A MÁGNESES PERMEABILITÁS, DIELEKTROMOS ÁLLANDÓ ÉS VEZETŐKÉPESSÉG MEGHATÁROZÁSA AZ OPTIKAI SPEKTRUM TARTOMÁNYBAN

HOFFMANN GYÖRGY

MAGYAR OPTIKAI MŰVEK KUTATÓ LABORATÓRIUMA

[Beérkezett 1967. október 28.]

Az izotróp anyag elektromágneses tulajdonságaira jellemző állandókat, az ε dielektromos állandót és σ vezetőképességet az optikai frekvencia tartományban a klasszikus elektromágneses elméletnek megfelelő összefüggésekből határozzák meg. Itt ε-t és σ-t azzal a feltételezéssel kapják, hogy a mágneses permeabilitás az optikai rezgések frekvenciáján közel egységnyi: $\mu(\nu) \approx 1$.

A cikk két olyan optikai mérőmódszert javasol, amelyek feleslegessé teszik az előbbi feltevést és lehetőséget nyújtanak $\mu(\nu)$ kiszámítására. Az *első eljárás* tisztán ellipszometriai mérőmódszer. Ennél n-et (a törésmutatót) és k-t (az elnyelési együtthatót) határozzuk meg a $\mu(\nu) \approx 1$ feltevés kihasználása nélkül. A *második eljárásnál* n és k mellett még megmérjük egy megfelelő, síkban polározott fényre vonatkozó R reflexióképességet is.

I. Bevezetés

Ismeretes, hogy a Maxwell-egyenletekben szereplő anyagjellemzőket (az ε dielektromos állandót, a μ mágneses permeabilitást, és a σ vezetőképességet) a fénynek megfelelő rezgési tartományban a frekvencia függvényének kell tekinteni. E feltevés segítségével magyarázunk számos anomáliának tűnő jelenséget. Például az anyagban haladó fény gyengülésére jellemző elnyelési együtthatót az elmélet szerint a következőképpen lehet az anyagállandókkal kifejezni:

$$k^2 = \frac{\mu}{2}\left[\sqrt{\varepsilon^2 + 4\left(\frac{\sigma}{\nu}\right)} - \varepsilon\right], \tag{1}$$

ahol ν a fény frekvenciája.

Ha vákuumból valamilyen anyag felületére merőlegesen fény esik, akkor az anyagban haladó elektromágneses rezgés amplitúdója az anyag belseje felé haladva exponenciálisan csökken, az anyag a fényt elnyeli. Az amplitúdó a felülettől x távolságra $\exp[-(2\pi k/\lambda)x]$-szel arányos, ahol λ a fény hullámhossza. Szigetelő anyagok esetén $\sigma = 0$, ekkor (1) szerint $k = 0$, azaz a fény az anyagon változatlan intenzitással halad át.

Jól tudjuk, hogy számos olyan szigetelő anyag van (pl. kemény gumi, porcelán stb.), amelynél $\sigma \approx 0$ és $k \neq 0$. Másrészt vannak olyan vezetők (pl. elektrolitek), amelyekre nézve $\sigma \neq O$, és mégis bizonyos hullámhosszú fényre $k \approx O$. Ezeket az ellentmondásokat azzal magyarázzuk, hogy az anyagállandók függenek az anyaggal kölcsönhatásba lépő elektromágneses rezgés frekvenciájától [$\varepsilon = \varepsilon(\nu)$, $\mu = \mu(\nu)$, $\sigma = \sigma(\nu)$], és az egyenfeszültségnek ($\nu = O$) megfelelő $\varepsilon(O)$ $\mu(O)$, $\sigma(O)$ értékek erősen eltérnek az igen nagy frekvenciáknak megfelelő értékektől.

Nem érdektelen tehát az anyagjellemzők kísérleti meghatározása az optikai rezgések tartományában.

II. $\varepsilon(\nu)$, $\sigma(\nu)$ meghatározása a $\mu(\nu) \approx 1$ feltétel alapján

Az izotróp elnyelőanyagok (pl. fémek) optikájából ismeretes, hogy a komplex dielektromos állandót és a komplex törésmutatót a következőképpen definiálják:

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{2\sigma}{\nu} \tag{2}$$

és

$$\mathrm{n}^2 = \varepsilon'\mu = \left[\varepsilon - i\frac{2\sigma}{\nu}\right]\mu = (n - ik)^2, \tag{3}$$

ahol n-et törésmutatónak nevezhetjük. Ugyanis ha $\sigma = O$, akkor $n^2 = \varepsilon\mu$, ez pedig a Maxwell-féle reláció.

A (3) alatti egyenlőségből kapjuk a következő összefüggéseket:

$$n^2 - k^2 = \varepsilon\mu \tag{4}$$

és

$$nk = \frac{\sigma}{\nu}\mu \tag{5}$$

Az n és k optikai állandókat kísérletileg, pl. ellipszometriás módszerrel határozhatjuk meg [1]. Tehát, ha ismerjük az n és k megállapításához használt fény frekvenciáját, úgy (4)-ből és (5)-ből kiszámíthatjuk az $\varepsilon\mu$ és $\sigma\mu$ mennyiségeket.

Szokásos alkalmazni azt a feltevést, hogy a fénynek megfelelő frekvenciák esetén a mágneses permeabilitás jó közelítéssel egységnyi: $\mu(\nu) \approx 1$ [1]. Ekkor (4) és (5) szerint

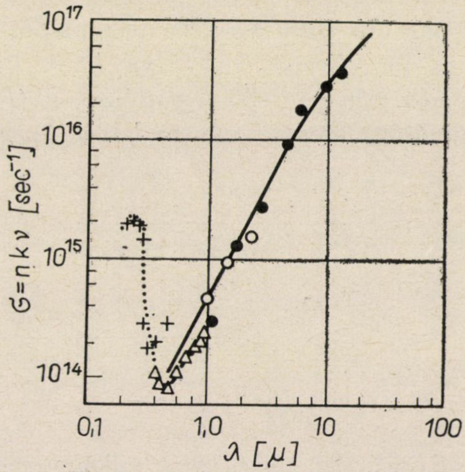
$$\varepsilon(\nu) = n^2 - k^2 \tag{6}$$

és

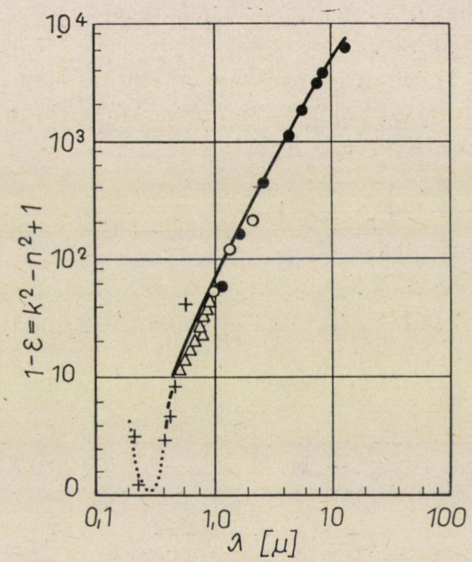
$$\sigma(\nu) = nk\nu. \tag{7}$$

Az 1. ábrán a $\sigma(\lambda)$ ($\lambda = c/\nu$, c a fénysebesség) függvény; a 2. ábrán pedig az $1 - \varepsilon(\lambda) = k^2 - n^2 + 1$ függvény kísérletileg meghatározott értékeit látjuk ezüstre [1].

Önkényes volna azonban azt a feltevést, hogy optikai frekvenciákon $\mu(\nu) \approx 1$, minden anyagra általánosítani. Ezenkívül nem felesleges még az indokolt esetekben sem, az említett feltevés helyességét ellenőrizni.



1. ábra. A σ vezetőképesség függése a hullámhossztól ezüstnél



2. ábra. Az $1-\varepsilon(\lambda)$ kifejezés változása a hullámhossz függvényében ezüstnél

III. $\mu(\nu)$ meghatározása tisztán ellipszometriai úton

Az előbbi eljárásnál a $\mu(\nu) \approx 1$ feltevést nemcsak a (6) és (7) összefüggések levezetésénél használják ki, hanem azoknak a formuláknak a levezetésénél is, melyek segítségével n-et és k-t a mérési adatokból kiszámítják [1].

Lehetőség van azonban arra, hogy n-et és k-t a $\mu(\nu) \approx 1$ feltevéstől függetlenül meghatározzuk [2]. Ez az eljárás lehetővé teszi az n és k optikai állandók és ellipszometriásan mérhető mennyiségek ismeretében $\mu(\nu)$ kiszámítását.

Röviden emlékeztetünk arra, hogy ha vákuumból sík anyagfelületre φ szög alatt párhuzamos, monokromatikus fénynyaláb esik, akkor a visszavert fény villamos rezgésének a beesési síkkal párhuzamos (E_p) és arra merőleges (E_s) komplex amplitúdóját a következő formulák adják [1]:

$$E_p = \frac{\sqrt{\varepsilon' \mu - \sin^2 \varphi} - \varepsilon' \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon' \mu - \sin^2 \varphi} + \varepsilon' \cos \varphi} E_{op} \tag{8}$$

és

$$E_s = \frac{\mu \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon' \mu - \sin^2 \varphi}}{\mu \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon' \mu - \sin^2 \varphi}} E_{os}, \tag{9}$$

ahol E_{op} és E_{os} a beeső lineárisan poláros fény villamos rezgési amplitúdójának a beesési síkkal párhuzamos és arra merőleges komponense. Kísérletileg könnyen megvalósítható, hogy $E_{op} = E_{os}$ legyen, a továbbiakban feltesszük ezen egyenlőség fennállását.

Az ellipszometriás mérés a visszavert, elliptikusan poláros fényhez tartozó adatokat szolgáltatja. Ezek a ϱ azimut és Δ fáziskülönbség. ϱ és Δ a következő kapcsolatban van E_p-vel és E_s-sel:

$$\frac{E_p}{E_s} = \tan \varrho \cdot \exp [-i\Delta]. \tag{10}$$

Ezek után rátérhetünk $\mu(\nu)$ kiszámítására. A [2] tartalmazza a következő összefüggés levezetését:

$$\frac{K}{\sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\varepsilon' - \mu}{\varepsilon' \mu - 1} = \frac{\cos 2\varrho - i \sin 2\varrho \cdot \sin \Delta}{1 - \sin 2\varrho \cos \Delta}. \tag{11}$$

Itt

$$K = \sqrt{\varepsilon' \mu - \sin^2 \varphi}. \tag{12}$$

Alakítsuk át (11)-et, e célból vezessünk be rövidítő jelöléseket:

$$F = \frac{\cos 2\varrho}{1 - \sin 2\varrho \cdot \cos \Delta}, \tag{13}$$

$$G = \frac{-\sin 2\varrho \cdot \sin \Delta}{1 - \sin 2\varrho \cdot \cos \Delta} \tag{14}$$

és

$$H = \sin \varphi \cdot \tan \varphi. \tag{15}$$

Írjuk a K komplex számot trigonometrikus alakban

$$K = \sqrt{n^2 - k^2 - \sin^2 \varphi - i\, 2\, nk} = p\,(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)\,, \tag{16}$$

ahol

$$p = \sqrt[4]{(n^2 - k^2 - \sin^2 \varphi)^2 + 4\, n^2 k^2} \tag{17}$$

és

$$\tan 2\,\alpha = \frac{-\, 2\, nk}{n^2 - k^2 - \sin^2 \varphi}\,. \tag{18}$$

A (11)-et (13), (14), (15) és (16) felhasználásával a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{p\,(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)}{H} \; \frac{\varepsilon' \mu - \mu^2}{\mu\,(\varepsilon' \mu - 1)} = F + iG\,. \tag{19}$$

(19)-et átrendezve és $\varepsilon'\mu$-t (3)-ból helyettesítve:

$$\begin{aligned} &\mu H[(n^2 - k^2 - 1)\, F + G \cdot 2\, nk] - p\,[(n^2 - k^2 - \mu^2) \cos \alpha + 2\, nk \cdot \sin \alpha] + \\ &\quad + i\,\{\mu H\,[G(n^2 - k^2 - 1) - 2\, F \cdot nk] - \\ &\quad - p\,[\sin \alpha\,(n^2 - k^2 - \mu^2) - 2\, nk \cos \alpha]\} = 0\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Ha egy komplex szám zérus, akkor a valós és a képzetes része is zérus; így (20) szerint a valós rész:

$$\begin{aligned} &\mu^2 \cdot p \cos \alpha + \mu \cdot H\,[(n^2 - k^2 - 1)\, F + G \cdot 2\, nk] - \\ &\qquad - p\,[(n^2 - k^2) \cos \alpha + 2\, nk \sin \alpha] = 0\,, \end{aligned} \tag{21}$$

vagy röviden jelölve:

$$\mu^2 a_1 + \mu b_1 + c_1 = 0\,, \tag{22}$$

ahol

$$\begin{aligned} a_1 &= p \cdot \cos \alpha\,, \\ b_1 &= H\,[(n^2 - k^2 - 1)\, F + G \cdot 2\, nk]\,, \\ c_1 &= -p\,[(n^2 - k^2) \cos \alpha + 2\, nk \cdot \sin \alpha]\,. \end{aligned} \tag{23}$$

A képzetes rész együtthatója:

$$\begin{aligned} &\mu^2 \cdot p \cdot \sin \alpha + \mu H\,[G(n^2 - k^2 - 1) - 2 \cdot F \cdot nk] - \\ &\qquad - p\,[(n^2 - k^2) \sin \alpha - 2\, nk \cos \alpha] = 0\,; \end{aligned} \tag{24}$$

vagy röviden:

$$\mu^2 \cdot a_2 + \mu \cdot b_2 + c_2 = 0\,, \tag{25}$$

ahol

$$a_2 = p \cdot \sin\alpha\,,$$

$$b_2 = H\,[G(n^2 - k^2 - 1) - 2 \cdot F \cdot nk]\,, \qquad (26)$$

$$c_2 = -\,p\,[(n^2 - k^2)\sin\alpha - 2\,nk\cos\alpha]\,.$$

Tehát μ-re két másodfokú egyenletet — (22)-t és (25)-t — kaptunk. Ezeket megoldhatjuk μ-re, és megkaphatjuk a mágneses permeabilitást a mérhető adatokkal kifejezve.

Felmerül az a probléma, hogy a (22) és (25) egyenletnek két-két gyöke közül melyik a fizikailag használható érték?

Izotróp anyagokról lévén szó, a mágneses permeabilitásról annyit mondhatunk, hogy pozitív szám. Ezt a kikötést a számítás során erősen kihasználtuk, hiszen, ha μ pl. komplex volna a (20) összefüggésből nem következnék (22) és (25). Tehát (22) és (25) komplex és negatív gyökeit eleve fizikailag értelmetlennek minősíthetjük. A (22)-ből és (25)-ből kiszámított μ igen bonyolult kifejezés, ezért nehéz részletesebb megállapításokat tenni. Fizikailag azonban világos, hogy eljárásunk helyességének egyik kritériuma az, hogy a mérés útján kapott φ, ϱ, Δ, n és k adatokkal számolva (22) és (25)-ből egy-egy valós gyököt kell kapnunk, és ezeknek egyenlőknek kell lenniük.

IV. $\mu(\nu)$ meghatározása az optikai állandókból és reflexióból

Az előbbinél valamivel kevesebb számolással célhoz érünk, ha n-et és k-t az ellipszometriai úton mért adatokból kiszámítjuk és megmérjük a beesési síkra merőlegesen rezgő lineárisan poláros fényre vonatkozó reflexiót. Ezt a (9) formulából számíthatjuk ki, hiszen a reflexióképesség a visszavert fény intenzitásának a beeső fény intenzitásához való viszonya:

$$R = \frac{|E_s|^2}{|E_{os}|^2}\,. \qquad (27)$$

R kisztmítása érdekében írjuk be (16)-ot a (9)-be:

$$E_s = \frac{\mu\cos\varphi - p\,(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)}{\mu\cos\varphi + p\,(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)}\,E_{os} =$$

$$= \frac{\mu\cos\varphi - p \cdot \cos\alpha - ip \cdot \sin\alpha}{\mu\cos\varphi + p\cos\alpha + ip\sin\alpha}\,E_{os}\,. \qquad (28)$$

Vezessük be (28)-ba a következő jelöléseket

$$U_1 = \mu \cos\varphi - p\cos\alpha\,, \tag{29}$$

$$U_2 = \mu \cos\varphi + p\cos\alpha\,, \tag{30}$$

$$W = p\sin\alpha\,. \tag{31}$$

Tehát

$$E_s = \frac{U_1 - iW}{U_2 + iW} E_{os}\,. \tag{32}$$

Az R reflexióképességet (32)-ből úgy kapjuk, hogy (32)-t megszorozzuk a komplex konjugáltjával, majd mindkét oldalt osztjuk E_{os}^2-sal:

$$R = \frac{U_1^2 + W^2}{U_2^2 + W^2}\,. \tag{33}$$

Ebből

$$U_1^2 - RU_2^2 + W^2(1 - R) = 0\,. \tag{34}$$

Írjuk vissza (34)-be az U_1, U_2 és W értékét, ebből adódik, hogy

$$\mu^2\cos^2\varphi - \mu\, 2pq\cos\varphi\cos\alpha + p^2 = 0\,, \qquad (35$$

ahol

$$q = \frac{1 + R}{1 - R}\,,$$

$$p = \sqrt[4]{(n^2 - k^2 - \sin^2\varphi) + 4\,n^2k^2} \tag{36}$$

és

$$\tan 2\alpha = \frac{-2\,nk}{n^2 - k^2 - \sin^2\varphi}\,.$$

A (35)-ból μ-t kiszámíthatjuk:

$$\mu_{12} = \frac{p}{\cos\varphi}\left(q\cdot\cos\alpha \pm \sqrt{q^2\cos^2\alpha - 1}\right). \tag{37}$$

(37) és (36) szerint μ-t n, k, φ és R függvényében kifejeztük; ezzel feladatunkat megoldottuk. A fizikailag értelmes μ-t most is a már említett feltétel alapján választjuk ki.

V. $\varepsilon(\nu)$ és $\sigma(\nu)$ kiszámítása, ha $\mu(\nu) \neq 1$.

Ha μ értékét az előbb leírt eljárások valamelyikével meghatározzuk, akkor $\varepsilon(\nu)$-t és $\sigma(\nu)$-t a következő összefüggésekből kapjuk:

$$\varepsilon(\nu) = \frac{n^2 - k^2}{\mu(\nu)} \tag{39}$$

és

$$\sigma(\nu) = \frac{nk\nu}{\mu(\nu)} \,. \tag{40}$$

Megjegyezzük, hogy n és k azon értékével kell itt is számolni, melyeket a $\mu \approx 1$ feltevés kihasználása nélkül határoztunk meg.

VI. Következtetések

Két eljárást írtunk le, amelyekkel módunkban van a $\mu(\nu)$ mágneses permeabilitást meghatározni az optikai spektrumtartományban. A $\mu(\nu)$ ismeretében a dielektromos állandót és a vezetőképességet is kiszámíthatjuk anélkül, hogy a $\mu(\nu) \approx 1$ feltevésre támaszkodnánk.

Az *első* módszernél μ értékét tisztán ellipszometriai úton nyert adatokból, az n, k optikai állandókból, φ beesési szögből, ϱ azimutból és Δ fáziskülönbségből ki tudjuk számítani. A számolás eléggé hosszadalmas.

Egyszerűbb számítással kapjuk μ értékét a *második* eljárással. Ekkor azonban n és k mellett a beesési síkra merőleges rezgési síkú poláros fényre vonatkozó R reflexiót is ismernünk kell.

*

A szerző köszönetét fejezi ki Dr. Bernolák Kálmánnak (MOM) és Dr. Bárány Nándornak (Budapesti Műszaki Egyetem) értékes észrevételeikért.

IRODALOM

1. *Соколов, А. В.:* Оптические свойства металлов; Москва 1961.
2. Hoffmann, Gy.: Anyagok optikai állandóinak meghatározása a mágneses permeabilitásra tetett felvés nélkül. *Kép- és Hangtechnika,* **14** (1968).