HÁMORY ZOLTÁN

ÖSSZEFÜGGÉS A SÍK CSÚSZÓLAPOS TÖRÉSI ÉS AZ ALAKVÁLTOZÁSI ELMÉLETEK KÖZÖTT

A megengedhető igénybevételnek, ill. a talaj határfeszültségének meghatározása elméleti úton a talaj laboratóriumilag megállapított tényleges fizikai jellemzőinek törési elméletek vagy alakváltozási elméletek képleteibe való behelyettesítése útján történhet.

A talaj törésére kidolgozott elméleteknél feltételezzük, hogy függőleges terhelés hatására a határhelyzetnél a nyírófeszültségek egy csúszófelület mentén felemésztik a talaj nyírószilárdságát. Az alakváltozási elméleteknél az a határhelyzet a mértékadó, amikor a csúszófelület egyetlen pontjában vagy az alatt egy bizonyos zónában bekövetkezik a plasztikus alakváltozási feltétel.

A továbbiakban sáv alakú alaptestekre és egyenletesen megoszló függőleges terhelésre, tehát síkbeli megoldásra használatos elméletek matematikai átalakítása útján igazolható, hogy a sík csúszólapos törési elméletek és az alakváltozási elméletek közös alapformára hozhatók. Előbbiek alapján kimutatható, hogy a plasztikus tartomány felvett kiterjedésének mértéke milyen relatív biztonságot jelent a törési elméletekhez képest.

Sík csúszólapos törési elméletek

E csoportba tartozó elméletek közül legrégibb *Rankine* alapvető elmélete, melyet *Ritter* egészített ki olyképp, hogy $t = 0$, vagyis felszíni alapozás esetén szemcsés, kohézió nélküli talajok teherbírására is eredményt nyújtson, vagyis a terhelésből előálló E_a aktív és E_p passzív földnyomáson kívül az alaptest alatti földék önsúlyából származó $E_{a\gamma}$ aktív és $E_{p\gamma}$ passzív földnyomást is figyelembe veszi. A határhelyzetre jellemző:

$$E_a + E_{a\gamma} = E_p + E_{p\gamma}$$

amiből nyerhető az ismert összefüggés:

$$\sigma_t = t\gamma\, \mathrm{tg}^4(45^\circ + \varphi/_2) + \frac{b\gamma}{2}\left[\mathrm{tg}^5(45^\circ + \varphi/_2) - \mathrm{tg}(45^\circ + \varphi/_2)\right] +$$
$$+ C \,\mathrm{cotg}\,\varphi\left[\mathrm{tg}^4(45^\circ + \varphi/_2) - 1\right]. \qquad (1)$$

Előbbi rendezés után:

$$\sigma_t = \left[\mathrm{tg}^4(45^\circ + \varphi/_2) - 1\right]\left[t\gamma + \frac{b\gamma}{2}\,\mathrm{tg}(45^\circ + \varphi/_2) + C\,\mathrm{cotg}\,\varphi\right] + t\gamma \tag{2}$$

alakra hozható. Mivel:

$$\mathrm{tg}^4(45^\circ + \varphi/_2) - 1 = \left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)^2 - 1 = \frac{4\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)^2}$$

(2) felírható a következőképpen:

$$\sigma_t = \frac{4\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)^2}\left[t\gamma + \frac{b\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,(45^\circ + \varphi/_2) + C\,\mathrm{cotg}\,\varphi\right] + t\gamma\,, \tag{3}$$

ahol: σ_t a talaj törőfeszültsége,
b az alaptest félszélessége,
t a takarási mélység,
γ a talaj térfogatsúlya,
φ a talaj súrlódási szöge,
C pedig a kohéziója.

Terzaghi régi, sík csúszólapos törési elmélete a mélység és a kohézió hatása mellett az önsúlyból származó földnyomást, így az alaptest szélességének hatását is figyelembe veszi előbbivel egyezően és a talaj törési feszültségére *Jáky* által továbbfejlesztett, süllyesztett alapokra érvényes összefüggést nyeri:

$$\sigma_t = t\gamma\,\mathrm{cotg}^4\beta + \frac{b\gamma}{2}(\mathrm{cotg}^4\beta - 1)\,\mathrm{cotg}\,\beta + 2C\frac{\mathrm{cotg}\,\beta}{\sin^2\beta}\,, \tag{4}$$

ahol: $\beta = 45^\circ - \varphi/_2$.

Tekintettel arra, hogy:

$$\mathrm{cotg}(45^\circ - \varphi/_2) = \mathrm{tg}\,(45^\circ + \varphi/_2) = \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\,,$$

továbbá:

$$\sin^2(45^\circ - \varphi/_2) = \frac{1-\sin\varphi}{2}\,,$$

tehát:

$$2\,\frac{\mathrm{tg}(45^\circ + \varphi/_2)}{\sin^2(45^\circ - \varphi/_2)} = 4\,\frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi)^2} = \mathrm{cotg}\,\varphi\,\frac{4\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)^2} =$$

$$= \mathrm{cotg}\,\varphi\,[\mathrm{tg}^4(45^\circ + \varphi/_2) - 1]\,. \tag{5}$$

Ez utóbbi kifejezést (4) összefüggésbe helyettesítve és azt rendezve a (3) alatti alak adódik, vagyis teljesen azonos eredmény nyerhető, mint a *Rankine—Ritter*-é.

A szóban levő összefüggést *Belzeckij* is levezeti az előbbi feltételek figyelembevételével és kapja:

$$\sigma_t = t\,\gamma\,\mathrm{tg}^4\,(45^\circ + \varphi/_2) + b\,\gamma\,\frac{1 - \mathrm{tg}^4\,(45^\circ - \varphi/_2)}{\mathrm{tg}^5\,(45^\circ - \varphi/_2)} + 2\,C\,\frac{1 + \mathrm{tg}^2\,(45^\circ - \varphi/_2)}{\mathrm{tg}^3\,(45^\circ - \varphi/_2)}. \quad (6)$$

Mivel:

$$\mathrm{tg}(45^\circ - \varphi/_2) = \frac{1}{\mathrm{tg}(45^\circ + \varphi/_2)},$$

továbbá:

$$2\,\frac{1 + \mathrm{tg}^2\,(45^\circ - \varphi/_2)}{\mathrm{tg}^3\,(45 - \varphi/_2)} = 2\,\frac{1 + \dfrac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}}{\dfrac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \cdot \dfrac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}} =$$

$$= \frac{\dfrac{4}{1 + \sin\varphi}}{\dfrac{(1 - \sin\varphi)\cos\varphi}{(1 + \sin\varphi)^2}} = \frac{4}{\cos\varphi} \cdot \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}. \quad (7)$$

Mind a számlálót, mind a nevezőt (1— sin φ)-vel szorozva, a (7) alatti összefüggés a következőképpen alakul:

$$\frac{4}{\cos\varphi} \cdot \frac{(1 + \sin\varphi)\,(1 - \sin\varphi)}{(1 - \sin\varphi)^2} = 4\,\frac{\cos\varphi}{(1 - \sin\varphi)^2} =$$

$$= \mathrm{cotg}\,\varphi\,\frac{4\sin\varphi}{(1 - \sin\varphi)^2} = \mathrm{cotg}\,\varphi\,[\mathrm{tg}^4\,(45^\circ + \varphi/_2) - 1]. \quad (8)$$

Előbbiek a (6) alatti összefüggésbe való helyettesítés után:

$$\sigma_t = \frac{4\sin\varphi}{(1 - \sin\varphi)^2}\,[t\,\gamma + b\,\gamma\,\mathrm{tg}\,(45^\circ + \varphi/_2) + C\,\mathrm{cotg}\,\varphi] + t\,\gamma \quad (9)$$

kifejezést adják.

A (3) és (9) alatti összefüggés vizsgálatából látható, hogy azok megegyeznek egymással, kivéve a második tényező második tagját, ami:

a (3) kifejezésnél: $\dfrac{b\,\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,(45^\circ + \varphi/_2)$ (10)

a (9) kifejezésnél: $b\,\gamma\;\mathrm{tg}(45^\circ + \varphi/_2)$. (11)

A kettősség oka a feltételezésben keresendő. Ha a sávalap alatt a földtömeg szimmetrikusan sík csúszólapok mentén két oldalra, tehát egyidejűleg jobbra és balra kicsúszik, akkor a (10) kifejezés adódik. Ha pedig sík csúszólap mentén jobbra vagy balra csúszik ki a földtömeg a $2b$ szélességű sávalaptest alól, akkor a (11) kifejezést kell számításba venni. Előbbi eset a felvehető legkedvezőtlenebb feltétel alapulvételéből adódik, míg az utóbbit a talaj inhomogenitása és a terhelés nem pontosan centrikus volta miatt a gyakorlat leginkább igazolja. Tehát indokolt ez utóbbi meggondolásból adódó egyoldali csúszólap felvétele és a (9) összefüggés használata, ami által σ_t magasabb, kedvezőbb értékei nyerhetők.

Alakváltozási elméletek

Az e csoportba tartozó elméletek összefüggései közös formára hozhatók és általános alakjuk a következőképpen írható fel:

$$\sigma_m = \frac{\pi(t\gamma + B + C\operatorname{cotg}\varphi)}{\operatorname{cotg}\varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + t\gamma . \tag{12}$$

A legszigorúbb feltételezés az, hogy az alaptest legjobban igénybevett két sarokpontjában a terhelés plasztikus állapotot teremt, vagyis, ha a (12) formában $B = 0$, akkor *Fröhlich—Puzirevszkij* ; ha előbbin kívül $t\gamma$ is hiányzik az első tag számlálójából, akkor *Jáky* összefüggése nyerhető. A terhelés fokozásakor a plasztikus tartomány az alaptest alatt fokozatosan kiterjed, vagyis $B \neq 0$. Amennyiben a (12) kifejezésben $B = 2b\gamma \operatorname{tg}\varphi$ vagy $B = b\gamma \operatorname{tg}(45° + \varphi/_2)$, úgy *Maszlov*, ill. *Jaropolszkij* összefüggését kapjuk meg.

Előbbiekből látható, hogy minél nagyobb kiterjedésű plasztikus tartományt engedünk az alaptest alatt kifejlődni, annál nagyobb megengedhető igénybevételi érték kapható.

A két elmélet-csoport közötti összefüggés

Vizsgálatunk tárgyát képezi tehát a sík csúszólapos törési és az alakváltozási elméletek általános összefüggése. A sík csúszólapos törési elméletek általános alakja:

$$\sigma_t = \frac{4\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)^2}(t\gamma + A + C\operatorname{cotg}\varphi) + t\gamma , \tag{13}$$

ahol A (10), ill. (11) kifejezéssel egyenlő.

Az alakváltozási elméletek általános alakja pedig:

$$\sigma_m = \frac{\pi}{\operatorname{cotg}\varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}}(t\gamma + B + C\operatorname{cotg}\varphi) + t\gamma . \tag{14}$$

Kimutatható, hogy a (13) és a (14) képletben az első tag első tényezője között egyszerű összefüggés áll fenn; ugyanis:

$$\frac{\pi}{\operatorname{cotg}\varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sin\varphi}{\cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi} = \frac{4\sin\varphi}{\cos\varphi\left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}\,\frac{\pi}{4} .$$

Mind a számlálót, mind a nevezőt $\sqrt{1-\sin\varphi}$-vel szorozva,

lesz:

$$\frac{4\sin\varphi\,\frac{\pi}{4}\sqrt{1-\sin\varphi}}{\left[1-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi\right]\cos\varphi\sqrt{1-\sin\varphi}}=$$

$$=\frac{4\sin\varphi}{\left[1-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi\right]\sqrt{1+\sin\varphi}\,(1-\sin\varphi)}\,\frac{\pi}{4}\sqrt{1-\sin\varphi}\,. \tag{15}$$

A (15) kifejezés nevezőjében álló első két tényező egyszerűen írható úgy, hogy:

$$y=\left[1-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)tg\,\varphi\right]\sqrt{1+\sin\varphi}\approx 1-\sin\varphi. \tag{16}$$

Ennek bizonyítására felírható $y=y_1\cdot y_2$ Mac-Laurin-sor;

$$y_1=\left[1-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)tg\,\varphi\right] \quad \text{és} \quad y_2=\sqrt{1+\sin\varphi}.$$

A Mac-Laurin-sor általános alakja a következő:

$$y=y_{(0)}+\frac{y'_{(0)}}{1!}\varphi+\frac{y''_{(0)}}{2!}\varphi^2+\frac{y'''_{(0)}}{3!}\varphi^3+\cdots \tag{17}$$

A (17) általános alakban:

$$y_{(0)}=y_{1(0)}\cdot y_{2(0)}=1\cdot 1=1 \tag{18}$$

Továbbá:

$$y'_{(0)}=y'_{1(0)}\,y_{2(0)}+y_{1(0)}\,y'_{2(0)},$$

ahol:

$$y'_1=\left[tg\,\varphi-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\frac{1}{\cos^2\varphi}\right] \qquad \text{és}: y'_{1(0)}=-\frac{\pi}{2},$$

$$y'_2=\frac{\cos\varphi}{2\sqrt{1+\sin\varphi}} \qquad \text{és}: y'_{2(0)}=\frac{1}{2},$$

ezért:

$$y'_{(0)}=-\frac{\pi}{2}\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\pi-1}{2}. \tag{19}$$

Majd:

$$y''_{(0)}=y''_{1(0)}\,y_{2(0)}+2\,y'_{1(0)}\,y'_{2(0)}+y_{1(0)}\,y''_{2(0)},$$

ahol:

$$y_1'' = \left[\frac{2}{\cos^2\varphi} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{\sin 2\varphi}{\cos^4\varphi}\right] \qquad \text{és: } y_{1(0)}'' = 2$$

$$y_2'' = \frac{-\sin\varphi\, 2\sqrt{1+\sin\varphi} - \dfrac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1+\sin\varphi}}}{4\,(1+\sin\varphi)} = -\frac{\sin\varphi}{2\sqrt{1+\sin\varphi}} - \frac{\cos^2\varphi}{4\,(1+\sin\varphi)^{3/2}}$$

$$\text{és: } y_{2(0)}'' = -\frac{1}{4}$$

ezért:

$$y_{(0)}'' = 2.1 + 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2} + 1\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7-2\pi}{4}. \qquad (20)$$

Azután:

$$y_{(0)}''' = y_{1(0)}''' y_{2(0)} + 3\, y_{1(0)}'' y_{2(0)}' + 3\, y_{1(0)}' y_{2(0)}'' + y_{1(0)} y_{2(0)}''',$$

ahol:

$$y_1''' = \left[\frac{3\sin 2\varphi}{\cos^4\varphi} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{2\cos 2\varphi\cos^4\varphi + 4\cos^3\varphi\sin\varphi\sin 2\varphi}{\cos^8\varphi}\right]$$

$$\text{és: } y_{1(0)}''' = -\pi,$$

$$y_2''' = -\frac{2\cos\varphi\sqrt{1+\sin\varphi} - \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1+\sin\varphi}}}{4\,(1+\sin\varphi)} +$$

$$+ \frac{\sin 2\varphi\, 4\,(1+\sin\varphi)^{3/2} + 4\,\dfrac{3}{2}\sqrt{1+\sin\varphi}\cos^3\varphi}{16\,(1+\sin\varphi)^3} \qquad \text{és: } y_{2(0)}''' = -\frac{1}{8},$$

ezért:

$$y_{(0)}''' = -\pi \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + 1\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{23-5\pi}{8} \qquad (21)$$

A (18), (19), (20) és (21) alatti eredményeket (17) alattiba helyettesítve, a sorbafejtésre az alábbi összefüggés nyerhető:

$$y = 1 - \frac{\pi-1}{2}\varphi + \frac{\dfrac{7-2\pi}{4}}{2\,!}\varphi^2 + \frac{\dfrac{23-5\pi}{8}}{3\,!}\varphi^3 + \ldots$$

A műveletek elvégzése után lesz:

$$y = 1 - 1{,}07\,\varphi + 0{,}09\,\varphi^2 + \frac{0{,}91}{3\,!}\varphi^3 \ldots$$

ami rendezés után felírható úgy, hogy:

$$y = y_1 y_2 = \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \operatorname{tg} \varphi\right] \sqrt{1 + \sin \varphi} = 1 - (1{,}07 - 0{,}09\,\varphi)\,\varphi + \frac{0{,}91}{3\,!}\varphi^3 \ldots \tag{22}$$

Mivel a $\sin \varphi$ függvény 0 helyhez tartozó polinomja:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{3\,!}\varphi^3 + - \cdots$$

azért:

$$1 - \sin \varphi = 1 - \varphi + \frac{1}{3\,!}\varphi^3 - + \cdots \tag{23}$$

A (23) kifejezés a (22) formulához hasonló és a gyakorlatban előforduló $0^\circ \leq \varphi^\circ \leq 45^\circ$, azaz $0 \leq \varphi < 1$ értékhatárokon belül írható a (16) közelítő egyenlőség.

A (15) alattiból következik, hogy:

$$\frac{\pi}{\operatorname{cotg} \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} \approx \frac{4 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} 0{,}8 \sqrt{1 - \sin \varphi}\,. \tag{24}$$

A (24) összefüggés a gyakorlatban előfordulható φ értékeire nézve az 1. sz. táblázatban közölt értékeket adja. Látható a táblázatból, hogy a szóban levő formula $\varphi = 15°$—$20°$ között nyújtja a pontos értéket, míg a legnagyobb eltérés $\varphi = 5°$-nál, ill. $\varphi = 45°$-nál adódik. Ez azt jelenti, hogy az átmeneti talajoknál a közelítő képlet pontos eredményt nyújt.

1. sz. táblázat

Súrlódási szög $\varphi°$	(1) $\frac{\pi}{\operatorname{cotg}\varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}}$	(2) $\frac{4 \sin\varphi}{(1-\sin\varphi)^2} 0{,}8\sqrt{1-\sin\varphi}$	(3) Eltérés %-ban $\frac{\lvert 1 \rvert - \lvert 2 \rvert}{\lvert 1 \rvert} 100$
5	0,316	0,320	— 1,3
10	0,735	0,738	— 0,4
15	1,297	1,298	— 0,1
20	2,059	2,052	+ 0,3
25	3,110	3,080	+ 1,0
30	4,588	4,530	+ 1,2
35	6,710	6,590	+ 1,8
40	9,845	9,630	+ 2,3
45	14,639	14,280	+ 2,4

Az előzőek ismeretében a sík csúszólapos törési és az alakváltozási elméletek általános alakjaira írható, hogy:

$$\sigma_t = \frac{4 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} (t\gamma + A + C \operatorname{cotg} \varphi) + t\gamma \tag{25}$$

és:

$$\sigma_m \approx \frac{4 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} 0{,}8 \sqrt{1 - \sin \varphi}\,(t\gamma + B + C \operatorname{cotg} \varphi) + t\gamma . \qquad (26)$$

Ha a (25) kifejezésben $A = 0$, ill. $A = b\,\gamma\, \mathrm{tg}\,(45^\circ + \varphi/_2)$ és ugyanakkor a (26) kifejezésben $B = 0$, ill. $B = b\gamma\, \mathrm{tg}\,(45^\circ + \varphi/_2)$, vagyis általánosan, ha $A = B$, akkor felírható, hogy a biztonsági viszonyszám:

$$n = \frac{\sigma_t - t\gamma}{\sigma_m - t\gamma} = \frac{1}{0{,}8 \sqrt{1 - \sin \varphi}} = \frac{1{,}25}{\sqrt{1 - \sin \varphi}} . \qquad (27)$$

A (27) biztonsági viszonyszám a leírtak szerint a *Rankine* és a *Fröhlich—Puzirevszkij*, valamint a *Belzeckij* és a *Jaropolszkij* elméletek között áll fenn.

A sík csúszólapos törési és a megengedhető feszültségek $t\gamma$-val csökkentett értékeinek hányadosából nyert biztonsági viszonyszám a súrlódási szög függvénye és annak értékei a 2. sz. táblázatban láthatók.

Amennyiben $A \neq 0$, $B \neq 0$, akkor n 2. sz. táblázatban közölt értékei egy tényezővel való szorzás után nyerhetők. E tényező a (25) és (26) kifejezésekből adódik, miszerint:

$$n' = n \cdot m \qquad (28)$$

ahol:

$$m = \frac{t\gamma + A + C \operatorname{cotg} \varphi}{t\gamma + B + C \operatorname{cotg} \varphi} . \qquad (29)$$

2. sz. táblázat

Súrlódási szög φ°	Biztonsági viszonyszám $n = \frac{1{,}25}{\sqrt{1 - \sin \varphi}}$
0	1,25
5	1,31
10	1,38
15	1,45
20	1,54
25	1,65
30	1,77
35	1,92
40	2,09
45	2,31

Összefoglalás

Az értekezés első részében a sík csúszólapos törési elméletek ismert összefüggéseit vizsgálva kimutatható, hogy azok matematikai átalakítás után egymással közös alakra hozhatók. A (10) és a (11) kifejezés mutatta látszólagos kettősség miatt javasolható a (11), vagyis a (9) összefüggés használata, mint a valóságot jobban kifejező forma. Az alakváltozási elméletek közös alakja a (12) általános formula. Az értekezés utolsó pontjában bebizonyítást nyert, hogy a sík csúszólapos törési és az alakváltozási elméletek között összefüggés található a plasztikus tartomány kiterjedésének mértéke szerint. Matematikailag igazolható a (24) egyenlőség, amiből levezethető a sík csúszólapos törési és az alakváltozási elméletek $t\gamma$-val csökkentett értékeiből számítható biztonsági viszonyszám. Kimutatható, hogy előbb említett viszonyszám a súrlódási szög függvénye és az 1,25—2,31 között váltakozik. Általános esetben $n' = n \cdot m$, amikor is m (29) kifejezéssel egyenlő.

IRODALOM

[1] Dr. Széchy K.: Alapozás I. kötet 2. átdolgozott kiadás. *Budapest.* 1957.
[2] Kézdi Á.: Talajmechanika I. kötet. *Budapest.* 1952.
[3] Dr. Palotás L.: Mérnöki kézikönyv 2. kötet. *Budapest.* 1957.

A kézirat beérkezett 1959. november hóban.