa_1}{(1 - \kappa_1^2)^2} - \frac{\cos \varepsilon + \xi \kappa_2}{(1 - \kappa_2^2)^2} \right], \\
 n_{xy} &= C_2'' [(1 - \xi^2) \cos^2 \varepsilon - (1 - \eta^2) \sin^2 \varepsilon] \cdot \left[ \frac{1}{(1 - \kappa_1^2)^2} - \frac{1}{(1 - \kappa_2^2)^2} \right], \\
 n_y &= 2 C_2'' \cos \varepsilon \left[ \frac{\sin \varepsilon - \eta \kappa_1}{(1 - \kappa_1^2)^2} + \frac{\sin \varepsilon + \eta \kappa_2}{(1 - \kappa_2^2)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{44}$$

A fenti képletekben szereplő  $\kappa_1, \lambda_1$  és  $\kappa_2, \lambda_2$  mennyiségek a (22) képletek szerint számítandók.

c) megoldás

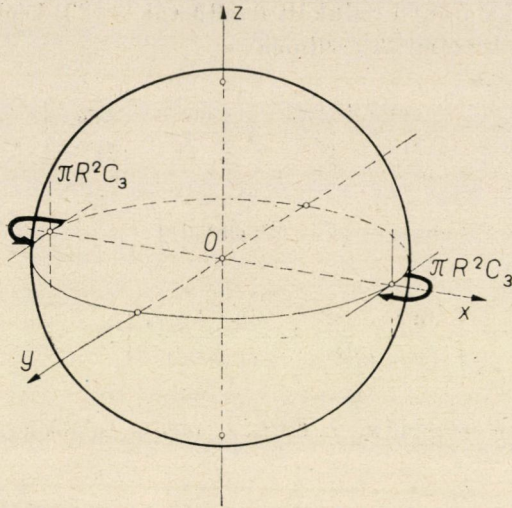
Ezen megoldás előállítására a 20. ábrán vázolt feladatból indulunk ki, mely csak annyiban tér el a 10. ábrán feltüntetett feladattól, hogy a terhelő erőpárok síkja nem az  $xz$ , hanem az  $xy$  koordináta síkokkal párhuzamos.

Ezen különleges feladat megoldása a (25) képletek mintájára azonnal megoldható. A megoldás a 21. ábrán magyarázott jelölésekkel:

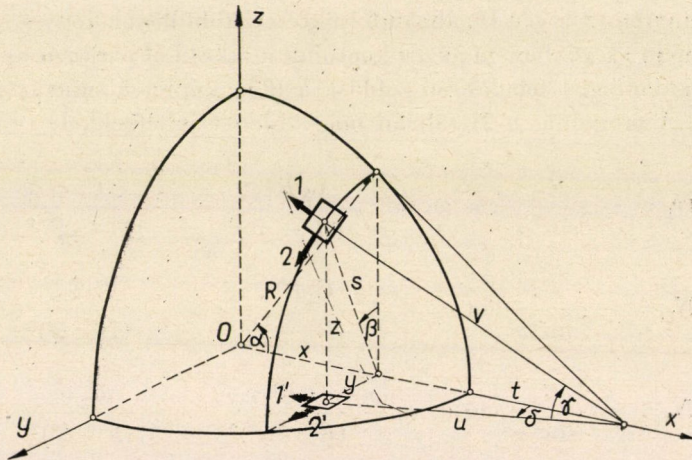
$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{C_3}{\sin^3 \alpha} \cos \omega = \frac{C_3 R^3 y}{(R^2 - x^2)^2} = + \frac{C_3 \eta}{(1 - \xi^2)^2}, \\
 N_{12} = N_{21} &= - \frac{C_3}{\sin^3 \alpha} \sin \omega = - \frac{C_3 R^2 x z}{(R^2 - x^2)^2} = - \frac{C_3 \xi \zeta}{(1 - \xi^2)^2}, \\
 N_2 &= - \frac{C_3}{\sin^3 \alpha} \cos \omega = - \frac{C_3 R^3 y}{(R^2 - x^2)^2} = - \frac{C_3 \eta}{(1 - \xi^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Ezek után a (15) összefüggések alapján az  $x, y$  irányú redukált feszítőerőkre a következő képletek adódnak:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \frac{C_3 \eta}{(1 - \xi^2) \zeta}, \\
 n_{xy} &= \frac{C_3 \xi (\zeta^2 - \eta^2)}{(1 - \xi^2)^2 \zeta}, \\
 n_y &= \frac{C_3 \eta (2 \xi^4 + 3 \xi^2 \eta^2 - 2 \zeta^2 - \zeta^2)}{(1 - \xi^2)^3 \zeta}.
 \end{aligned} \tag{45}$$



20. ábra. Gömbhøj, két átellenes pontban egy-egy erőpárral terhelve



21. ábra. Jelölések

A szóban forgó feladat feszültségfüggvénye is minden nehézség nélkül előállítható:

$$F = -\frac{C_3 R^2}{2} \left( \frac{\eta \zeta}{1 - \xi^2} + \arcsin \frac{\eta}{1 - \xi^2} \right). \quad (46)$$

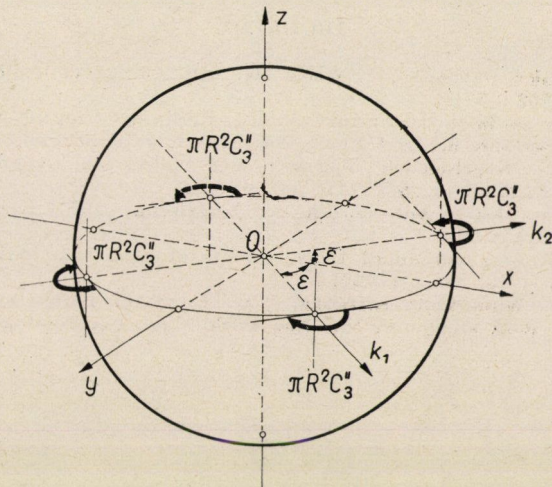
A fenti megoldás birtokában tárgyalhatóvá vált a 22. ábrán látható feladat is, mely az  $xz$  koordináta síkra nézve *szimmetrikus*, az  $yz$  koordináta síkra nézve azonban *antiszimmetrikus*. Ilyenkor a teherrendszer a 20. ábrán látható terhelési esethez hasonló két részre bontható, s ennek megfelelőleg a feszültség-



függvény a (46) alattihoz hasonló két részből állítható elő:

$$F = -\frac{C_3'' R^2}{2} \left( \frac{\lambda_1 \zeta}{1 - \kappa_1^2} + \arcsin \frac{\lambda_1}{1 - \kappa_1^2} - \frac{\lambda_2 \zeta}{1 - \kappa_2^2} - \arcsin \frac{\lambda_2}{1 - \kappa_2^2} \right). \quad (47)$$

Az itt szereplő  $\kappa_1, \lambda_1, \kappa_2, \lambda_2$  mennyiségek jelentését a (22) képletek magyarázzák.



22. ábra. Gömbhéj, az  $xz$  koordináta síkokra nézve szimmetrikus, az  $yz$  koordináta síkra nézve antimetrikus elrendezésű erőpárokkal terhelve

Az  $x, y$  irányú redukált feszítőerők a (23) képletek utasítása szerint határozhatók meg. Ez esetben

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} &= + \frac{C_3'' \lambda_1}{(1 - \kappa_1^2) \zeta}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} &= - \frac{C_3'' \lambda_2}{(1 - \kappa_2^2) \zeta}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1 \cdot \partial \lambda_1} &= - \frac{C_3'' \kappa_1 (\zeta^2 - \lambda_1^2)}{(1 - \kappa_1^2)^2 \zeta}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2 \cdot \partial \lambda_2} &= + \frac{C_3'' \kappa_2 (\zeta^2 - \lambda_2^2)}{(1 - \kappa_2^2)^2 \zeta}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_1^2} &= + \frac{C_3 \lambda_1 (2 \kappa_1^4 + 3 \kappa_1^2 \lambda_1^2 - 2 \kappa_1^2 - \zeta^2)}{(1 - \kappa_1^2)^3 \zeta}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa_2^2} &= - \frac{C_3 \lambda_2 (2 \kappa_2^4 + 3 \kappa_2^2 \lambda_2^2 - 2 \kappa_2^2 - \zeta^2)}{(1 - \kappa_2^2)^3 \zeta}. \end{aligned} \quad (48)$$

## 7. Zárómegjegyzés

Jelen tanulmány a hajlításmentes gömbhéj homogén differenciálegyenletének oly partikuláris megoldásait ismertette, melyek derékszögű négyszög-alaprajzú gömbsüveghéjak számítása során hasznosíthatók. A levezetett képletek alkalmazását szerző külön tanulmány keretében óhajtja bemutatni.

## IRODALOM

1. FLÜGGE, W.: Statik u. Dynamik der Schalen. III. Aufl. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.
2. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. Springer Verlag. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960.
3. HERMITE, R.: Résistance des matériaux, théorique et expérimentale, Dunod, Paris 1954.
4. JACOBSEN, A. Aas: Kugelschalen über vier- und vieleckigem Grundriß. *Mémoires, Abhandlungen, Publications*. 5 (1937—38), 1—17.
5. JACOBSEN, A. Aas: Beitrag zur Theorie der Kugelschale auf Einzelstützen. *Ingenieur-Archiv* 8 (1937), 275.
6. REISSNER, E.: Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells. *J. Math. and Phys.* 25 (1946) Nr. 1, (1947) Nr. 4.
7. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells, II. Ed. McGraw-Hill Book Company, Inc. New-York—Toronto—London 1959.