

# VONÓVASAS HÉJÍVEK OLDALIRÁNYÚ STABILITÁSA

KOLLÁR LAJOS

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA  
BUDAPESTI VÁROSÉPÍTÉSI ÉS TERVEZŐ IRODA

GÁRDONYI ZOLTÁN

ÚT-, VASÚTTERVEZŐ VÁLLALAT, BUDAPEST

[Beérkezett 1967. november 23.]

A dolgozat egy- és kétvonóvasas, szabad, ill. diafragmás végű héjívek oldalirányú stabilitásvizsgálatát mutatja be, egyenletes radiális, valamint antimetrikus teher esetére, az energiamódszerrel. Tárgyalja az alakváltozási függvény célszerű megválasztását. Számpéldát mutat be szabadvégű egy- és kétvonóvasas héjívre.

## 1. Bevezetés

Több dolgozatban foglalkoztunk már a héjívek oldalirányú stabilitásproblémáival [1], [2], de az eddig figyelembe vett megtámasztásmódok mind feltételezték, hogy a héjív végkeresztmetszete mereven meg van fogva elcsavarodás ellen. A gyakorlatban azonban sokszor fordul elő olyan megtámasztás is, amikor a végkeresztmetszet — bizonyos feltételek mellett — el tud csavarodni. Ilyen pl. az 1. ábrán vázolt eset; itt a héjív vízszintes síkra támaszkodik. Ha elhanyagoljuk a súrlódást, akkor a végkeresztmetszet szabadon elfordulhat a vízszintes síkban, csupán a két vonóvas jelent ebben akadályt.

Hasonló a helyzet a 2. ábra szerint megtámasztott héjív esetében is. A vékony héjkeresztmetszetű oszlopnak olyan kicsi a csavarási merevsége, hogy azt elhanyagolhatjuk, és így a megtámasztás statikai szempontból azonos lesz az 1. ábráéval. A különbség csupán az, hogy a 2. ábrán egy vonóvassal láttuk el az ívet, ez azonban független a megtámasztástól.

A továbbiakban az 1. és 2. ábra szerint megtámasztott héjívek oldalirányú stabilitásproblémáival fogunk foglalkozni, egy és két vonóvas esetében.

Mind a kétféle szerkezet megépült már: a kétvonóvasas Magyarországon (lásd [3]-ban: az Újpesti Bőrenyvgyár nyereghéj-tetői), az egyvonóvasas pedig Manchesterben (lásd [3]-ban vagy [4]-ben: Épületelemgyári csarnok Angliában).

## 2. Jelölések, feltevések és alapegyenletek

A felhasználandó *jelölések* egy részét a 3. ábra tartalmazza. Az ezen kívül előforduló jelöléseket a szöveg közben adjuk meg.

*Feltesszük, hogy*

$\alpha$ ) az ív *anyaga* tökéletesen rugalmas, *hossztengelye* körív, *keresztmetszete* állandó, a keresztmetszet *magassága* kicsi az ívtengely görbületi sugarához képest:

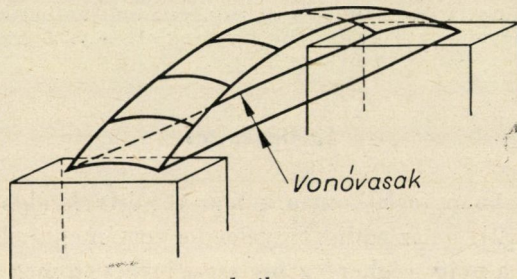
$d \ll R$ , és így

$$R_S \approx R_T \approx R \quad (1)$$

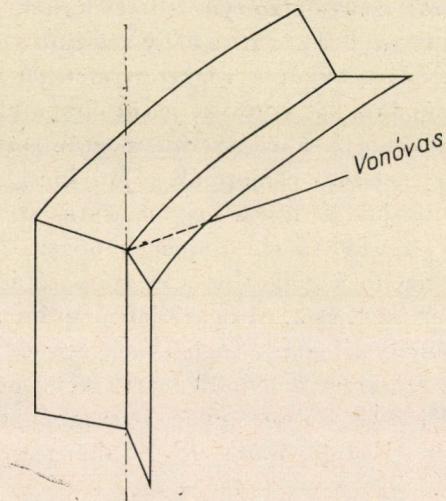
$\beta$ ) az *oldalirányú hajlítási merevség* végtelen nagy a csavarási merevség-hez képest:

$$B_x \gg C, \text{ ill. } B_x = \infty$$

$\gamma$ ) az ív a *saját síkjában kétesuklósnak* tekinthető.



1. ábra

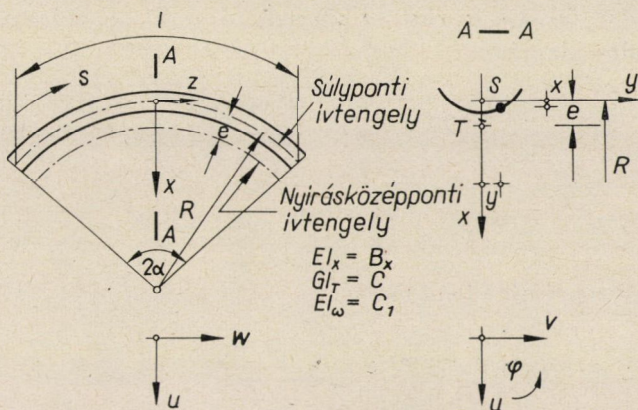


2. ábra

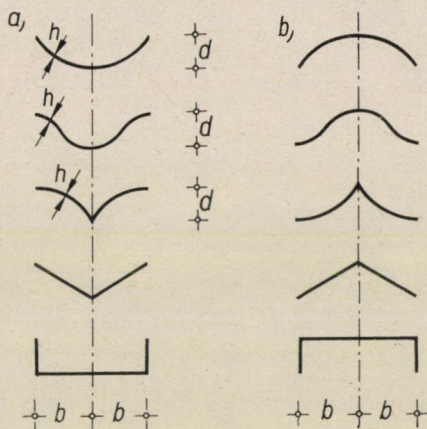
A vonóvasas íveket a következő *terhelésekre* fogjuk megvizsgálni:

a) *egyenletes*  $q$  radiális teher, amelyből csupán  $N_q = qR$  nyomóerő ébred (4. ábra),

b) *antimetrikus* teher:  $p = p_2 \sin 2(\pi/l)s$ , amelyből — mivel saját síkjában kétesuklósnak tekinthető az ív — az 5. ábrán vázolt igénybevételek keletkeznek.



Keresztmetszeti lehetőségek



3. ábra

E terhekre az *energiamódszer* alapján a következő *alapegyenleteket* vezetjük le a belső és a külső munkára [1], [2]. *A belső munka:*

$$L_b = \frac{C}{2} \int_0^l \vartheta_T^2 \cdot ds + \frac{C_1}{2} \int_0^l \left( \frac{d\vartheta_T}{ds} \right)^2 ds. \tag{2}$$

Itt

$$\vartheta_T = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dv_T}{ds} \tag{3}$$

- a nyírasközépponti tengely fajlagos elcsavarodása,
- $\varphi$  az egész keresztmetszet elcsavarodása,
- $v_T$  a nyírasközépponti tengely oldalirányú elmozdulása.

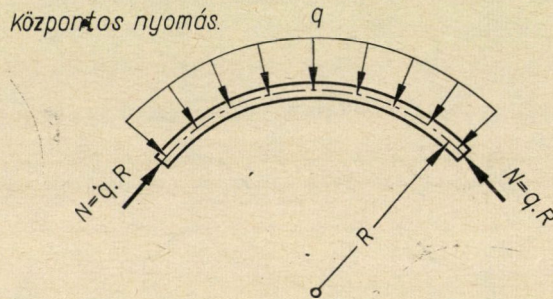
A  $B_x = \infty$  feltétel szerint  $v_T$  kifejezhető  $\varphi$ -vel az oldalirányú görbület ( $\kappa_{Tx}$ ) zérus volta alapján:

$$\kappa_{Tx} = \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0, \quad (4)$$

azaz

$$v_T = \frac{1}{R} \iint \varphi ds ds + K_1 \cdot s + K_2. \quad (5)$$

Itt  $K_1$  és  $K_2$  integrálási állandók.



4. ábra

A külső munka a 4. ábrának megfelelő egyenletes külső teher esetében a következő:

$$L_k^{(q)} = qR \left\{ \left( \frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{R^2} \right) \int_0^l \varphi^2 \cdot ds + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \int_0^l \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \cdot ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dv_T}{ds} \right)^2 \cdot ds - e \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{dv_T}{ds} \cdot ds \right\}. \quad (6)$$

Itt

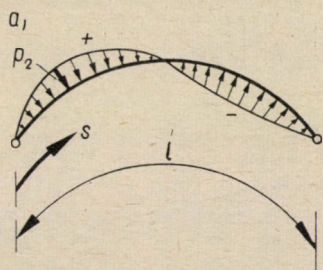
$t$  — a  $q$  teher támadáspontjának magassága a nyírasközéppont felett  
 $i_x, i_y$  — a keresztmetszet inerciasugarai.

Az 5. ábrán vázolt *antimetrikus* teher külső munkája pedig (minden igénybevételt  $M_2$ -vel kifejezve):

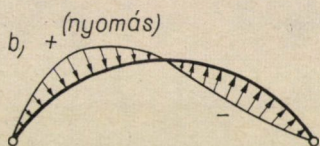
$$L_k^{(p)} = \frac{M_2}{R} \left\{ \left[ \frac{tR}{2} \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \varphi^2 \cdot ds + \right. \\ \left. + \frac{R}{2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \cdot ds - \right. \\ \left. - R \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{dv_T}{ds} ds \right\}. \quad (7)$$

Az ebben szereplő  $j_x$  és  $j_y$  az ív geometriai méreteiből számítható mennyiségek, lásd [1]-ben.

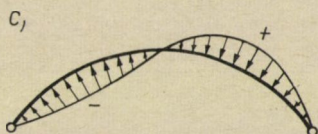
A fenti munkakifejezésekben csupán egy ismeretlen alakváltozás szerepel: a  $\varphi$  elcsavarodásfüggvény. Fel kell vennünk tehát a  $\varphi$  függvényt úgy, hogy kielégítse a megtámasztási feltételeket, majd egyenlővé téve a belső és a külső munka kifejezését, meghatározzuk a kritikus teherintenzitást ( $N_q = qR$ -t, illetve  $M_2$ -t).



$$p = p_2 \sin \lambda_2 s = +M_2 \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right) \sin \lambda_2 s$$



$$N_p = \frac{M_2}{R} \sin \lambda_2 s$$



$$M_p = -M_2 \sin \lambda_2 s$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad M_2 = \frac{p_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2}$$

5. ábra

### 3. A megtámasztási feltételek egyenletei

#### 3. 1. Kétvonóvasas ív (1. ábra)

Az ív két végén ( $s = 0$  — és  $s = l$ -nél) teljesülniük kell a következő feltételeknek (6. ábra):

#### 3. 11. Az ív végpontjai nem mozdulnak el oldalirányban

$$(v_T)_0 = 0, \tag{8a}$$

ill.

$$(v_T)_l = 0. \quad (8b)$$

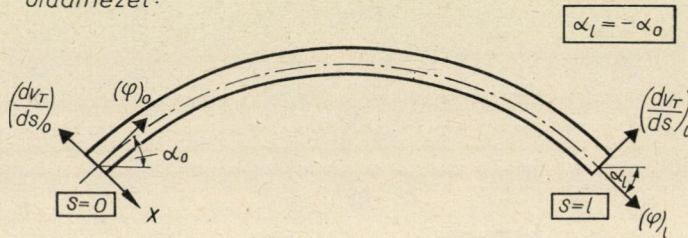
3. 12. Az ív végei vagy szabadon öblösödhetnek:

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0 = \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_0 + \frac{1}{R} \left(\frac{d^2v_T}{ds^2}\right)_0 = 0, \quad (9a)$$

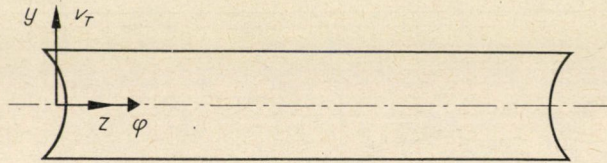
ill.

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l = \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_l + \frac{1}{R} \left(\frac{d^2v_T}{ds^2}\right)_l = 0, \quad (9b)$$

Oldalnézet:



Alaprajz:



6. ábra

vagy — ha diafragmával vannak ellátva — meg vannak gátolva öblösödésükben:

$$(\vartheta_T)_0 = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 + \frac{1}{R} \left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0 = 0, \quad (10a)$$

ill.

$$(\vartheta_T)_l = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_l + \frac{1}{R} \left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l = 0. \quad (10b)$$

3. 13. A két végkeresztmetszet csak vízszintes síkban fordulhat el, azaz a függőleges síkú elfordulásuk zérus:

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0 \cdot \sin \alpha_0 - (\varphi)_0 \cdot \cos \alpha_0 = 0, \quad (11a)$$

illetve

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l \cdot \sin \alpha_l - (\varphi)_l \cdot \cos \alpha_l = 0. \quad (11b)$$

3. 14. Végül a két vonóvas miatt a két végkeresztmetszet csak azonos mértékben fordulhat el a vízszintes síkban:

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0 \cdot \cos \alpha_0 + (\varphi)_0 \cdot \sin \alpha_0 = \left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l \cdot \cos \alpha_l + (\varphi)_l \cdot \sin \alpha_l. \quad (12)$$

### 3. 2. Egyvonóvasas ív (2. ábra)

Most is érvényes a két vonóvasas ív első három feltételi egyenlete: (8), (9) vagy (10) és (11), de az utolsó (12) feltétel elmarad. Helyette azt kellene felírunk, hogy a végkeresztmetszetekre nem hat vízszintes síkú (külső) nyomaték. Az  $s = 0$  végen pl. ez így alakul:

$$(M_x)_0 \cdot \cos \alpha_0 - (M_t)_0 \cdot \sin \alpha_0 = 0. \quad (13)$$

Itt  $M_x$  az  $x$  tengely körül forgató hajlítónyomaték,  $M_t$  pedig a csavarónyomaték.

Kifejezzük a nyomatékokat a megfelelő merevségekkel és alakváltozásokkal:

$$(B_x \cdot \kappa_{Tx}) \cdot \cos \alpha_0 - \left(C \cdot \vartheta_T + C_1 \frac{d^2 \vartheta_T}{ds^2}\right) \cdot \sin \alpha_0 = 0. \quad (14)$$

Mivel feltevéseink szerint  $B_x = \infty$  és  $\kappa_{Tx} = 0$ , ezért az első zárójelben levő szorzat határozatlan értékű. Fizikailag ez azt jelenti, hogy bármekkora  $M_t$  csavarónyomaték ébred is az ív végén,  $M_x$  mindig éppen akkora lesz, hogy kielégüljön a (14) követelmény: a vízszintes síkú nyomatékmentesség.

Ez a negyedik feltételi egyenlet tehát  $B_x = \infty$  és  $\kappa_{Tx} = 0$  miatt értelmetlenné válik, ezért el kell hagynunk. A vízszintes síkú kényszermentességet az fogja biztosítani, hogy az energiamódszer szabályai szerint minimalizáljuk a terhet, és ez automatikusan olyan  $M_t$ -t fog szolgáltatni, amely a kényszermentességnek felel meg.

### 4. Az elcsavarodásfüggvény felvétele

A  $\varphi$  elcsavarodásfüggvény általános alakja, amellyel bármely megtámasztási feltételt ki tudunk elégíteni, a következő:

$$\begin{array}{ll} \text{szimmetrikus rész:} & \text{antimetrikus rész:} \\ \varphi = \sum_t \varphi_t \cdot \sin \lambda_t s & + \sum_p \Phi_p \sin \lambda_p s + \\ + \varphi_0 + \sum_p \varphi_p \cos \lambda_p s & + \sum_t \Phi_t \cos \lambda_t s. \end{array} \quad (15)$$

Itt

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \text{konst.}, \\ i &= 1, 3, 5, \dots, \\ p &= 2, 4, 6, \dots, \\ \lambda_i &= i\pi/l \quad (i = p, t). \end{aligned} \quad (16)$$

Ez a sor egyrészt az  $l$  hosszúságú tartomány teljes Fourier-sorát tartalmazza ( $a_0$  és  $p$ -indexes tagokat), ezenkívül azonban szerepelnek benne a  $t$ -indexes tagok is, amelyekkel együtt ez voltaképpen egy  $2l$  hosszúságú szakasz teljes Fourier-sorát képviseli. Ez utóbbi tagokat azért vettük még hozzá, mert az  $l$  hosszúságú szakasz Fourier-sora igen rosszul közelíti meg pl. a félsinus-hullámot (a kétesuklós rúd kihajlási alakját), amelyhez azonban elegendő a  $t$ -indexes tagokból az elsőt felvenni, hogy pontosan megkapjuk.

A (15) sor tagjai természetesen nem mind ortogonálisak, de ez nem okoz elvi nehézséget.

A szemléletesség kedvéért írtuk fel a (15) sor szimmetrikus ( $\varphi_i$ ) és antiszimmetrikus ( $\Phi_i$ ) részét különválasztva. Ezt a szétválasztást megtartva állítjuk elő az alábbiakban a többi szükséges alakváltozási mennyiséget:

Az (5) összefüggés alapján:

$$\begin{aligned} \text{antiszimmetrikus:} & & \text{szimmetrikus:} \\ R \frac{dv_T}{ds} &= - \sum_i \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \cos \lambda_i s & - \sum_p \frac{\Phi_p}{\lambda_p} \cos \lambda_p s + \\ & + \left( -\frac{\varphi_0 l}{2} + \varphi_0 s \right) + \sum_p \frac{\varphi_p}{\lambda_p} \sin \lambda_p s & + K_1 + \sum_t \frac{\Phi_t}{\lambda_t} \sin \lambda_t s, \end{aligned} \quad (17)$$

és

$$\begin{aligned} \text{szimmetrikus:} & & \text{antiszimmetrikus:} \\ R \cdot v_T &= - \sum_i \frac{\varphi_i}{\lambda_i^2} \sin \lambda_i s & - \sum_p \frac{\Phi_p}{\lambda_p^2} \sin \lambda_p s + \\ & + \left( K_2 - \frac{\varphi_0 l}{2} s + \varphi_0 \frac{s^2}{2} \right) - & + \left( -\frac{K_1 l}{2} + K_1 s \right) - \\ & - \sum_p \frac{\varphi_p}{\lambda_p^2} \cos \lambda_p s & - \sum_t \frac{\Phi_t}{\lambda_t^2} \cos \lambda_t s. \end{aligned} \quad (18)$$

A (17) kifejezésben leválasztottuk a  $K_1$  integrálási állandóból a  $-\varphi_0 l/2$  részt, a (18)-ban pedig  $K_2$ -ből a  $-K_1 l/2$  részt, hogy a  $\varphi_0 s$ , ill.  $K_1 s$  tagokkal együtt tiszta antiszimmetrikus függvényeket adjanak.

A még szükséges alakváltozási mennyiségeket  $\varphi$  deriválásával kapjuk:



<p><i>antimetrikus:</i></p> $\frac{d\varphi}{ds} = \sum_t \varphi_t \lambda_t \cos \lambda_t s$ $- \sum_p \varphi_p \lambda_p \sin \lambda_p s$	<p><i>szimmetrikus:</i></p> $+ \sum_p \Phi_p \lambda_p \cos \lambda_p s -$ $- \sum_t \Phi_t \lambda_t \sin \lambda_t s,$
---	--

(19)

<p><i>szimmetrikus:</i></p> $\frac{d^2\varphi}{ds^2} = - \sum_t \varphi_t \lambda_t^2 \sin \lambda_t s$ $- \sum_p \varphi_p \lambda_p^2 \cos \lambda_p s$	<p><i>antimetrikus:</i></p> $- \sum_p \Phi_p \lambda_p^2 \sin \lambda_p s -$ $- \sum_t \Phi_t \lambda_t^2 \cos \lambda_t s.$
---	--

(20)

A szimmetrikus és antimetrikus  $\varphi$ -rész szétválasztásának az az előnye, hogy azonnal kiderül: a (8), (9) ill. (10) és (11) feltételeket elegendő az ív egyik végén kielégíteni, ezzel ugyanis a másik végén is automatikusan teljesül a feltétel.

Így rögtön belátható, hogy a (8a) követelmény kielégítése esetében (8b) is automatikusan kielégül, akár szimmetrikus, akár antimetrikus  $\varphi$ -t vettünk fel.

Hasonló a helyzet a (9) feltétellel: ha (9a) teljesül, akkor (9b) is ki van elégítve, mivel az összetartozó (egymásból integrálással kapható)  $d^2\varphi/ds^2$  és  $d^2v_T/ds^2 = \varphi/R$  vagy egyszerre szimmetrikus, vagy egyszerre antimetrikus (vö. (15)-öt (20)-szal). Ugyanez a megfontolás érvényes (10a—b)-re is.

(11a—b)-ről a következőket állapíthatjuk meg: Az összetartozó  $dv_T/ds$  és  $\varphi$  közül az egyik szimmetrikus, a másik antimetrikus. Így ha (11a)-t kielégítjük, akkor (11b)-ben egy előjelváltás lesz. Ezt azonban az kompenzálja, hogy  $\alpha_l = -\alpha_0$  miatt  $\sin \alpha_l = -\sin \alpha_0$ . Így módon tehát (11a—b)-ből is elegendő csak az egyiket teljesíteni.

Végül a kétvonóvasas ívre vonatkozó (12) összefüggés *antimetrikus*  $\varphi$  esetén mindig teljesül, ti. ekkor  $(\varphi)_l = -(\varphi)_0$  és

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l = \left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0$$

(mert ez utóbbi szimmetrikus), valamint mivel  $\alpha_l = -\alpha_0$ . *Szimmetrikus*  $\varphi$  esetében azonban a bal oldalnak kell  $O$ -nak lennie (és ezzel együtt a jobb oldal is  $O$  lesz), ami az oldalirányú befogás esetének felel meg.

A megtámasztási feltételeket csak azért elégíthettük ki a szimmetrikus és antimetrikus alakváltozási résszel egymástól függetlenül, mert *homogénok* a megtámasztási feltételi egyenleteink. Ekkor ugyanis (a szimmetrikus alakváltozási komponens megfelelő mennyiségét A-val, az antimetrikusét B-vel

jelölve):

$$s = 0\text{-nál} \quad A + B = 0,$$

$$s = l\text{-nél pedig} \quad A - B = 0$$

alakú egyenletet kapunk, ami csak úgy teljesülhet, ha  $A = B = 0$ , azaz mind a szimmetrikus, mind az antimetrikus alakváltozási rész *külön-külön* kielégíti  $s = 0$ -nál a feltételi egyenletet, de ezzel automatikusan kielégül  $s = l$ -nél is a feltétel.

*Inhomogén* megtámasztási feltételi egyenletek esetében *együtt* kellene kezelni a szimmetrikus és az antimetrikus részt, s mind  $s = 0$ -nál, mind  $s = l$ -nél fel kellene írni az egyenletet.

### 5. Példák a módszer alkalmazására

Az eddig elmondottak alkalmazását a 7. ábrán vázolt méretű és keresztmetszetű héj-íven mutatjuk be, mégpedig egy és két vonóvas esetére, egyenletes radiális (4. ábra) és sinusvonal szerint változó antimetrikus teherre (5. ábra). Az ív végét mindegyik esetben szabadon öblösödőnek tekintjük.

Mivel célunk elsősorban az összehasonlítás és a nagyságrendi tájékoztatás, ezért a minimális szabad paraméterszámra fogunk szorítkozni: egyenletes teher esetében  $l$  paraméterre, antimetrikus teher esetében pedig külön  $l$  szabad paraméterre a szimmetrikus és külön  $l$  paraméterre az antimetrikus alakváltozás-komponenshez.

Be szeretnénk ezenkívül mutatni: milyen fontos, hogy megfelelően válasszuk ki a  $\varphi$  elcsavarodásfüggvény (15) sorából a figyelembe veendő tagokat, mert ezzel nagymértékben javíthatjuk (vagy ronthatjuk) a konvergenciát, illetve: a szükséges pontosság eléréséhez sokkal kevesebb (vagy sokkal több) tagot kell figyelembe vennünk.

#### 5.1. Kétvonóvasas ív

##### 5.1.1. Egyenletes radiális teher

A *szimmetrikus* alakváltozás két vonóvas esetében teljes oldalirányú befogást jelent. Ezt már [1]-ben megoldottuk, és eredményül — egy szabad paraméterrel —  $N_{kr} = 123,0$  Mp-t kaptunk (lásd a II. táblázat a) sorát).

Most tehát a tiszta *antimetrikus* alakváltozást kell megvizsgálnunk. Behelyettesítve (15) antimetrikus részét a (8a), (9a) és (11a) megtámasztási feltételekbe, a következő három egyenlethez jutunk:

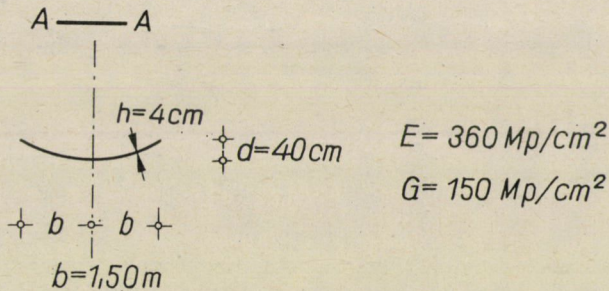
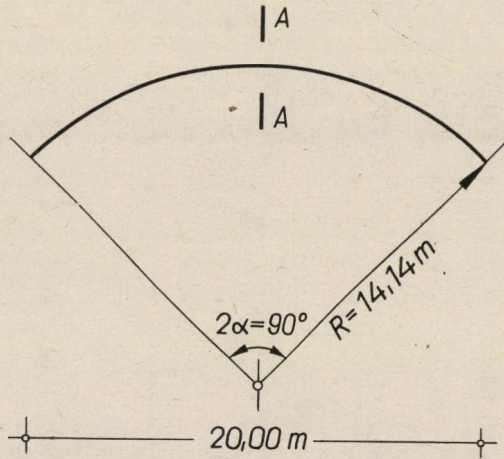
$$-\frac{K_1 l}{2} - \sum_t \frac{\Phi_t}{\lambda_t^2} = 0, \quad (21)$$

$$-\sum_t \Phi_t \lambda_t^2 + \frac{1}{R^2} \sum_t \Phi_t = 0, \quad (22)$$

$$\frac{1}{R} \left( -\sum_p \frac{\Phi_p}{\lambda_p} + K_1 \right) \sin \alpha_0 - \left( \sum_t \Phi_t \right) \cdot \cos \alpha_0 = 0. \quad (23)$$

A (12) peremfeltétel, amint már mondtuk, automatikusan kielégül.

Ahhoz, hogy egy szabad paraméterünk legyen az energiamódszerben, *négy* paramétert tartalmazó kifejezést kell felvennünk  $\varphi$ -re. A tagok kiválasztásakor arra kell ügyelnünk, hogy



7. ábra

ne jelentsenek a szükségesnél erősebb megkötést az ívre. Így a következő tagokat tartalmazó két kombinációt vesszük fel:

- a)  $\Phi_p$ -ből 0,  
 $\Phi_r$ -ből 3 tag,  
 $K_1$  [lásd (17)–(18)-at],

valamint:

- b)  $\Phi_p$ -ből 1 tag,  
 $\Phi_r$ -ből 2 tag,  
 $K_1$ .

Behelyettesítve ezeket a  $\varphi$ -kifejezéseket a (2) és a (6) munkakifejezésekbe és egyenlővé téve egymással a külső és a belső munkát, az I. táblázat a) és b) sorában megadott kritikus nyomóerőkhöz jutunk.

I. táblázat  
 Vonóvasas héjtek kritikus terhei

	$\varphi$		Kétvonóvasas ív	Egyvonóvasas ív
	szimmetrikus	antimetrikus		
Egyenletes radiális teher	a) —	$\sum_{1,3} \Phi_l \cos \lambda_l s (+ K_1)$	$N_{kr} = 153,1 \text{ Mp}$	$N_{kr} = 153,1 \text{ Mp}$
	b) —	$\sum_{1,2} \Phi_l \cos \lambda_l s + \Phi_2 \sin \lambda_2 s (+ K_1)$	$N_{kr} = 67,44 \text{ Mp}$	$N_{kr} = 67,44 \text{ Mp}$
	c) $\varphi_0 + \varphi_1 \sin \lambda_1 s + \varphi_2 \cos \lambda_2 s (+ K_2)$	—	—	$N_{kr} = 10,61 \text{ Mp}$
Antimetrikus teher	d) $\sum_{1,2} \varphi_l \sin \lambda_l s$	$+ \sum_{1,3,4} \Phi_l \cos \lambda_l s (+ K_1)$	$M_{2kr} = 128,7 \text{ Mpm}$	—
	e) $\sum_{1,2} \varphi_l \sin \lambda_l s$	$+ \sum_{1,2} \Phi_l \cos \lambda_l s + \Phi_2 \sin \lambda_2 s (+ K_1)$	$M_{2kr} = 65,3 \text{ Mpm}$	—
	f) $\sum_{1,3} \varphi_l \sin \lambda_l s$	$+ \sum_{1,3} \Phi_l \cos \lambda_l s (+ K_1)$	—	$M_{2kr} = 15,9 \text{ Mpm}$

## 5.12. Antimetrikus teher

[2]-ből tudjuk, hogy ehhez a teherhez *szimmetrikus és antimetrikus* részt tartalmazó alakváltozás-függvényt kell felvennünk, másképp a külső munka zérus lesz. Ezért annyi tagot választunk ki  $\varphi$  (15) sorából, hogy a megtámasztási feltételek kielégítése után mind a szimmetrikus, mind az antimetrikus alakváltozás résznek legyen egy-egy szabad paramétere.

Az antimetrikus alakváltozást már az 5.11. pontban behelyettesítettük a (8a), (9a) és (11a) megtámasztási feltételi egyenletekbe [(21)–(23) képletek]. Most tehát csak a *szimmetrikus* részt kell behelyettesítenünk a fenti három egyenletbe és (12)-be. Így az alábbi négy egyenlet adódik:

$$K_2 - \sum_p \frac{\varphi_p}{\lambda_p^2} = 0, \quad (24)$$

$$- \sum_p \varphi_p \lambda_p^2 + \frac{1}{R^2} \left( \varphi_0 + \sum_p \varphi_p \right) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{R} \left( - \sum_l \frac{\varphi_l}{\lambda_l} - \frac{\varphi_0 l}{2} \right) \sin \alpha_0 - \left( \varphi_0 + \sum_p \varphi_p \right) \cdot \cos \alpha_0 = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{R} \left( - \sum_l \frac{\varphi_l}{\lambda_l} - \frac{\varphi_0 l}{2} \right) \cdot \cos \alpha_0 + \left( \varphi_0 + \sum_p \varphi_p \right) \cdot \sin \alpha_0 = 0. \quad (27)$$

A felveendő  $\varphi$ -tagokat úgy kell megválasztanunk, hogy ne gátoljunk meg feleslegesen olyan mozgást, amit megengednének a megtámasztási feltételek. Így remélhető ugyanis, hogy nem kapunk sokkal nagyobb kritikus terhet a valóságosnál. Ezt pl. a következő kombinációkkal érhetjük el:

d) szimmetrikus:  $\varphi_l$ -ből 2 tag,

$\varphi_p$ -ből 0,

$K_2 = 0$ ,

$\varphi_0 = 0$ ,

antimetrikus:  $\Phi_p$ -ből 0

$\Phi_l$ -ből 3 tag,

$K_1$ .

e) szimmetrikus:  $\varphi_l$ -ből 2 tag,

$\varphi_p$ -ből 0,

$K_2 = 0$ ,

$\varphi_0 = 0$ ,

antimetrikus:  $\Phi_p$ -ből 1 tag,

$\Phi_l$ -ből 2 tag,

$K_1$ .

Behelyettesítve ezeket a (2) és (7) munka kifejezésekbe és minimalizálva a kritikus terhet, az I. táblázat d) és e) sorában feltüntetett eredményekhez jutunk.

## 5.2. Egyvonóvasas ív

A *szimmetrikus* alakváltozás megtámasztási feltételi egyenletei megegyeznek a kétvonóvasas ív (24), (25), (26) egyenleteivel. (A (27) egyenlet most elmarad, mivel a kétvonóvas okozta kényszert fejezte ki.)

Az *antimetrikus* alakváltozással kapható megoldások viszont teljesen megegyeznek a kétvonóvasas ív megoldásaival, mivel ugyanazok a megtámasztási feltételek érvényesek mind a két esetre [(21), (22), (23) egyenletek].

II. táblázat

Elcsavarodás ellen mereven megfogott végű héjívек kritikus terhei

	$\varphi$		Oldalirányban befogott, diafragmás ív	Oldalirányban befogott, szabadvégű ív	Oldalirányban csuklás, szabadvégű ív
	szimmetrikus	antimetrikus			
Egyenletes radiális teher	a) $\sum_{1,3} \varphi_l \sin \lambda_l s$	—	—	$N_{kr} = 123 \text{ Mp}$	—
	b) $\varphi_1 \sin \lambda_1 s$	—	—	—	$N_{kr} = 3,99 \text{ Mp}$
Antimetrikus teher	c) $\sum_{2,4} \varphi_p \cos \lambda_p s$	$+\sum_{2,4} \Phi_p \sin \lambda_p s$	$M_{2kr} = 89,39 \text{ Mpm}$	—	—
	d) $\sum_{1,3,5} \varphi_p \cos \lambda_p s$	$+\sum_{2,4,6} \Phi_p \sin \lambda_p s$	$M_{2kr} = 62,10 \text{ Mpm}$	—	—
	e) $\varphi_1 \sin \lambda_1 s$	$+\Phi_2 \sin \lambda_2 s$	—	—	$M_{2kr} = 198,53 \text{ Mpm}$
	f) $\sum_{1,3} \varphi_l \sin \lambda_l s$	$+\sum_{2,4} \Phi_p \sin \lambda_p s$	—	—	$M_{2kr} = 33,55 \text{ Mpm}$

### 5.21. Egyenletes radiális teher

A szimmetrikus alakváltozás egyik lehetséges fajtája az, amikor nem fordulnak el a végkeresztmetszetek. Ez oldalirányú befogást jelent és a két vonóvasas ívnél már tárgyalt megoldáshoz vezet, lásd a II. táblázat a) sorát.

Az egyvonóvasas ív azonban éppen abban különbözik a kétvonóvasastól, hogy végkeresztmetszetei szimmetrikus alakváltozás esetén el tudnak fordulni egymáshoz képest. Egy ilyen alakváltozás, amely tehát nem köti meg feleslegesen az ív végpontjainak mozgását, a következő:

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \varphi_I\text{-ből} \quad 1 \text{ tag,} \\ & \varphi_0 \\ & \varphi_P\text{-ből} \quad 1 \text{ tag} \\ & K_2. \end{aligned}$$

Ezzel valóban lényegesen kisebb kritikus teher adódik az a) megoldásénál (I. táblázat c) sor).

Az antimetrikus alakváltozás ugyanazokra a megoldásokra vezet, mint a kétvonóvasas ív esetében (I. táblázat a) és b) sor).

### 5.22. Antimetrikus teher

Szimmetrikus és antimetrikus alakváltozást kell felvennünk, egy-egy szabad paraméterrel:

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & \text{szimmetrikus: } \varphi_I\text{-ből} \quad 2 \text{ tag,} \\ & \text{antimetrikus: } \Phi_I\text{-ből} \quad 2 \text{ tag,} \\ & K_1 \end{aligned}$$

Az eredményt az I. táblázat f) sora mutatja.

## 6. Az eredmények értékelése

Az I. táblázatból azt a tanulságot vonhatjuk le, hogy számszerűen igen különböző eredményeket kaphatunk attól függően, hogy hogyan választjuk ki a  $\varphi$  függvény figyelembe veendő tagjait. Mivel az energiamódszer a pontos kritikus tehernél csak nagyobb értékeket szolgáltat, ezért a legkisebb eredmény áll a legközelebb a pontoshoz. Láthatjuk, hogy  $\varphi$  helyes megválasztása még abban az esetben is fontos, ha elektronikus számítógépre programozzuk a megoldást, mivel a konvergencia így sokszorosán gyorsabb lehet.

A II. táblázatban összehasonlítás céljából feltüntettük az elcsavarodás ellen mereven megfogott végű héjívvekre vonatkozó korábbi megoldásokat [1], [2]. (Megjegyezzük, hogy a II. táblázat f) sorában szereplő szimmetrikus alakváltozás-függvény formai hasonlósága ellenére nem azonos az I. táblázat f) sorának szimmetrikus alakváltozási részével, mivel egészen más megtámasztási feltételi egyenlet teremt kényszerkapcsolatot az együtthatók között.)

A mérnöki megfontolás szerint a vonóvasas héjívvek kritikus terheinek az oldalirányban befogott és az oldalirányban csuklós (szabadvégű) héjívvek kritikus terhei közé kell esniök, mégpedig a kétvonóvasasnak az oldalirányban befogottéihoz közelebb, az egyvonóvasasnak pedig az oldalirányban csuklósihoz közelebb.

A kétvonóvasas ív ugyanis szimmetrikus alakváltozás esetében azonos helyzetben van az oldalirányban befogott ívvel, s megtámasztása csak annyiban gyengébb, hogy végkeresztmetszetei antimetrikusan is el tudnak fordulni a vízszintes síkban.

Az egyvonóvasas ív pedig azért van merevebben megtámasztva, mint az oldalirányban csuklós, mert bár végkeresztmetszetei szabadon elfordulhatnak a függőleges tengely körül — ami a keresztmetszetek egyidejű elcsavarodását és oldalirányú (hajlítási) elfordulását jelenti —, ez a két forgás azonban ellenkező oldali kihajlási alakhoz tartozik, tehát gátolják egymást. Így jóllehet a végkeresztmetszetek nincsenek megfogva elcsavarodás ellen, mégis merevebb a megtámasztás, mintha oldalirányban csuklós lenne.

Mindezen megfontolások összhangban vannak az I. és II. táblázat *egyenletes radiális teherre* vonatkozó adataival. *Antimetrikus* teherre azonban még a következőket kell megfontolnunk:

A II. táblázatból látszik, hogy a konvergencia rosszabb, mint egyenletes radiális teher esetében. Ezért is tüntettük fel az  $1 + 1$  paraméterrel kapott *c)* és *e)* eredményeken kívül a  $2 + 2$  szabad paraméterrel számított *d)* és *f)* eredményeket is, amelyek már közel állnak a pontos értékhez. (Az oldalirányban befogott ívet itt diafragmásnak vettük, mivel csak erre az esetre van megoldásunk [2]-ben.) Várható tehát, hogy a vonóvasas ívek kritikus  $M_2$  nyomatéka is érezhetően kisebb lesz, ha több tagot veszünk figyelembe  $\varphi$  sorából.

A kétvonóvasas ív  $M_{2kr}$  értéke valóban kisebb az oldalirányban befogott ív ( $1 + 1$  paraméterrel számított) kritikus nyomatékánál, de az egyvonóvasas ívre *kisebb*  $M_{2kr}$  adódik, mint az oldalirányban csuklós ívre.

Ezt az előbb vázolt gondolatmenettel ellentétes eredményt az magyarázza, hogy az egyvonóvasas ív *antimetrikus* alakváltozással szemben *kevésbé mereven* van megfogva, mint az oldalirányban csuklós ív. Márpedig antimetrikus teher esetében az oldalirányban csuklós ív antimetrikus alakváltozási részének (belső) munkája nagyobb volt a szimmetrikus alakváltozáséhoz képest, mint az egyvonóvasas ív esetében. Így hiába lesz nagyobb a szimmetrikus alakváltozás rész munkája az egyvonóvasas esetben az oldalirányban csuklós ívénel, sokkal többet nyom a latban, hogy relatíve jóval kisebb lesz az antimetrikus alakváltozás-rész munkája.

Mindezek az összehasonlítások azt mutatják, hogy meglehetősen összetett probléma a héjívек különböző megtámasztásmódjainak hatása, és sokmindenre kell figyelemmel lennünk, ha mérnöki szemléletre akarjuk visszavezetni a jelenségeket.

## IRODALOM

- [1] KOLLÁR, L.—IVÁNYI, GY.: Kippen und Biegedrillknicken von Schalenbogen mit Hilfe der Energiemethode. *Bautechnik-Archiv*, 19. (1966). W. Ernst u. Sohn, Berlin—München.
- [2] KOLLÁR, L.—GÁRDONYI, Z.: Héjívек oldalirányú stabilitása antimetrikus teherre. VI. *Oszl. Közl.* (1967.) Kippen von Schalenbogen unter antimetrischer Belastung. *Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 243—264.
- [3] MOKK, L.: Helyszíni előregyártás. Ipari épületek, csarnokok. 2. kiadás. Műszaki Kiadó, Budapest, 1961. Bauen mit Stahlbeton-Fertigteilen. Hallen, Industriebauten. Verl. d. Ung. Akad. d. Wissenschaften — Ung. Verl. f. Technik. Budapest, 1960.
- [4] New type of precast arch roof. *Concrete Buildings and Concrete Products*. 31 (1956), 16—17. Neuartiges vorgefertigtes Hallendach. *Beton- und Stahlbetonbau* 51 (1956), 238.