HANGVISSZAVERŐ GÖMBSÜVEG GÖRBÜLETI KÖZÉPPONTJÁBAN ELHELYEZETT HANGFORRÁS VISSZHANGJÁNAK INTENZITÁSA

RÓZSA MIHÁLY
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI INTÉZET, BUDAPEST

[Beérkezett 1967. november 13-án]

A dolgozat oly számítást közöl, amely a Helmholtz—Kirchhoff-féle integráltétel alapján megadja egy hangvisszaverő gömbsüveg felület görbületi középpontjában elhelyezett hangforrás visszhangjának intenzitását. Ezt az intenzitást összehasonlítja a hangforrástól ugyanolyan távolságban levő, végtelen kiterjedésű sík hangvisszaverő felület által keltett visszhang intenzitásával.

1. Alapösszefüggések

Egy hangvisszaverő gömbsüveg felület görbületi középpontjában elhelyezett hangforrás esetében a visszhang intenzitásának számításakor a hanghullámok sebességpotenciáljára vonatkozó Helmholtz—Kirchhoff-féle integráltételből kell kiindulni.

A hanghullámok sebességpotenciálja kielégíti a hullámegyenletet [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \,, \tag{1}$$

ahol

u — sebességpotenciál;
c — hangterjedés sebessége;
t — idő.

Feltesszük, hogy a levegőrészecskék harmonikus rezgőmozgást végeznek. Ebben az esetben a pontszerűnek feltételezett hangforrásból kiinduló gömbhullám sebességpotenciáljának egyenlete a következő:

$$u = \frac{u_0 r_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \,, \tag{2}$$

ahol

u_0 — a sebességpotenciál amplitúdója a hangforrástól r_0 távolságban;
r — a vizsgált pont távolsága a hangforrástól;
ω — körfrekvencia;
t — idő;
λ — hullámhossz;
$k = 2\pi/\lambda$ — hullámszám.

A sebességpotenciál-függvény meghatározza a hangnyomást:

$$p = \varrho \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3}$$

ahol

p — hangnyomás;
ϱ — a levegő sűrűsége, amely ismert állandó.

A sebességpotenciál a részecskék $\vec{v}$ rezgési sebességét is meghatározza:

$$\vec{v} = -\operatorname{grad} \vec{u}. \tag{4}$$

A hang intenzitását a következő képlet adja meg:

$$I = \frac{1}{2} |p| \cdot |\vec{v}|, \tag{5}$$

ahol

I — a hang intenzitása;
$|p|$ — a hangnyomás amplitúdója;
$|\vec{v}|$ — a rezgési sebesség amplitúdója.

A (3) és (4) képletbe a gömbhullám sebességpotenciáljának (2) kifejezését behelyettesítve, a következőket kapjuk:

$$p = \frac{i\omega\varrho u_0 r_0}{r} e^{i(\omega t - kr)}, \tag{6}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right) u_0 r_0 e^{i(\omega t - kr)} \vec{r}, \tag{7}$$

ahol

$\vec{r}$ — sugárirányban a gömb középpontjától kifelé mutató egységvektor.

A továbbiakban feltesszük, hogy a hangvisszaverő felület R sugara nagy a hang hullámhosszához viszonyítva, vagyis

$$R \gg \lambda. \tag{8}$$

Minthogy a hangforrásból kiinduló hangot a hangforrástól nagy távolságban vizsgáljuk, (7) jobb oldalán a zárójelben levő második kifejezés az elsőhöz képest elhanyagolható, tehát

$$\vec{v} = \frac{iku_0 r_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{r}. \tag{7'}$$

A hang intenzitása (5), (6) és (7') egyenletekből:

$$I = \frac{\omega k \varrho u_0^2 r_0^2}{2\, r^2}\,. \tag{9}$$

A visszhang számításánál a gömbsüveg felület hangvisszaverési tényezőjét egynek vesszük, vagyis a hangelnyelést elhanyagoljuk. (Az irodalom [2] szerint a vakolt falfelületek hangelnyelési tényezője 0,02—0,05 között változik.) A levegőhöz viszonyítva tökéletesen merevnek feltételezett hangvisszaverő felületen a következő határfeltétel áll fenn:

$$\vec{v} + \vec{v}' = 0\,, \tag{10}$$

ahol $\vec{v}'$ — a visszavert hang rezgési sebessége.

A (10) határfeltétel akkor teljesül, ha az R sugarú gömbsüveg felület minden pontján

$$u'(t,R) = u(t,R), \tag{11}$$

$$\operatorname{grad} u'(t,R) = -\operatorname{grad} u(t,R), \tag{12}$$

ahol u' — a visszavert hang sebességpotenciálja.

Az u sebességpotenciál (2) kifejezését és gradiensének (7') kifejezését (11) és (12) egyenletbe helyettesítve, majd az $R = r$ behelyettesítést elvégezve, a következőt kapjuk:

$$u'(t, R) = \frac{u_0 r_0}{R}\, e^{i(\omega t - kR)}, \tag{13}$$

$$\operatorname{grad} u'(t, R) = \frac{iku_0 r_0}{R}\, e^{i(\omega t - kR)}\,\vec{r}\,. \tag{14}$$

A visszhang számításakor a Helmholtz—Kirchhoff-féle ismert integráltételből [3, 4, 5] indulunk ki:

$$u' = \frac{1}{4\pi} \iint_F \left(\frac{e^{-ikr'}}{r'} \operatorname{grad} u'(t, R) - u'(t, R) \operatorname{grad} \frac{e^{-ikr'}}{r'} \right) \overrightarrow{df} \tag{15}$$

ahol

u' — a visszavert hang sebességpotenciálja;
F — a tetszőleges görbe által határolt hangvisszaverő felület;
$\overrightarrow{df}$ — az F felület df eleméhez hozzárendelt, a gömb középpontjától kifelé mutató normálvektor;
r' — a vizsgált pont távolsága a df felületelemtől.

A vizsgált pontok a gömb 0 középpontjától végtelen kis távolságban vannak.

A (13) és (14) kifejezéseket a (15) egyenletbe behelyettesítve, továbbá figyelembe véve a

$$\operatorname{grad} \frac{e^{-ikr'}}{r'} = -ik \frac{e^{-ikr'}}{r'} \vec{r} \tag{16}$$

összefüggést, a következőt kapjuk:

$$u' = \frac{iku_0 r_0}{2\pi R} e^{i(\omega t - kR)} \iint_F \frac{e^{-ikr'}}{r'} \vec{r}\, \vec{df}\,. \tag{17}$$

A sebességpotenciált a gömb 0 középpontjában megkapjuk, ha (17) képletben r' helyébe R-t helyettesítünk:

$$u'(t,0) = \frac{iku_0 r_0}{2\pi R^2} e^{i(\omega t - 2kR)} \iint_F \vec{r}\, \vec{df}\,.$$

Minthogy

$$\iint_F \vec{r}\, \vec{df} = \iint_F df = F,$$

végeredményben azt találjuk, hogy

$$u'(t,0) = \frac{iku_0 r_0 F}{2\pi R^2} e^{i(\omega t - 2kR)}. \tag{18}$$

Az 0 pontban fellépő hangnyomás (18) egyenletből (3) figyelembevételével:

$$p'(t,0) = -\frac{k\omega u_0 r_0 F \varrho}{2\pi R^2} e^{i(\omega t - 2kR)}. \tag{19}$$

A 0 pontban fellépő rezgési sebesség (4) és (17) egyenletekből:

$$\vec{v}'(t,0) = -\frac{iku_0 r_0}{2\pi R} e^{i(\omega t - kR)} \iint_F \left[\operatorname{grad} \frac{e^{-ikr'}}{r'}\right]_{r'=R} df. \tag{20}$$

A gradiensképzés itt a vizsgált pont elmozdulására vonatkozik, míg a (16) képletben a df felületelem elmozdulására vonatkozott. Ezért a (16) alatti kifejezést ellenkező előjellel kell (20) képletbe helyettesíteni:

$$\vec{v}'(t,0) = -\frac{iku_0 r_0}{2\pi R} e^{i(\omega t - kR)} \iint_F \left[ik \frac{e^{-ikr'}}{r'} \vec{r}\right]_{r'=R} df = \frac{k^2 u_0 r_0}{2\pi R^2} e^{i(\omega t - 2kR)} \iint_F \vec{df}. \tag{21}$$

Az ismert súlyponti tételekből kiindulva könnyen bebizonyítható, hogy

$$\iint_F \vec{df} = F_s \vec{r}_s, \tag{22}$$

ahol

$\vec{r}_s$ — egységvektor, amely 0 középpontból az F felület súlypontja felé mutat;
F_s — F felület vetülete $\vec{r}_s$ vektor normálsíkjára.

A (22) kifejezést (21) egyenletbe behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$\vec{v}'(t,0) = \frac{k^2 u_0 r_0 F_s}{2\pi R^2} e^{i(\omega t - 2kR)} \vec{r}_s. \tag{23}$$

A (23) egyenlet szerint az észlelő a visszhangot a visszaverő felület súlypontjának irányából hallja.

Megjegyzendő, hogy $F_s \approx F$ esetében (19) és (23) szerint

$$|p'(t,0)| \approx |\vec{v}'(t,0)| \frac{\varrho\omega}{k} = |\vec{v}'(t,0)| \varrho c, \tag{24}$$

vagyis ilyenkor a visszavert hangot jó közelítéssel sík hullámnak lehet tekinteni.

A visszhang intenzitása az O pontban (5) szerint (19) és (23) figyelembevételével:

$$I'(0) = \frac{\omega k^3 \varrho u_0^2 r_0^2 F F_s}{8\pi^2 R^4} = \frac{2\pi^2 c \varrho u_0^2 r_0^2 F F_s}{\lambda^4 R^4}. \tag{25}$$

2. A sík és gömbsüveg alakú hangvisszaverő felület által keltett visszhang paramétereinek viszonya

Határozzuk meg az előzők alapján, hogy az R sugarú F gömbsüveg felület által az O pontban keltett visszhang paraméterei (hangnyomás, rezgési sebesség, intenzitás) hogyan aránylanak az R távolságban levő végtelen kiterjedésű sík hangvisszaverő felület által keltett visszhang paramétereihez ugyanebben a pontban.

Az R távolságban elhelyezett ideális hangvisszaverő sík felület ugyanúgy „tükrözi" a hangforrást, mint egy síktükör a fényforrást. Ezért a visszhang paraméterei az O pontban egyenlők az O ponttól $2R$ távolságban elhelyezett, a valóságos hangforrással egyező erősségű fiktív hangforrás által az O pontban keltett hang paramétereivel. A (6), (7') és (9) képletek szerint ezeknek a paramétereknek az abszolút értékei:

$$|p''(t,0)| = \frac{\omega\varrho u_0 r_0}{2R}, \tag{26}$$

$$|\vec{v}''(t,0)| = \frac{k u_0 r_0}{2R}, \tag{27}$$

$$I''(0) = \frac{\omega k \varrho u_0^2 r_0^2}{8R^2} = \frac{\pi^2 c \varrho u_0^2 r_0^2}{2\lambda^2 R^2}. \tag{28}$$

A „gömbtükör" által visszavert hang paraméterei (19), (23) és (25) szerinti kifejezéseinek abszolút értékét a síktükör által keltett visszhang megfelelő paramétereinek abszolút értékével elosztva, a „gömbtükör" által elért „erősítésre" a következő képleteket kapjuk:

$$K_p = \frac{|p'(t,0)|}{|p''(t,0)|} = \frac{2F}{\lambda R}, \tag{29}$$

$$K_v = \frac{|\vec{v}'(t,0)|}{|\vec{v}''(t,0)|} = \frac{2F_s}{\lambda R}, \tag{30}$$

$$K_I = \frac{I'(0)}{I''(0)} = \frac{4FF_s}{\lambda^2 R^2}. \tag{31}$$

Ha a gömbsüveg felület maximális nyílásszöge kicsiny, akkor $F_s \approx F$ és

$$K_p = K_v = \frac{2F}{\lambda R}, \tag{32}$$

$$K_I = \left(\frac{2F}{\lambda R}\right)^2. \tag{33}$$

Amint a fenti képletekből látható, az erősítés mértéke függ a hangforrásból kiinduló hang frekvenciájától. A telefontechnikában a 300 *Hz* és 3000 *Hz* közötti frekvenciasávot elegendőnek tartják a beszéd érthető reprodukálásához. A visszhang természeti érdekességként való értékelésében azonban az észlelhetőség a döntő, és igen gyenge hanghűség is elegendő. Az irodalom [6] szerint a beszéd már tűrhetően érthető, ha csak az 1000 *Hz* feletti frekvenciákat viszik át. Ezért a visszhang intenzitásának számításánál elegendő az 1000 *Hz* és 3000 *Hz* közötti frekvenciasávot, vagyis a $\lambda = 10$ cm és $\lambda = 30$ cm között hullámhosszsávot figyelembe venni.

Alkalmazási példa: a tihanyi visszhang

A tihanyi apátsági templom visszhangfala az ún. visszhangdombtól körülbelül $R = 400$ m távolságban van. Tegyük fel, hogy a templomnak ezt a falát részben egy homorú gömbsüveg felület határolja, amelynek görbületi középpontja a visszhangdombon van. A gömbszegment felülete legyen például $F = 200$ m². Ebben az esetben az erősítés (32) és (33) képlet szerint:

$$K_p = K_v = \frac{2 \cdot 200}{\lambda \cdot 400} = \frac{1}{\lambda_{[m]}},$$

$$K_I = K_p^2 = \frac{1}{\lambda^2_{[m]}}.$$

E képletek szerint a hangnyomás és a rezgési sebesség erősítése a végtelen kiterjedésű sík hangvisszaverő felülethez viszonyítva a $\lambda = 10 \div 30$ cm hullámhosszsávon $K_p' = 3\ 1/3$ és $K_p'' = 10$ között változik, a hangintenzitás erősítése pedig $K_I' = 11\ 1/9$ és $K_I'' = 100$ között. A véges kiterjedésű sík falfelülethez viszonyítva az erősítés mértéke természetesen még nagyobb.

A gömbhullámoknál a hangnyomás a távolsággal fordítottan arányos, ezért $\lambda = 10$ cm hullámhosszon a visszavert hang nyomása (és egyéb paraméterei) a

$$t_{10} = \frac{2\,R}{K_p''} = \frac{2 \cdot 400}{10} = 80 \text{ m}$$

távolságban elhelyezett hangforrás által a visszhangdombon keltett hang nyomásának (és egyéb paramétereinek) felelnek meg. A $\lambda = 30$ cm hullámhosszon a megfelelő távolság

$$t_{30} = \frac{2\,R}{K_p'} = \frac{2 \cdot 400}{10} \cdot 3 = 240 \text{ m}.$$

Amint látható, a homorú gömbfelület által keltett visszhang erősen kiemeli a magas hangokat. Meg kell jegyezni, hogy ezt a kiemelést a levegőben keletkező csillapítás (mely a magas hangokra nagyobb) részben kiegyenlítheti.

A tihanyi visszhangot kétségkívül a homorú falfelület fokuszáló hatása hozta létre, mert sík falfelület esetében a 800 m távolságban levő fiktív hangforrásból jövő emberi hang már nem hallható. A visszhang a templom renoválásakor eltűnt, mert a régi, homorú felületű vakolatot leverték, és az újravakolásnál — a szakszerűség követelményének megfelelően — ügyeltek arra, hogy a fal felülete sík legyen. *A falfelület megfelelő újravakolásával azonban a tihanyi visszhangot helyre lehetne állítani.*

IRODALOM

1. TARNÓCZY T.: Akusztika, Budapest, 1963. Akadémiai Kiadó.
2. VALKÓ I. P.: Elektroakusztika, Budapest, 1963. Tankönyvkiadó.
3. DEBYE, P.: Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder Brennlinie. *Ann. d. Physik.* **30** (1909), 755—776.
4. JOOS, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. 8. kiadás. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.
5. BORN, M.: Optik. Springer Verlag, Berlin 1965.
6. REICHARDT W.: Grundlagen der Elektroakustik, Geest u. Portig K.—G., Leipzig 1952.