

SZIVÁRGÁSI FELADATOK MEGOLDÁSA TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYSOROKKAL

Bevezető

Egyes szivárgási feladatokra, például gát alatti vagy szádfal körüli talajvízáramlásra, homogén altalaj esetén ismeretes az áramkép és ismerünk képleteket az átszivárgó vízmennyiségre vonatkozóan. A gyakorlatban azonban a legkritkább esetek közé tartozik a térszínig terjedő homogén talaj, s ezért ezek a megoldások legtöbbször csak tájékoztató jellegűek.

Folyók mentén gyakori, hogy a folyó vize vastagabb vízáteresztő réteget táplál, melyet alulról egy vízzáró agyagréteg határozottan elhatárol, felette pedig egy vagy több olyan talajréteget találunk, melyek szivárgási együtthatója — k tényezője — lényegesen kisebb a vízvezető réteg k_0 szivárgási együtthatójánál. A fedőrétegek ez esetben mintegy nyomás alá helyezik a vízvezető réteget, s ezért áradások alkalmával az árvédelmi töltésektől lényegesen nagyobb távolságban is előfordulhatnak vízfeltörések, mint ahogy az homogén talaj esetén várható volna.

A talajrétegek fekvése általában a Duna mentén is megfelel az előző bekezdésben vázolt körülményeknek. A tervezett dunai vízerőművek létesítésével kapcsolatban előállítandó állandóan magas duzzasztott vízszint döntő jelentőségűvé teszi a kérdést, milyen stacionár potenciáláramlás fog a vízvezető rétegben kialakulni, s a víztértől különböző távolságban fekvő pontokon a vízvezető rétegben mekkora nyomás fog előállni.

A kérdés felvetése természetesen a probléma irodalmi tárgyalását eredményezte. A közelmúltban jelent meg e tárgyban *Galli László* tanulmánya.* Megoldása két hipotézisen alapszik:

1. a nyomás alatt levő vízvezető rétegből a víz a legrövidebb úton, tehát függőleges vízszálak mentén áramlik a felszín felé és

2. a vízvezetőrétegben az áramvonalak vízszintesek, azaz a vízrészecske függőleges sebességi komponense elhanyagolható. E hipotézisek a gyakorlatban is kitűnően használható, egyszerű képletek felállítását tették lehetővé.

Galli László első feltevése mind a tapasztalatokkal, mind a szemlélettel jól egyezik, s azzal általában mindenki egyetértett. A második hipotézist

**Galli László*: Műtárgyak alatti szivárgások számítása rétegzett talajokban, közelítő eljárással. *Vízügyi Közlemények*, 1959. 3.

azonban számos támadás érte azon az alapon, hogy a függőleges sebességi komponens elhanyagolása a való helyzetet lényegesen eltorzíthatja.

Kovács György komplexváltozós függvények segítségével, konform leképezéssel keresi a fedőréteg alatt előálló potenciáláramlás törvényeit.

Jelen tanulmányunkban exakt matematikai módszerekkel kívánjuk meghatározni a fedőréteggel határolt vízvezetőrétegben előálló potenciáláramlás áramképét, potenciálfüggvényét és az átszivárgó víz mennyiségét egy egyszerűsített körülményeknek megfelelő szivárgási tartományban. Tanulmányunk egyik fontos célja annak kiértékelése, hogy a gyakorlati szempontból igen alkalmas Galli-féle megoldás mennyire tükrözi a valóságot, azaz mekkorák annak hibahatárai. Mindamallett elméletünk egyes egyszerűbb eredményei, mint például az átszivárgott víz mennyiségére vonatkozóan levezetendő képlet, közvetlenül a gyakorlat céljaira is felhasználhatók.

Elméletünk is feltételezi a Galli-féle első hipotézist, azaz a fedőrétegben a függőleges irányú vízmozgást.

Kitűzött feladatunk megoldását a függelékben részletesen ismertetett trigonometrikus függvénysoroknak az alkalmazása teszi lehetővé. E trigonometrikus függvénysorok a jól ismert Fourier-sor általánosításának tekinthetők, amennyiben az utóbbi a végtelen sok sorbafejtési lehetőség között speciális esetnek számít.

A matematikai irodalomban a sorbafejtéshez alkalmazott függvényrendszerek ortogonalitása (amiből függvénysorok képzésére való gyakorlati alkalmasságuk következik) már ismert. Mivel azonban egyrészt a módszert hazai irodalom még nem tárgyalta, másrészt a külföldi irodalom* is jóformán csak az ortogonalitás tényének megállapítására szorítkozik, a gyakorlatban való alkalmazáshoz célszerű segédeszközök (pl. a transzcendens alapegyenletek gyökeinek felkeresésére való közelítő képletek) ismertetése nélkül, helyesnek tartottuk az elmélet teljes ismertetését, de tanulmányunk vízépítési jellegére való tekintettel csak függelékben. Előre közöljük azonban az elmélet alapképleteit olyan mértékben, amennyire az a továbbiak megértéséhez szükséges.

1. Az általános trigonometrikus függvénysorok

Határozzuk meg a

$$\text{és } \left. \begin{aligned} \varphi \operatorname{tg} \varphi &= C_{\varphi} \\ \psi \operatorname{ctg} \psi &= C_{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

karakterisztikus egyenletek pozitív gyökeit. Jelentse φ_0 és ψ_0 ez egyenletek első gyökét (főértékét), φ_n és ψ_n az egyenletek $(n + 1)$ -ik gyökét (a második karakterisztikus egyenletnek $\psi = 0$ gyöke figyelmen kívül hagyandó). C_{φ} és C_{ψ} tetszőleges állandók, fenti képletekkel tehát kétszeresen végtelen sok

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots \\ \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

értékrendszer határozható meg.

* *Krúlov A. N.*: A matematikai fizika bizonyos műszaki alkalmazású differenciálegyenleteiről, 5. kiadás (orosz nyelvű), *Moszkva*, 1950, 227-228. oldalak

Legyen $f(x)$ függvény az $-l < x < +l$ intervallumban korlátos és legalább szakaszosan folytonos, úgy az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\varphi_n x}{l} + B_n \sin \frac{\psi_n x}{l} \right) \quad (3)$$

képlet szerinti trigonometrikus sorba fejthető. A képletben szereplő φ_n és ψ_n értékek valamelyik (φ) , (ψ) értékrendszer tagjai, az A_n és B_n együtthatók pedig az

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{\int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{\varphi_n x}{l} dx}{l \left(1 + \frac{\sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n} \right)} \\ B_n &= \frac{\int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{\psi_n x}{l} dx}{l \left(1 - \frac{\sin 2 \psi_n}{2 \psi_n} \right)} \end{aligned} \right\} [n = 0, 1, 2, 3 \dots] \quad (4)$$

képletekből határozandók meg.

Mivel kétszeresen végtelen sok (φ) (ψ) értékrendszer határozható meg, ezért a sorbafejtés is kétszeresen végtelen sok módon történhet, a C_φ és C_ψ állandók választásától függően.

Ha $C_\varphi = 0$ és $C_\psi = -\infty$ értékeket választunk, úgy a (φ) és (ψ) értékrendszer: $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \dots$ alakú lesz, a (3) alatti képlet az $f(x)$ függvény Fourier-sorába megy át, a (4) alatti képletek pedig a Fourier-együtthatók. Az általános trigonometrikus függvénytörvény tehát a Fourier-sor általánosítása.

Az (1) alatti karakterisztikus egyenletekből a (φ) és (ψ) értékrendszerek csak körülményesen határozhatók meg. Ezért célszerűen használhatók az alábbi közelítő képletek:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= n\pi + \varepsilon_n; \quad \varepsilon_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi\delta}{2C_\varphi} \right)^2 + \lambda_n^{(\varphi)}\delta} - \frac{n\pi\delta}{2C_\varphi}; \quad [n = 0, 1, 2, 3, \dots] \\ \delta &= \frac{3C_\varphi}{3 + C_\varphi}; \quad \lambda_n^{(\varphi)} = 1 - \frac{7\varepsilon_n^4}{315 - 30\varepsilon_n^2}; \quad \text{első közelítés } \lambda_n^{(\varphi)} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Fenti iterációs képlet $0,42^{0/00}$ -nél kisebb hibával adja a φ értékeket, s gyorsan konvergál, mert $\lambda_n^{(\varphi)}$ alig változik ε_n függvényében. Ha $\varepsilon_n \leq 0,5$, úgy $0,7^{0/00}$ hibán belül $\lambda_n^{(\varphi)} = 1$ helyettesíthető, s a φ_n értékek iteráció nélkül egy

lépésben számíthatók. Nagyobb n értékeknél ε_n értéke csökken, így egyszerűbb képletek is használhatók:

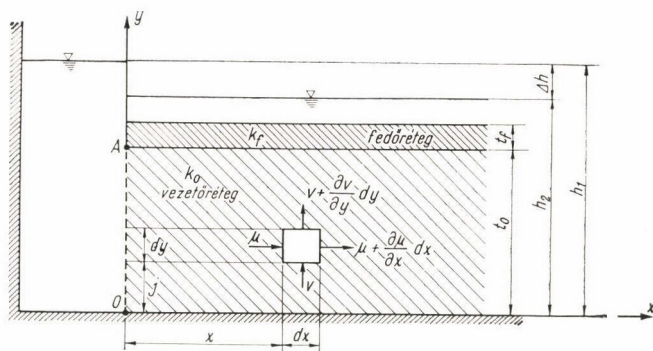
$$\left. \begin{array}{l} \text{ha } \varepsilon_n < 0,1 \varepsilon_0; \text{ akkor } \varepsilon_n = \frac{C_\varphi}{n\pi} - \frac{1}{\delta} \left(\frac{C_\varphi}{n\pi} \right)^3; \text{ hiba } < 0,20\% \\ \text{ha } \varepsilon_n < 0,02 \varepsilon_0; \text{ akkor } \varepsilon_n = \frac{C_\varphi}{n\pi}; \text{ hiba } < 0,40\% \end{array} \right\} \quad (6)$$

A ψ értékrendszer meghatározásához hasonló közelítő képletek állnak rendelkezésre, mivel azonban azokra e tanulmányban nem lesz szükségünk, csupán utalunk a függelékre.

2. A megoldandó szivárgási probléma

A megoldandó problémát egy elvont — egyszerűsített — feladattal kapcsolatban ismertetjük.

Az 1. ábrán felrajzoltuk egy kísérleti berendezés vázlatos hosszmetzetét. A berendezés két edényből áll, melyek az OA vonal mentén perforált lemezzel



1. ábra. Idealizált, fedőréteges szivárgási tartomány

vannak elválasztva. A jobboldali edény — melynek lezáró határfala gyakorlatilag végtelen távol képzelhető — t_0 magasságig k_0 szivárgási tényezőjű anyaggal van töltve, melyre egy kevésbé vízáteresztő t_f vastagságú k_f szivárgási tényezőjű fedőréteg kerül.

A kísérleti berendezés mindkét edényét vízzel feltöltjük úgy, hogy a baloldali edényben a vízszintet állandóan h_1 magasságban, a jobboldali edényben pedig h_2 magasságban tartjuk. A Δh vízszintkülönbség hatására a perforált lemezen és a talajrétegeken keresztül a víz a baloldali edényből a jobboldali edénybe stacionár áramlással átszivárog.

Feladatunk meghatározni az áramlás törvényeit, nyomásviszonyokat, sebességeket és az átszivárgó vízmennyiséget.

3. Az áramlási feladat differenciálegyenletei

Az 1. ábra szerint felvett (x, y) koordinátarendszerben a vízvezetőréteg bármely x és y koordinátákkal jellemzett pontján az általános irányú sebességvektort u és v komponenseivel jellemezzük. Mint ismeretes, a forrás- és örvénymentes áramlások potenciáláramlások, ahol az u és v sebességkomponensek egy Φ potenciálfüggvénynek és egy Ψ áramfüggvénynek parciális deriváltjaiként állíthatók elő:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}; & v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \\ u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}; & -v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

továbbá az u, v, Φ, Ψ függvények mind eleget tesznek a síkbeli ún. Laplace-féle potenciálegyenletnek:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0; & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

tehát az áramlás tartományában harmonikus függvények. Egyúttal u és v , valamint Φ és Ψ egymás konjugáltjai, vagyis eleget tesznek a Cauchy – Riemann-féle differenciálegyenleteknek:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}; & \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ha sikerül az u, v, Φ, Ψ függvényeket úgy meghatározni, hogy a fenti differenciálegyenletek, s egyszersmind az áramlás tartományának határvonalán a kerületi feltételek kielégüljenek, akkor feladatunkat megoldottuk.

Hogy a kerületi feltételeket felírhassuk, tisztáznunk kell a külső nyomásviszonyoknak és a Φ potenciálnak az összefüggéseit. Tételezzük fel először, hogy $\Delta h = 0$, azaz $h_1 = h_2$. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben statikus egyensúlyi állapot van, vízmozgás nincsen, a potenciál az áramlási tartomány minden pontjában azonos értékű állandó. Vízmozgás az áramlási tartomány két pontja között akkor indulhat meg, ha a két pont között szintkülönbség van (helyzeti potenciál, y ordinátával arányos), vagy ha nyomáskülönbség van (nyomáspotenciál, $\frac{p}{\gamma}$ -val arányos). A Φ potenciál tehát a $h = y + \frac{p}{\gamma}$ magassággal arányos, az x tengelyre, mint nívó-vonalra vonatkoztatva: $\Phi = c \cdot h = c \left(y + \frac{p}{\gamma} \right)$. Amíg $\Delta h = 0$, addig minden pontban $\Phi_2 = c \cdot h_2 = \text{constans}$.

Emeljük a vízszintet a baloldali edényben h_1 értékre, úgy az OA vonal mentén a potenciál értéke $\Phi_1 = c \cdot h_1$ értékű lesz, míg a t_f vastagságú fedőréteg felső síkján ($y = t_0 + t_f$) marad $\Phi_2 = c \cdot h_2$ kisebb érték. A vízszivárgás tehát a már tárgyalt módon megindul, s az áramlás tartományában, például az általános (x, y) koordinátájú pontban $\Phi = ch$, ahol $h_2 \leq h \leq h_1$.

A $h = y + \frac{p}{\gamma}$ érték az áramlási tartományban pontról-pontra változik.

Az

$$I_x = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{és} \quad I_y = -\frac{\partial h}{\partial y} \quad (10)$$

deriváltak az x és y irányú hidraulikus esést adják, s így a $v = kI$ Darcy-képlet alkalmazásával az u és v sebességkomponensek:

$$u = -k_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{és} \quad v = -k_0 \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (11)$$

Ezeket az összefüggéseket (7) első két egyenletével összehasonlítva, s figyelemmel a $\Phi = c h$ összefüggésre, nyilvánvaló, hogy

$$c = -k_0, \quad \text{s így} \quad \Phi = -k_0 h = -k_0 \left(y + \frac{p}{\gamma} \right) \quad (12)$$

alakban írhatjuk a Φ potenciálfüggvényt.

Ha az 1. ábrán kimetszett $dx dy$ élhosszúságú kimetszett hasábra vonatkozóan felírjuk a forrásmentesség feltételét, mely szerint az oldalak mentén dt idő alatt be- és kiáramló vízmennyiség összege zérus, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dx dt = 0,$$

azaz $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

folytán egyrészt a (9) alatti Cauchy – Riemann-féle differenciálegyenletek egyikét kapjuk, másrészt (7) alapján

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

annak igazolását, hogy a Φ potenciál harmonikus függvény.

31. Kerületi feltételek

Feladatunk megoldásához az áramlási tartomány határvonalain előírt kerületi feltételeket kielégítő harmonikus függvényekre van szükségünk.

Az edény fenekén ($y = 0$) a kerületi feltétel egyszerűen:

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad [\text{ha } y = 0] \quad (13)$$

Az OA vonal mentén a Φ potenciál állandó:

$$\Phi_1 = -k_0 h_1 = -k_0 h_2 - k_0 \Delta h = \Phi_2 - k_0 \Delta h \quad [\text{ha } x = 0]. \quad (14)$$

Az áramlási tartomány harmadik határa az $y = t_0$ érintkező vonal a vízvezetőrétég és a fedőrétég között. A fedőrétég már nem tartozik az áramlási tartományba, mert az áramlás előző pontban ismertetett differenciálegyenletei csak homogén tartományra érvényesek. A határvonalon viszont nem ismerjük a potenciál értékét, hiszen nem ismerjük a törvényszerűséget, milyen mértékű fojtást okoz a fedőrétég. A fedőrétég felső felületén ($y = t_0 + t_f$) a potenciál állandó: $\Phi_2 = -k_0 h_2$. A kerületi feltételt éppen ezért itt abból a törvényszerűségből határozzuk meg, hogy a v sebességkomponens a fedőrétégen átszivárgó víz szivárgási sebességével azonos. A fedőrétégben az x irányú sebességet elhanyagoljuk, illetve feltételezzük, hogy a fedőrétég fojtása miatt nyomás alá helyezett vezetőrétégből a víz a nyomáskülönbség függvényében függőlegesen tör át a fedőrétégen.

Az $y = t_0$ magasságban az egyenlőre ismeretlen $\Phi = -k_0 h$ potenciálból

$$h = -\frac{\Phi}{k_0}, \quad (15)$$

így a hidraulikus esés a fedőrétégen:

$$I_f = \frac{h - h_2}{t_f} = \frac{\Phi_2 - \Phi}{k_0 t_f} \quad [\text{ha } y = t_0] \quad (16)$$

s a Darcy-képlet alapján a sebesség a fedőrétégen át:

$$v_f = k_f I_f = \frac{k_f}{k_0} \frac{\Phi_2 - \Phi}{t_f} \quad [y = t_0]. \quad (17)$$

A határfeltétel tehát, hogy a $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ függőleges sebességkomponens a v_f sebességgel egyenlő az $y = t_0$ határvonalon

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{k_f}{k_0} \frac{\Phi_2 - \Phi}{t_f}, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \alpha \frac{\Phi}{t_0} - \alpha \frac{\Phi_2}{t_0} = 0 \quad [\text{ha } y = t_0], \quad (18)$$

ahol

$$\alpha = \frac{k_f t_0}{k_0 t_f} \quad (19)$$

constans paraméter a szivárgási tényezők és rétegvastagságok függvényében.

32. A Φ potenciálfüggvény

Állítjuk, hogy a

$$\Phi = \Phi_2 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} \quad (20)$$

alakú potenciálfüggvény segítségével mind az áramlás differenciálegyenletei, mind a kerületi feltételek kielégíthetők, sőt az OA vonal mentén ($x = 0$) nemcsak a $\Phi_1 = \text{const.}$ határfeltétel, hanem a potenciál bármely más eloszlása is kielégíthető.

Ismeretes, de differenciálással könnyen igazolható is, hogy a (20) jobb oldalán álló kifejezés harmonikus, azaz kielégíti a (8) alatti Laplace-féle differenciálegyenletet, bármely A_n, φ_n, t_0 értékek mellett. Így ez utóbbiakat kell a határfeltételeknek megfelelően meghatározni, s ha ez sikerül, feladatunkat megoldottuk.

33. A kerületi feltételek kielégítése

331. $y = 0$ határvonal

Kerületi feltétel (13) szerint $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$. Differenciáljuk tehát (20)-at:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n}{t_0} e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \sin \frac{\varphi_n y}{t_0}. \quad (21)$$

Ennek a kifejezésnek $y = 0$ helyettesítéssel minden tagja eltűnik, a határfeltétel tehát teljesül.

332. $x = 0$ határvonal

Kerületi feltétel (14) szerint, hogy $\Phi = \Phi_2 - k_0 \Delta h$ állandó. (20)-ban $x = 0$ helyettesítéssel tehát

$$\Phi_2 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} = \Phi_2 - k_0 \Delta h,$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} = -k_0 \Delta h. \quad (22)$$

Tekintve, hogy a bal oldalon az általános trigonometrikus függvénysor áll, mellyel az $0 < y < t_0$ intervallumban bármely függvény előállítható, így nincs akadálya annak, hogy a (22) jobb oldalán álló konstans érték függvény-sorát képezzük, feltéve, hogy a φ_n értékek az (1) alatti első karakterisztikus egyenlet gyökei. Az A_n együtthatók (4) alapján $f(x) = -k_0 \Delta h = \text{const.}$ helyettesítéssel:

$$A_n = -k_0 \Delta h \frac{\int_{-t_0}^{+t_0} \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} dy}{t_0 \left(1 + \frac{\sin 2\varphi_n}{2\varphi_n} \right)} = -k_0 \Delta h \frac{2 \sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n}. \quad (23)$$

333. $y = t_0$ határvonal

Kerületi feltétel (18) szerint $\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \alpha \frac{\Phi}{t_0} - \alpha \frac{\Phi_2}{t_0} = 0$, ha $y = t_0$. Helyettesítve ebbe (20) és (21) alattiakat:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n}{t_0} e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \sin \frac{\varphi_n y}{t_0} + \frac{\alpha}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} = 0,$$

azaz $y = t_0$ helyettesítéssel

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n}{t_0} e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \sin \varphi_n = \frac{\alpha}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \cos \varphi_n. \quad (24)$$

Az egyenlet fennáll, ha minden n -re tagonként is igaz:

$$A_n \frac{\varphi_n}{t_0} e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \sin \varphi_n = \frac{\alpha}{t_0} A_n e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \cos \varphi_n,$$

tehát

$$\varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n = \alpha \quad [n = 0, 1, 2, 3 \dots] \quad (25)$$

a feltételi egyenlete az $y = t_0$ kerületi feltétel teljesülésének. Ha tehát a (φ) értékrendszert az (1) alatti karakterisztikus egyenletből $C_\varphi = \alpha$ választással számítjuk, úgy célunkat elértük.

34. Az u , v , Φ és Ψ függvények általános alakja

Helyettesítsük (23)-at (20)-ba, úgy

$$\Phi = \Phi_2 - 2k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} \sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n}. \quad (26)$$

A (7) összefüggésekkel a két sebességkomponens:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} \sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} \quad (27)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \sin \frac{\varphi_n y}{t_0} \sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} \quad (28)$$

végül (7) figyelembevételével az áramfüggvény:

$$\Psi = 2k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \sin \frac{\varphi_n y}{t_0} \sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n}. \quad (29)$$

Mint ismeretes, az áramlási tartomány két tetszés szerinti pontjára meghatározott áramfüggvények különbsége a két ponton átmenő áramvonalak között időegységben átszivárgó vízmennyiséget adja. Ha a P és Q pont azonos áramvonalon van, úgy e különbség természetesen $\Psi_P - \Psi_Q = 0$, azaz $\Psi_P = = \Psi_Q$. $A\Psi = \text{const.}$ egyenletek tehát az áramvonalakat adják.

A (29) képlet jobb oldalán egy tetszés szerinti Ψ_0 integrálási állandó is szükséges lenne. A Ψ_0 állandót azonban úgy választjuk, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontján átmenő áramvonalra az áramfüggvény $\Psi = 0$ legyen. Mivel $y = 0$ helyettesítésével (29) jobb oldalán a Σ eltűnik, ezért a $\Psi = 0$ feltételt $\Psi_0 = 0$ elégíti ki.

Ilyen választás mellett az A ponthoz tartozó Ψ_A áramfüggvény az OA vonalon átszivárgó összes Q vízmennyiséget adja. Helyettesítve tehát (29)-be az A pont $(0, t_0)$ koordinátáit:

$$Q = 2 k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n}. \quad (30)$$

Megjegyezzük, hogy amint a $\Psi = \text{const.}$ egyenletek az áramvonalakat adják, ugyanúgy a $\Phi = \text{const.}$ egyenletek az aequipotenciális pontokat összekötő görbék egyenleteit jelentik. Mindkét görbesereg megszerkesztésével az áramlási viszonyok képiesen ábrázolhatók, amint azt a számpéldával kapcsolatban a 2. ábrán is láthatjuk.

A fenti trigonometrikus függvénysorok egy kivétellel konvergensek. Általában gyorsan konvergálnak, kivéve az $x \approx 0$ kezdeti sávot, ahol Φ és Ψ még elég jól, de u és v lassan konvergál. Az A ponti u sebességkomponens függvény sora divergens, azaz a tartomány A pontjában végtelen nagy u sebesség lép fel.

Az A ponti v_A sebességkomponens értéke, mely a fedőrétegen átszivárgó legnagyobb vízsebesség, s így a gyakorlat szempontjából fontos, egyszerűbb alakban írható fel. Mivel ugyanis kerületi feltételünk értelmében $v_A = v_f$, ezért (17) alapján $\Phi = \Phi_1$ helyettesítéssel

$$v_A = \frac{k_f}{k_0} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_f} = a \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_0} = k_0 \frac{h_1 - h_2}{t_0} a = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} a, \quad (31)$$

amint ez a (28) egyenletből $x = 0, y = t_0$ helyettesítéssel numerikus számpéldákkal is ellenőrizhető.

4. Egyszerűsítési lehetőségek

Az előző pont képletei meglehetősen komplikáltak, s így a gyakorlatban kevésbé hasznosíthatók. Szerencsére azonban a legtöbb gyakorlati esetre érvényes jó közelítő értékeket vezethetünk le abban az esetben, ha az a paraméter (19) szerinti értéke:

$$a = \frac{k_f t_0}{k_0 t_f} \leq 1. \quad (32)$$

Ez a korlátozás éppen a gyakorlatilag fontos esetekben teszi lehetővé egyes képletek egyszerűsítését, azaz akkor, ha a fedőréteg fojtása nagyobb mértékű.

41. A Q vízmennyiség képlete

Ha (30)-ban az (5) alatti $q_n = n\pi + \varepsilon_n$ helyettesítést végezzük:

$$Q = 2 k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon_n}{n\pi + \varepsilon_n + \sin \varepsilon_n \cos \varepsilon_n} =$$

$$= k_0 \Delta h \left[\frac{4 \sin^2 \varepsilon_0}{2 \varepsilon_0 + \sin 2 \varepsilon_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \varepsilon_n}{2 n \pi + 2 \varepsilon_n + \sin 2 \varepsilon_n} \right]. \quad (33)$$

Határozzuk meg a zárjeles kifejezés első tagjának közelítő értékét. Az ismert

$$2 \sin^2 \varepsilon_0 = 1 - \cos 2\varepsilon_0$$

összefüggés felhasználásával

$$\frac{4 \sin^2 \varepsilon_0}{2 \varepsilon_0 + \sin 2 \varepsilon_0} = \frac{2 - 2 \cos 2 \varepsilon_0}{2 \varepsilon_0 + \sin 2 \varepsilon_0} =$$

$$= \frac{2 - 2 \left[1 - \frac{(2 \varepsilon_0)^2}{2!} + \frac{(2 \varepsilon_0)^4}{4!} - \frac{(2 \varepsilon_0)^6}{6!} + \dots \right]}{2 \varepsilon_0 + \left[2 \varepsilon_0 - \frac{(2 \varepsilon_0)^3}{3!} + \frac{(2 \varepsilon_0)^5}{5!} - \dots \right]} = \varepsilon_0 \frac{1 - \frac{\varepsilon_0^2}{3} + \frac{2 \varepsilon_0^4}{45} - \dots}{1 - \frac{\varepsilon_0^2}{3} + \frac{3 \varepsilon_0^4}{45} - \dots}. \quad (34)$$

Mivel $\alpha \leq 1$ esetén a $\varphi \operatorname{tg} \varphi = \alpha$ karakterisztikus egyenlet első gyöke $\varphi_0 = \varepsilon_0 \leq 0,86$, ezért (34) jobb oldalán álló tört értéke alig tér el az egységtől. A legnagyobb eltérés $\alpha = 1$; $\varepsilon_0 = 0,86$ esetében 1,5% (a tört értéke 0,985). Ezt a hibát elhanyagolva

$$\frac{4 \sin^2 \varepsilon_0}{2 \varepsilon_0 + \sin 2 \varepsilon_0} \approx \varepsilon_0, \text{ ha } \alpha \leq 1 \quad (35)$$

Vizsgáljuk a következőkben a (33) alatti zárjeles kifejezés második tagját. Mivel a Σ értéke (6) figyelembevételével

$$\sin \varepsilon_n \approx \varepsilon_n \approx \frac{\alpha}{n\pi}$$

kapcsán közel kvadratikusan függ α -tól, ezért az összegnek ε_0 -hoz viszonyított értéke $\alpha = 1$ esetén legnagyobb. Ebben az esetben az $\varepsilon_1 = 0,284$; $\varepsilon_2 = 0,154$; stb. értékek alapján a Σ értékének elhanyagolása $\varepsilon_0 = 0,86$ mellett mintegy 5% hibát okoz Q értékében. Tekintettel arra, hogy k_0 értékében ennél sokkal nagyobb bizonytalanságokkal kell számolnunk, a Q vízmennyiséget megbízhatóan számíthatjuk a

$$Q = k_0 \Delta h \varepsilon_0$$

azaz (5) figyelembevételével ($\varepsilon_0 = \sqrt{\delta}$)

$$Q = k_0 \Delta h \sqrt{\frac{3 \alpha}{3 + \alpha}} = k_0 \Delta h \sqrt{\frac{3 k_f t_0}{3 k_0 t_f + k_f t_0}} \quad (36)$$

képletből, mely a gyakorlat igényeit is kielégítheti.

42. Szivárgási sebesség az OA vonalon ($x = 0$).

Az u sebességkomponens az OA vonalon változó értékű úgy, hogy az O pontban u_0 legkisebb értékű és az A pontban $u_A \rightarrow \infty$. Az A pont tehát szinguláris pont. A v sebesség értéke O pontban zérus, A pontban pedig a (31) alatt meghatározott v_A érték, mely az egész tartományban a legnagyobb v sebesség.

Az u sebességképleteket (27) alapján $x = 0$ és $y = 0$, illetve $y = t_0$ helyettesítéssel írhatjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \varphi_n \sin \varphi_n}{2 \varphi_n + \sin 2 \varphi_n} \quad (0 \text{ pont}) \\ u_A &= k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \varphi_n \sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n + \sin 2 \varphi_n} \quad (A \text{ pont}) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

vagy $\varphi_n = n\pi + \varepsilon_n$ helyettesítéssel:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 (n\pi + \varepsilon_n) \sin \varepsilon_n}{2n\pi + 2\varepsilon_n + \sin 2\varepsilon_n} \\ u_A &= k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n\pi + \varepsilon_n) \sin 2\varepsilon_n}{2n\pi + 2\varepsilon_n + \sin 2\varepsilon_n} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Először igazoljuk, hogy $u_A \rightarrow \infty$. Ha n elegendő nagy, úgy

$$\sin \varepsilon_n \approx \varepsilon_n \approx \frac{\alpha}{n\pi} \ll n\pi, \quad (39)$$

azaz a Σ alatti kifejezés nagy n értékeknél ($n > m$)

$$\sin 2\varepsilon_n \approx 2\varepsilon_n \approx \frac{2\alpha}{n\pi},$$

melynek összege

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2\alpha}{n\pi} = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty,$$

mert a harmonikus sor divergens.

Az u_0 értékének megközelítéséhez válasszuk külön a Σ -tól az $n = 0$ tagot és ott alkalmazzuk a (35) összefüggést:

$$u_0 = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \left[\frac{\varepsilon_0^2}{\sin \varepsilon_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 (n\pi + \varepsilon_n) \sin \varepsilon_n}{2n\pi + 2\varepsilon_n + \sin 2\varepsilon_n} \right].$$

A Σ alatt helyettesítsük a (39) közelítést

$$\begin{aligned} u_0 &= k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \left[\frac{\varepsilon_0^2}{\sin \varepsilon_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\varepsilon_n \right] = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \left[\frac{\varepsilon_0^2}{\sin \varepsilon_0} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \right] = \\ &= k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \left[\frac{\varepsilon_0^2}{\sin \varepsilon_0} - \frac{2\alpha \ln 2}{\pi} \right] = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \left[\frac{\varepsilon_0^2}{\sin \varepsilon_0} - 0,44\alpha \right], \end{aligned} \quad (40)$$

ahol a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$ ismert összefüggést alkalmaztuk.

A (40) képlet első tagja még tovább egyszerűsíthető. Ha $\alpha < 1$, tehát $\varepsilon_0 < 0,86$, úgy az (5) képletben szereplő $\lambda_0^{(\varphi)}$ tényező 1,3% hibán belül egyenlő az egységgel. Tehát ugyancsak (5) alapján

$$\varepsilon_0^2 \approx \delta = \frac{3\alpha}{3 + \alpha}, \quad (41)$$

Ha ezt az összefüggést az ismert

$$\sin \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_0^2}{6} + \frac{\varepsilon_0^4}{120} - \dots \right) \quad (42)$$

relációba helyettesítjük, akkor (41) és (42) segítségével az

$$\frac{\varepsilon_0^2}{\sin \varepsilon_0} \approx \sqrt{\alpha} \quad (43)$$

közelítést vezethetjük le, mely $\alpha < 1$ esetben 1,7% hibán belül igaz. Az u_0 sebességérték végleges képlete tehát a következő alakban írható:

$$u_0 = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} (\sqrt{\alpha} - 0,44\alpha), \quad (44)$$

melynek legnagyobb hibája az összes közelítés együttes hatására maximális értékben $\alpha = 1$ esetén -6% , s α csökkenése esetén a hiba is elenyészik.

Összehasonlítási alapul felírjuk még az OA vonalon átszivárgó víz átlagos sebességét, mely (36) alapján:

$$u_{\text{átl.}} = \frac{Q}{t_0} = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \varepsilon_0 = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sqrt{\frac{3\alpha}{3 + \alpha}}. \quad (45)$$

43. $A \Phi$ potenciál az $y = 0$ és $y = t_0$ határokon

A potenciálnak az áramlási tartományra vonatkozólag a (26) képlettel megadott értéke jellemzi az adott helyeken fellépő nyomásokat. Mivel a gyakorlatban kizárólag a nyomással dolgozunk s nem a potenciállal, helyesebb, ha a (26) egyenletet eleve a h nyomásra vonatkozólag alakítjuk át. Nyomás alatt természetesen az energiaszint magasságát értjük, azaz a helyzeti magasság és nyomásmagasság összegét, amint azt már tisztáztuk. A (15) összefüggés figyelembevételével a (26) egyenlet így írható:

$$h - h_2 = \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2e^{-\frac{\varphi_n x}{t_0}} \cos \frac{\varphi_n y}{t_0} \sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n}. \quad (46)$$

A képlet bal oldalán levő $(h - h_2)$ érték azt az energiatöbbletet jelenti, mely a vírzészecskét a tartomány legkisebb (h_2) energiaszintű pontjai felé hajtja. Ez az energiatöbblet természetesen pozitív mennyiség és kisebb a tartományban előforduló szélső energiaszintek Δh különbségénél, a (46) képlet jobb oldalán levő Σ értéke tehát zérus és az egység között változó.

Vizsgáljuk meg a nyomások változását a tartomány határain. Az $x = 0$ koordinátával jellemzett OA vonalon $h - h_2 = \Delta h$, hiszen ez képezte kiindulásunk alapját. Az $y = 0$ és $y = t_0$ határokon fellépő nyomások szempontjából kívánjuk a (46) képletet egyszerűsíteni. Fontosabb ezek közül az $y = t_0$ határ, tehát a fedőréteg alsó síkja, ezért előbb ezt tárgyaljuk.

A (46) képlet $y = t_0$ helyettesítéssel és az összeg első tagjának külön írásával következő alakot ölti:

$$h_f - h_2 = \Delta h \left[\frac{2 \sin 2 \varphi_0}{2 \varphi_0 + \sin 2 \varphi_0} e^{-\varphi_0 \frac{x}{t_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n + \sin 2 \varphi_n} e^{-\varphi_n \frac{x}{t_0}} \right]. \quad (47)$$

Az első tag trigonometriai átalakítással, a (35) alatti közelítés felhasználásával, ($\varphi_0 = \varepsilon_0$), a (25) alatti karakterisztikus egyenlet figyelembevételével, végül a (41) közelítéssel a következő módon változik:

$$\frac{2 \sin 2 \varphi_0}{2 \varphi_0 + \sin 2 \varphi_0} = \frac{4 \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{2 \varphi_0 + \sin 2 \varphi_0 \sin \varphi_0} \approx \frac{\varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{\varphi_0^2}{\alpha} \approx \frac{3}{3 + \alpha}. \quad (48)$$

A közelítéssel elkövetett hiba $\alpha < 1$ esetén kisebb 2,8%-nál.

A (47) jobb oldalán levő Σ alatti hasonló kifejezés nehezebben közelíthető, de egy érdekes megállapítást tehetünk. Tárgyaltuk ugyanis, hogy a (47) alatti zárjeles kifejezés értéke $x = 0$ helyen (az OA vonalon) az egységgel egyenlő. $x = 0$ helyettesítéssel viszont az exponenciális tagok az egységgel egyenlők és így (48) figyelembevételével:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n + \sin 2 \varphi_n} = \frac{\alpha}{3 + \alpha}. \quad (49)$$

Ha feltételünk értelmében $\alpha < 1$, úgy (48) értéke nagyobb, mint 0,75 és (49) értéke kisebb, mint 0,25. Ebből két dolog következik. Először, hogy mivel $x = 0$ helyen is az első tag dominál, ezért nagyobb x -nél, például, ha $x > t_0$ az első tagon kívül minden tag elhagyható. Az egymás utáni tagok ugyanis az exponenciális szorzó miatt mind erősebb csillapításúak, és már a második tag szorzója is kisebb $x = t_0$ helyen $e^{-\pi} = 0,043$ -nál (vö. 2. ábrával). Másodszor, hogy a (47) alatti összeg alárendeltebb jelentősége miatt az $x < t_0$ szakaszon is elegendő annak értékét durvább közelítéssel figyelembe venni. Helyettesítsük ezért a $\varphi_n = n\pi + \varepsilon_n$ összefüggést, majd alkalmazzuk a (39) alatti közelítést, melynek értelmében az ε_n értékek $n\pi$ mellett elhanyagolhatók, úgy (48)-at is figyelembe véve (47) így írható:

$$h_f - h_2 = \Delta h \left[\frac{3}{3 + \alpha} e^{-\varepsilon_0 \frac{x}{t_0}} + \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n\pi \frac{x}{t_0}} \right]. \quad (50)$$

Így végrehajtott közelítésünk pontosságát ellenőrizhetjük, ha meghatározzuk az (50) képletből $h_f - h_2$ értékét $x = 0$ helyen, ahol mint ismeretes, Δh értéket kellene kapnunk. Ehelyett az ismert

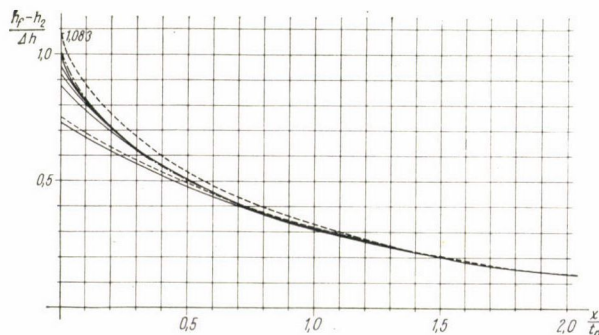
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (51)$$

összefüggés figyelembevételével

$$h_f - h_2 = \Delta h \left[\frac{3}{3+a} + \frac{a}{3} \right] = \Delta h \left[1 + \frac{a^2}{9+3a} \right] \quad (52)$$

értéket nyerjük, mely például $a = 1$ esetén $1,083 \Delta h$, az egyezés tehát elégtő annál inkább, mert növekvő x érték mellett a pontosság fokozódik.

A 2. ábrán megrajzoltuk $h_f - h_2$ görbéjét x függvényében $a = 1$ esetre. A folytonos vonallal húzott görbék a pontos (47) képlet alapján számított értékeket jelzik, és pedig az egyes tagoknak megfelelő értékek egymásrahalmozódását is mutatják. Látható, hogy az egymás utáni tagok mind kisebb x távolságra hatnak ki. A szaggatott vonallal rajzolt görbék közül az alsó az (50) képlet első tagjának felel meg, a felső a teljes összeget ábrázolja.



2. ábra. A nyomás változása a fedőréteg alsó síkján

A nyomáseloszlás függvényét az eddigiek alapján egyszerűbben és ugyanakkor pontosabban is felírhatjuk. Az (50) alatti zárjeles kifejezés első tagját ugyanis változatlanul hagyjuk, a második tagot pedig a függvényeként úgy írjuk fel, hogy $x = 0$ helyen a $h_f - h_2 = \Delta h$ határfeltétel kielégüljön, s ugyanakkor $h_f - h_2$ értéke változó x mellett a (47) egyenlettel megadott és a 2. ábrán megszerkesztett nyomásértékekhez $a = 1$ esetre minél jobban simuljon. Ez a függvény:

$$h_f - h_2 = \Delta h \left[\frac{3}{3+a} e^{-\varepsilon_0 \frac{x}{t_0}} + \frac{a}{3+a} e^{-2\pi \frac{x}{t_0}} \right], \quad (53)$$

melynek értékeit $a = 1$ esetre a 2. ábrán eredményvonal ábrázolja. A képlet $a \leq 1$ esetben 2–3% hibán belül adja meg a fedőréteg alsó síkjában fellépő nyomások értékeit.

Térjünk át a vízzáróréteg határán, tehát $y = 0$ vonalon fellépő nyomások vizsgálatára. A (46) képletben helyettesítsünk $y = 0$ értéket, írjuk külön az első tagot és alkalmazzuk ott a (35) közelítést, a Σ alatt pedig a (39) közelítéssel élünk, így

$$h_0 - h_2 = \Delta h \left[\frac{\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} e^{-\varepsilon_0 \frac{x}{t_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \varepsilon_n}{n\pi} e^{-n\pi \frac{x}{t_0}} \right]. \quad (54)$$

A zárjeles kifejezés első tagját (42) és (41) figyelembevételével alakítjuk át, a Σ alatt pedig az $\varepsilon_n \approx \frac{\alpha}{n\pi}$ további helyettesítést végezzük:

$$h_0 - h_2 = \Delta h \left[\frac{6 + 2\alpha}{6 + \alpha} e^{-\varepsilon_0 \frac{x}{t_0}} + \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n\pi \frac{x}{t_0}} \right]. \quad (55)$$

A képlet $x = 0$ helyen az ismert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad (56)$$

összefüggés alapján $h_0 - h_2 = 0,976 \Delta h$ értéket ad $\alpha = 1$ esetén, míg kisebb α mellett még jobban megközelíti az előírt Δh értéket. Az (55) alatti képlet szerkezetét megtartva, végleges képletünk a tartomány alsó határán fellépő nyomások értékére:

$$h_0 - h_2 = \Delta h \left[\frac{6 + 2\alpha}{6 + \alpha} e^{-\varepsilon_0 \frac{x}{t_0}} - \frac{\alpha}{6 + \alpha} e^{-\pi \frac{x}{t_0}} \right], \quad (57)$$

mely a határfeltételt $x = 0$ helyen minden α -ra kielégíti, s a tényleges nyomásértékeket $\alpha \leq 1$ esetén $1 - 2\%$ hibán belül megadja.

44. Függőleges sebesség a fedőrétegen keresztül

Gyakorlati szempontból a leglényegesebb kérdés a vízfeltörés lehetősége szempontjából a fedőrétegben fellépő sebesség, különösen, ha a fedőrétegben gyengébb helyek vannak. Szerencsére eddigi ismereteink elegendőek a sebesség megállapításához, ugyanis a sebesség arányos a fedőréteg alsó síkján fellépő nyomással, melyre (53) képletünk már rendelkezésre áll. A fellépő sebesség a Darcy-képlettel

$$v_f = \frac{k_f}{t_f} (h_f - h_2), \quad (58)$$

ahol k_f , t_f értékeit nyilván a leggyengébb pontokra vonatkozóan helyettesítjük (helyi értékek), a $h_f - h_2$ nyomást viszont az (53) képletből az átlagos talajviszonyok alapján határozzuk meg.

45. Összefoglalás

Eddigi vizsgálatainkban egy olyan tartományban előálló potenciáláramlást (talajvízmozgást) tárgyaltunk, mely véges mélységben vízzáró réteggel, a felszínén kisebb szivárgási együtthatójú fedőréteggel van határolva, harmadik határán a kerületi feltétel a potenciál állandósága, s negyedik határa a végtelenbe nyúlik. Meghatároztuk azokat a képleteket, melyek segítségével az áramlás jellemzői (nyomás, sebesség, vízhozam) a tartomány bármely pontjában számíthatók. A komplikált képleteket e jellemzők egyes kiválasztott pontokban és vonalakon előálló értékeire vonatkozólag lényegesen egyszerűsítettük és ezáltal a gyakorlat számára is alkalmassá tettük arra az esetre, ha a méretektől és szivárgási együtthatóktól függő α tényező kisebb az egységnél.

Képleteinket a számítás végrehajtásához szükséges összes segédképletekkel együtt az I. táblázat áttekinthető formában tartalmazza, s megadja a közelítő képlet alkalmazása esetén elkövetett hiba felső határát is.

Idealizált szivárgási tartomány áramképeinek jellemző képletei

I. táblázat

Jellemző megnevezése		Pontos képlet ($\alpha > 1$)	Közelítő képlet ($\alpha < 1$)	Közelítő képlet max. hibája $\alpha < 1$ esetén
Vízhozam	Áramfüggvény	$\Psi = 2 k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \varphi_n \sin \varphi_n \eta}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} e^{-\varphi_n \xi}$	—	—
	Összes vízhozam	$Q = 2 k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n}$	$Q = k_0 \Delta h \varepsilon = k_0 \Delta h \sqrt{\delta}$	4%
Vízszintes sebesség	Általában	$u = 2 k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n \sin \varphi_n \cos \varphi_n \eta}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} e^{-\varphi_n \xi}$	—	—
	0 pontban	$u_0 = 2 k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n \sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} e^{-\varphi_n \xi}$	$u_0 = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} (\sqrt{\alpha} - 0.44 \alpha)$	6%
	A pontban	$\frac{\infty}{Q}$	—	—
	OA vonalon átlag	$\frac{Q}{t_0}$	$u_{tl.} = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \varepsilon = k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sqrt{\delta}$	4%
Függ. seb.	Általában	$v = 2 k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n \sin \varphi_n \sin \varphi_n \eta}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} e^{-\varphi_n \xi}$	—	—
	$y = t_0$ vonalon (fedőrétegen)	$v_f = \frac{k_f}{t_f} (h_f - h_2)$	$v_f = \frac{k_f \Delta h}{t_f} \left(\frac{3}{3 + \alpha} e^{-\varepsilon \xi} + \frac{\alpha}{3 + \alpha} e^{-2\pi \xi} \right)$	2–3%
Nyomás	Általában	$h - h_2 = 2 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \varphi_n \cos \varphi_n \eta}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} e^{-\varphi_n \xi}$	—	—
	$y = t_0$ vonalon (fedőréteg alatt)	$h_f - h_2 = 2 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \varphi_n \cos \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} e^{-\varphi_n \xi}$	$h_f - h_2 = \Delta h \left(\frac{3}{3 + \alpha} e^{-\varepsilon \xi} + \frac{\alpha}{3 + \alpha} e^{-2\pi \xi} \right)$	2–3%
	$y = 0$ vonalon (vízzáró rétegnél)	$h_0 - h_2 = 2 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \varphi_n}{\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n} e^{-\varphi_n \xi}$	$h_0 - h_2 = \Delta h \left(\frac{6 + 2\alpha}{6 + \alpha} e^{-\varepsilon \xi} - \frac{\alpha}{6 + \alpha} e^{-\pi \xi} \right)$	1–2%
Jelölések és segédmenntiségek		$\alpha = \frac{k_f t_0}{k_0 t_f}; \quad \delta = \frac{3\alpha}{3 + \alpha}; \quad \lambda_n = 1 - \frac{7 \varepsilon_n^2}{315 - 30 \varepsilon_n^2}$ $\varepsilon_n = \sqrt{\left(\frac{n \pi \delta}{2 \alpha} \right)^2 + \lambda_n \delta} - \frac{n \pi \delta}{2 \alpha} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ $\varphi_n = n \pi + \varepsilon_n; \quad \xi = \frac{x}{t_0}; \quad \eta = \frac{y}{t_0}; \quad \Delta h = h_1 - h_2$	$\lambda_n = 1; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 = \sqrt{\delta};$ egyébként azonosak, mint $\alpha = 1$ esetben.	

5. Különleges esetek

A rétegvastagságok és szivárgási tényezők függvényeként megadott a tényező szempontjából két különleges eset tárgyalható: $a = 0$ és $a \rightarrow \infty$. Mivel a (19) képlet szerinti

$$a = \frac{k_f t_0}{k_0 t_f}$$

tényező akkor zérus, ha a fedőréteg ellenállása végtelen nagy ($k_f = 0$), vagy a szivárgási tartománynak nincs ellenállása ($k_0 \rightarrow \infty$), az $a = 0$ eset egyszerűen elintézhető. Ebben az esetben ugyanis a nyomás az egész tartományban azonos a felvízoldali h_1 nyomással.

Érdekesebb eredményt szolgáltat azonban az $a \rightarrow \infty$ eset, melynek fizikai értelme kettős lehet: véges t_0 szivárgási tartományról van szó fedőréteg nélkül ($t_f = 0$), vagy vízzáró réteggel nem határolt ($t_0 \rightarrow \infty$) tartomány van fedőréteggel lezárva. Következőkben e két esetet külön-külön vizsgáljuk.

51. Vízzáró réteggel határolt, fedőréteg nélküli tartomány

A (25) alatti karakterisztikus egyenlet gyöksorozata, ha az a tényező végtelenhez tart:

$$\varphi_n = \frac{2n+1}{2} \pi \quad [n = 0, 1, 2, 3 \dots] \quad (59)$$

s ezért

$$\sin \varphi_n = (-1)^n \quad \text{és} \quad \cos \varphi_n = 0. \quad (60)$$

Bevezetve még az 1. táblázatnál már alkalmazott

$$\xi = \frac{x}{t_0} \quad \text{és} \quad \eta = \frac{y}{t_0} \quad (61)$$

relatív koordinátákat, az áramlás jellemzőinek képletei az alábbiak lesznek:

$$\Psi = \frac{4}{\pi} k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin \varphi_n \eta e^{-\varphi_n \xi} \quad (62)$$

$$u = 2 k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos \varphi_n \eta e^{-\varphi_n \xi} \quad (63)$$

$$v = 2 k_0 \frac{\Delta h}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \varphi_n \eta e^{-\varphi_n \xi} \quad (64)$$

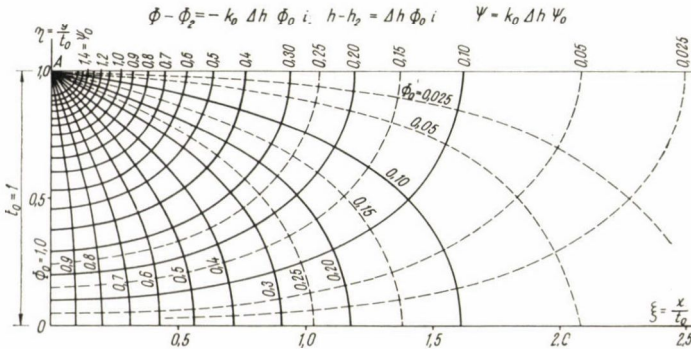
$$h - h_2 = \frac{4}{\pi} \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \varphi_n \eta e^{-\varphi_n \xi}. \quad (65)$$

Az $x = 0$ kezdeti szelvényen átfolyó összes vízmennyiség Q értéke a (62) képletből volna nyerhető, mint az $y = t_0$, azaz $\eta = 1$ ordinátaéhoz tartozó áramfüggvény, ebben a pontban azonban a sor divergenssé válik, azaz $Q \rightarrow \infty$ adódna. Mivel egyébként a sor mindenütt konvergens, az A pontban szivárog át végtelen vízhozam. Ez természetes is, hiszen itt a szivárgási út zérus, tehát a sebesség is végtelen.

A (65) képletben a Φ potenciál helyett a h nyomás képletét adtuk meg. A potenciál ebből a (15) képlettel írható fel:

$$\Phi - \Phi_2 = -\frac{4}{\pi} k_0 \Delta h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \varphi_n \eta e^{-\varphi_n \xi}. \quad (66)$$

Mivel mind ebben a kifejezésben, mind az áramfüggvény (62) alatti képletében a Σ alatt csak a ξ, η méret nélküli viszonzyszámok fordulnak elő, s mindkét képlet ugyanazzal a $k_0 \Delta h$ tényezővel van szorozva, az áramképet egyszer s mindenkorra alakhelyesen megszerkeszthetjük, s ennek adatait bármely tényleges feladatnál felhasználhatjuk. A 3. ábrán vázolt áramképet $t_0 = 1$ és



3. ábra. Idealizált, fedőréteg nélküli tartomány áramképe

$k_0 \Delta h = 1$ választással rajzoltuk meg. Gyakorlati alkalmazás esetén az ábrát $1 : t_0$ méretarányú rajznak tekintjük és a görbékre írt számokat a tényleges $k_0 \Delta h$ értékkel szorozzuk.

Megállapítható az ábrából, hogy a vízzáró réteg mélységének megfelelő távolságban a nyomás a mélyben is negyedére csökken.

Ismeretes, hogy a végtelen mély vízvezető réteg esetén előálló áramkép keskeny (zérus) talpszélességű gáttest alatt körökből és sugarakból áll. A 3. ábra bal felső sarkában láthatjuk ezt az áramképet, mert itt a sarok környezetében a vízzáró réteg mélysége gyakorlatilag végtelen.

Megjegyezzük végül, hogy a bal felső sarokpont (A pont) a tartomány szinguláris pontja, mert közös pontja az $\eta = 1$ egyenesnek, ahol a potenciál $\Phi_0 = 0$ és a $\xi = 0$ egyenesnek, ahol $\Phi_0 = 1$. E szingularitás az oka annak, hogy a következő pontban tárgyalt esetben képleteink nem adnak megoldást.

52. Végtelen mély tartomány fedőréteggel

Tárgyaltuk, hogy az a tényező a t_0 mélységgel együtt ebben az esetben is a végtelenhez tart. Várható volna, hogy a (62–65) képletek, melyeket $a \rightarrow \infty$ alapon írtunk fel, limesképzés esetén a fedőréteggel takart végtelen mély rétegben előálló szivárgás képleteit adják. A képletek azonban sajnos koordináta-transzformáció esetén is azonosan zérus eredményt adnak bármely véges mélységű pontra. Ennek oka nyilván az, hogy a mélység végtelenre való növelése miatt az egész véges tartományra vonatkozik az előző pont utolsó bekezdésében említett szingularitás.

A fedőréteges, végtelen mély tartományra tehát precíz megoldást nem tudunk adni. Jó közelítésül szolgálhat azonban, ha az áramképet meghatározzuk elegendő mélyen választott vízzáró réteg felvételével. A 3. ábra tanúsága szerint a vízzáró réteg ama határmélysége, melyen túl való sülyesztése már gyakorlatilag hatástalan az áramkép felső részére, a vizsgálat tárgyát képező tartomány mélységének 3–5-szörösében vehető fel.

6. Gyakorlati feladatok megoldása

Eddig ismertetett elméletünk elvi megoldást jelent olyan szivárgási tartományra, illetve olyan kerületi feltételekre, melyek a gyakorlatban soha sem fordulnak elő. Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan használhatók az elmélet eredményei gyakorlati esetek megoldása során.

A gyakorlati esetekben ritkán fordul elő egyetlen homogén fedőréteg. Több, különböző vastagságú és szivárgási tényezőjű fedőréteg azonban mindig helyettesíthető egyetlen fiktív fedőréteggel, mely hatásaiban a több fedőréteggel egyenértékű. A 61. pontban az egyenértékű fedőréteg jellemzőit határozzuk meg.

Az áramkép meghatározása általában töltések vagy egyéb műtárgyak alatti szivárgásra vonatkozóan válik szükségessé. A műtárgy B szélessége lehet a vízvezető réteg t_0 mélységéhez képest keskeny, mely esetben az áramkép szerkesztésénél elhanyagolható, vagy széles, mely esetben feltétlenül figyelembe veendő. A fedőréteg a felvízi és alvízi oldalon lehet azonos, mely esetben a teljes elrendezés és ezzel az áramkép is szimmetrikus, vagy lehet különböző, mely esetben az áramkép aszimmetrikus. E fejezet további pontjaiban ezekkel a változatokkal foglalkozunk. Megjegyezzük azonban, hogy a vízzáró és vízvezető rétegek elrendezését mindegyik változatnál szimmetrikusnak tételezzük fel.

61. Az egyenértékű fedőréteg meghatározása

Igazolni fogjuk, hogy ha a t_0 vastagságú áramlási tartomány felett több különböző $t_{f1}, t_{f2}, \dots, t_{fm}$ vastagságú és $k_{f1}, k_{f2}, \dots, k_{fm}$ szivárgási tényezőjű fedőréteg található, úgy az m számú fedőréteg hatása egyenértékű egyetlen

$t_f = \sum_{i=1}^m t_{fi}$ vastagságú és ideális

$$k_f = \frac{t_{f1} + t_{f2} + \dots + t_{fm}}{\frac{t_{f1}}{k_{f1}} + \frac{t_{f2}}{k_{f2}} + \dots + \frac{t_{fm}}{k_{fm}}} = \frac{t_f}{\sum_{i=1}^m \frac{t_{fi}}{k_{fi}}} \quad (67)$$

szivárgási tényezőjű fedőréteg hatásával.

Bizonyításunk során feltételezzük, hogy a fedőrétegeken a víz v_f függőleges sebességgel szivárog, mely természetesen mindegyik rétegre azonos értékű, s az u sebességkomponens a fedőrétegekben $u_f = 0$.

A v_f sebességet az egyes rétegekben $\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_m$ relatív nyomásesések tartják fenn, melyek a Darcy-képlet minden egyes rétegre való alkalmazásával a

$$v_f = \frac{k_{f1}}{t_{f1}} \Delta h_1 = \frac{k_{f2}}{t_{f2}} \Delta h_2 = \dots = \frac{k_{fm}}{t_{fm}} \Delta h_m \quad (68)$$

összefüggéseket kielégítik s egyúttal

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_m = h - h_2, \quad (69)$$

ha $h - h_2$ az összes réteg együttes nyomásesése, mint egyetlen fedőréteg esetén.

A (68) egyenletekből a Δh_i értékeket képezve és (69)-be helyettesítve

$$\left(\frac{t_{f1}}{k_{f1}} + \frac{t_{f2}}{k_{f2}} + \dots + \frac{t_{fm}}{k_{fm}} \right) v_f = h - h_2$$

adódik, amit összehasonlítva a $t_f = \Sigma t_{fi}$ vastagságú egyetlen fedőrétegre felírható Darcy-képlettel:

$$\frac{t_f}{k_f} v_f = h - h_2$$

nyilvánvaló, hogy

$$\frac{t_f}{k_f} = \frac{t_{f1}}{k_{f1}} + \frac{t_{f2}}{k_{f2}} + \dots + \frac{t_{fm}}{k_{fm}} = \sum_{i=1}^m \frac{t_{fi}}{k_{fi}},$$

amiből az egyenértékű fedőréteg ideális k_f szivárgási tényezőjét kifejezve, valóban (67) adódik.

62. Az áramkép meghatározása kis lábszélességű műtárgy és szimmetrikus rétegződés esetén

Ha a rétegződés az alvízi és felvízi oldalon azonos, tehát a gát tengelyvonala a teljes szivárgási tartománynak szimmetriatengelye, úgy az áramkép is szimmetrikus lesz. A szimmetria folytán a szimmetriatengely potenciálvonal lesz, melyen a potenciál értéke, azaz a nyomás értéke állandó. A 2–4. pontokban ismertetett elvi megoldásunk tehát minden változtatás nélkül érvényes erre az esetre, csupán a Δh értéket kell megfelelően választanunk.

Jelöljük a felvízszint magasságát H_f , az alvízszintét H_a betűkkel. Legyen a teljes szivárgási tartományra vonatkozó alapsík az alvízszint, tehát $h_2 = H_a$. A felvíz és alvíz szintkülönbségét $H = H_f - H_a$ betűvel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy a szimmetriatengelyben fellépő nyomás értéke a felvízi H nyomástöbbletnek fele, azaz

$$\Delta h = \frac{H}{2}. \quad (70)$$

Ha képleteinket a (70) alatt adott Δh értékkel használjuk, úgy meghatározhatjuk a szivárgás áramképét. A számítás menetét egy számpéldával kapcsolatban mutatjuk be.

Határozzuk meg az áramképet a 4. ábrán vázolt $t_0 = 10$ m vastag, $k_0 = 10^{-2}$ cm/sec szivárgási együtthatójú vízvezető rétegre vonatkozóan, mely felett három fedőréteget találunk, az alábbi jellemzőkkel:

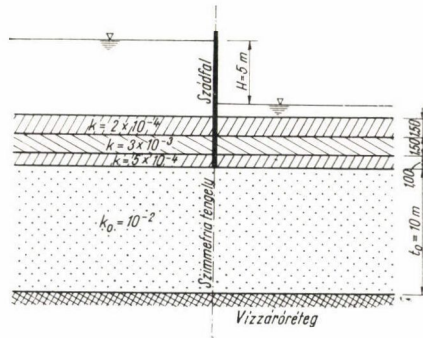
$$\begin{array}{ll} t_{f1} = 1,50 \text{ m}, & k_{f1} = 2 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}, \\ t_{f2} = 1,50 \text{ m}, & k_{f2} = 3 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}, \\ t_{f3} = 1,00 \text{ m}, & k_{f3} = 5 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}. \end{array}$$

A vízszintkülönbség a felvízi és alvízi szintek között $H = 5$ m.

Először a $t_f = 4,00$ m vastag egyenértékű fedőréteg ideális szivárgási tényezőjét határozzuk meg. A (67) képlet alapján $k_f = 4 \times 10^{-4}$ cm/sec.

A (19) képlet szerint $\alpha = 0,1$, a (25) alatti karakterisztikus egyenlet tehát

$$\varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n = 0,1.$$



4. ábra. Szimmetrikus szivárgási tartomány keskeny műtárggyal

A karakterisztikus egyenlet gyökei (az (5–6) egyenletek segítségével számítva):

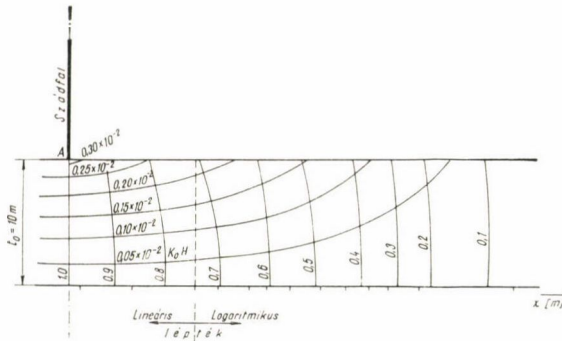
$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0,311 \quad (\varepsilon_0 = 0,311) \\ \varphi_1 &= 3,173 \quad (\varepsilon_1 = 0,032) \\ \varphi_2 &= 6,299 \quad (\varepsilon_2 = 0,016) \\ \varphi_3 &= 9,435 \quad (\varepsilon_3 = 0,011) \\ \varphi_4 &= 12,574 \quad (\varepsilon_4 = 0,008) \\ \varphi_5 &= 15,714 \quad (\varepsilon_5 = 0,006) \\ \varphi_6 &= 18,855 \quad (\varepsilon_6 = 0,005) \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Az áramkép meghatározásához szükséges Δh érték H fele, azaz 2,50 m. Helyesebb azonban, ha az áramképet $\Delta h = 1$ esetre határozzuk meg és a tényleges Δh értékkel csak a kiértékelésnél szorzunk, így különböző vízszint-különbségekre is helyes megoldást kapunk.

Mivel az áramlási tartomány szimmetrikus, elegendő a felével, például a jobboldali felével foglalkoznunk. Létesítsünk a tartományban különböző x és y értékekkel négyzöghálózatot, s határozzuk meg a hálózat sarokpontjaiban az *I. táblázatban* összegyűjtött képletek segítségével a Ψ áramfüggvény és a $h - h_2$ nyomásfüggvény értékeit. Utóbbi azonos a Φ potenciállal, csupán ellenkező előjelű és nincs szorozva k_0 értékkel, használata viszont jobban kézzelfogható. A kapott értékeket a négyzöghálózat sarokpontjaira felírva a geodéziai kótás projekcióhoz hasonló ábrát nyerünk, melyből a $\Phi = \text{constans}$ potenciálvonalak (vagy nyomásvonalak) és a $\Psi = \text{constans}$ áramvonalak úgy szerkeszthetők, ahogyan a rétegvonalakat szerkesztjük a kótás projekcióból.

Példánkban az így megszerkesztett áramképet az 5. ábra mutatja. Mivel az áramkép természetes léptékben hosszúra nyúlt volna, az ábrán az $x > 10$ m értékeknél logaritmikus léptékre tértünk át.

A szádfal tengelyében a fedőréteg alsó síkján kapott áramfüggvényérték a teljes vízhozamot adja. A számított érték $0,312 \times 10^{-2} \Delta h$. Ha az összes vízhozamot az 1. táblázati közelítő képlettel számítjuk, úgy $Q = 0,311 \times 10^{-2} \Delta h$ értéket kapunk, jó egyezésben a pontos értékkel.



5. ábra. Szimmetrikus szivargási tartomány áramképe keskeny műtárgy esetén

Az 1. táblázatban foglalt közelítő képletekkel a szivargás néhány jellemzőjét a $\Delta h = 2,50$ m értékkel meghatározva, az alábbi eredmények adódnak:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 0,68 \times 10^{-3} \text{ cm/sec} \\
 u_{\text{átl.}} &= 0,78 \times 10^{-3} \text{ cm/sec} \\
 v_{f\text{max}} &= 0,25 \times 10^{-3} \text{ cm/sec} \\
 Q &= 0,78 \text{ cm}^2/\text{sec} = 0,078 \text{ l/secfm} = 0,28 \text{ m}^3/\text{órafm}
 \end{aligned}$$

63. Az áramkép meghatározása kis lábszélességű műtárgy és aszimmetrikus rétegződés esetén

Ha a műtárgy két oldalán a fedőréteg jellemzői nem azonosak — és ez a gyakoribb eset —, úgy a műtárgytengely nem szimmetriatengely, tehát ott a potenciál nem állandó. Ezért (26—29) alapképleteink sem felelnek meg az áramkép meghatározására, de (20) alatti alapképletünk változatlanul érvényben van, hiszen annak $x = 0$ helyen vett és (22) alatt felírt speciális alakja nem csupán a (22) jobb oldalán levő $-k_0 \Delta h$ állandó potenciáeloszlás leírására, hanem bármilyen tetszőleges potenciáeloszlás jellemzésére alkalmas. Megfelelő A_n együtthatók felvételével tehát a (20) képlet meghatározza a féltartomány bármely pontjában a potenciál értékét, s ezáltal az áramlás összes jellemzőit, a nehézség csupán ott van, hogy a megfelelő A_n együtthatókat nem ismerjük és közvetlen sorbafejtéssel sem tudjuk meghatározni a (22) egyenlethez hasonló módon, mert a potenciál eloszlását sem ismerjük az $x = 0$ koordinátával jellemzett tengelyvonalon.

A megfelelő A_n együtthatók megkeresésének módja alapelvben a következő:

Ha a műtárgy tengelyvonalában tetszés szerinti potenciáeloszlást veszünk fel, úgy annak sorbafejtett alakja megadja az A_n értékeket. Kapunk

tehát egy áramképet az egyik, például a jobboldali féltartományra, a jobb oldali fedőrétegnek megfelelően. Ha ugyanezt az áramképet meghatározzuk a baloldali (felvízoldali) féltartományra vonatkozólag, de a baloldali fedőréteg jellemzőivel és a felvízi vízszintre mint alapsíkra, úgy a meghatározott két áramkép a közös határán (a műtárgy tengelyében) általában még nem illik össze. A potenciál ugyan azonos, hiszen ebből indultunk ki, a vízhozamok azonban nem egyenlőek, tehát az áramvonalak nem illeszkednek. Nyilvánvaló, hogy csak egy olyan kiinduló potenciáeloszlás létezik, melynél az áramvonalak is egyeznek, s éppen ez a keresett függvény, az ennek sorbafejtésével nyerhető A_n együtthatók alkalmasak a teljes áramkép meghatározására. (A két féltartományra külön-külön!)

Az elmondottak alapján az áramkép két, egymástól független tartományban külön-külön határozandó meg, szükséges tehát a jelölések kibővítése.

A két tartományban az azonos fogalmakat a és f indexszel különböztetjük meg egymástól. Így a különböző fedőrétegek alapján a (19) képlettel meghatározott a tényezőket a felvízi oldalon α_f , az alvízi oldalon α_a jelöli. A Φ potenciál alapsíkja a felvízi oldalon a felvízszint magassága (Φ_f), az alvízi oldalon az alvízszint magassága (Φ_a), helyesebben e magasságoknak megfelelő potenciál. A karakterisztikus egyenletek gyökrendszerét az indexhalmozás elkerülésére külön betűvel jelöljük, éspedig az alvízi oldalon φ -vel, mint eddig, a felvízi oldalon ϑ -val. A karakterisztikus egyenletek tehát:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n &= \alpha_a \\ \vartheta_n \operatorname{tg} \vartheta_n &= \alpha_f \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Hasonlóan külön betűvel jelöljük a potenciálfüggvények konstans együtthatóit, az alvízi oldalon, mint eddig A_n , a felvízi oldalon pedig F_n betűkkel.

A két tartomány koordináta-rendszere is különböző. Az y tengely azonos, az x tengelyek egybeesnek, de értelmük ellenkező, mindkettő a műtárgytengelytől távolodóan pozitív. A jelölések további egyszerűsítésére egyébként az x és y koordináták helyett most is a (61) alatt bevezetett ξ és η relatív koordinátákat használjuk.

Fenti jelölésekkel a két tartomány potenciálfüggvényei:

$$\Phi = \Phi_a + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\varphi_n \xi} \cos \varphi_n \eta \quad (72)$$

$$\Phi = \Phi_f + \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{-\vartheta_n \xi} \cos \vartheta_n \eta \quad (73)$$

az áramfüggvények pedig a (7) alatti relációk alapján:

$$\Psi = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\varphi_n \xi} \sin \varphi_n \eta \quad (74)$$

$$\Psi = - \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{-\vartheta_n \xi} \sin \vartheta_n \eta \quad (75)$$

rendszer jobb oldalán álló oszlopot írjuk. Mivel ez az első tag kivételével zérus, a D_{F_n} determináns értékét úgy határozhatjuk meg, hogy a (81) alatti determináns első sorát és F_n -hez tartozó oszlopát töröljük és a kapott aldeteminánst $k_0 H$ értékkel, valamint $(-1)^n$ helyértékkel szorozzuk. Tehát

$$D_{F_n} = (-1)^n k_0 H D'_{F_n} \tag{84}$$

ahol D'_{F_n} a szóban levő aldetemináns:

$$D'_{F_n} = \begin{vmatrix} \vartheta_0 & \dots & \vartheta_{n-1} & \vartheta_{n+1} & \dots & \vartheta_k & \lambda_0 & \dots & \lambda_k \\ \vartheta_0^2 & \dots & \vartheta_{n-1}^2 & \vartheta_{n+1}^2 & \dots & \vartheta_k^2 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vartheta_0^{2k+1} & \dots & \vartheta_{n-1}^{2k+1} & \vartheta_{n+1}^{2k+1} & \dots & \vartheta_k^{2k+1} & \lambda_0^{2k+1} & \dots & \lambda_k^{2k+1} \end{vmatrix} \tag{85}$$

Mivel a determináns egy oszlopának ugyanazzal a számmal való osztása egyenértékű a determinánsnak ugyanazzal a számmal való osztásával, ezért az első oszlopból ϑ_0 , a másodikból ϑ_1 stb. kiemelhető, s így

$$D'_{F_n} = \vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_{n-1} \vartheta_{n+1} \dots \vartheta_k \lambda_0 \dots \lambda_k D''_{F_n} \tag{86}$$

ahol

$$D''_{F_n} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vartheta_0 & \dots & \vartheta_{n-1} & \vartheta_{n+1} & \dots & \vartheta_k & \lambda_0 & \dots & \lambda_k \\ \vartheta_0^2 & \dots & \vartheta_{n-1}^2 & \vartheta_{n+1}^2 & \dots & \vartheta_k^2 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vartheta_0^{2k} & \dots & \vartheta_{n-1}^{2k} & \vartheta_{n+1}^{2k} & \dots & \vartheta_k^{2k} & \lambda_0^{2k} & \dots & \lambda_k^{2k} \end{vmatrix} \tag{87}$$

ismét hatványdetermináns, melynek kifejtett alakja ugyanaz, mint a (82) alatti szorzat, azzal az eltéréssel, hogy a ϑ_n elemet tartalmazó különbségek hiányoznak. E determinánsnak és a D_0 determinánsnak a hányadosa tehát éppen csak ezeket az elemeket tartalmazza:

$$\frac{D''_{F_n}}{D_0} = \tag{88}$$

$$= \frac{1}{(\vartheta_n - \vartheta_0)(\vartheta_n - \vartheta_1) \dots (\vartheta_n - \vartheta_{n-1})(\vartheta_{n+1} - \vartheta_n) \dots (\vartheta_k - \vartheta_n)(\lambda_0 - \vartheta_n) \dots (\lambda_k - \vartheta_n)}$$

A (83), (84), (86) és (88) összefüggések alapján felírható az F_n tényező képlete:

$$F_n = (-1)^n k_0 H \frac{1}{\frac{\vartheta_n}{\vartheta_0} - 1} \cdot \frac{1}{\frac{\vartheta_n}{\vartheta_1} - 1} \dots \frac{1}{\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n-1}} - 1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n+1}}} \dots \frac{1}{1 - \frac{\vartheta_n}{\vartheta_k}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\vartheta_n}{\lambda_0}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\vartheta_n}{\lambda_1}} \dots \frac{1}{1 - \frac{\vartheta_n}{\lambda_k}} \tag{89}$$

A kapott képletet $n = 0, 1, 2, \dots, k$ értékekre felírva meghatározható a teljes F értékrendszer. Hasonló elven írható fel a P értékrendszer általános P_n tagjának képlete:

$$P_n = (-1)^{n+k+1} k_0 H \frac{1}{\lambda_n - 1} \cdot \frac{1}{\lambda_n - 1} \cdots \frac{1}{\lambda_n - 1} \cdot \frac{1}{\lambda_n - 1} \cdots$$

$$\frac{1}{\lambda_n - 1} \cdot \frac{1}{\lambda_n - 1} \cdots \frac{1}{\lambda_n - 1} \cdot \frac{1}{\lambda_n - 1} \cdots$$

$$\frac{1}{\lambda_{n-1}} \cdot \frac{1}{\lambda_{n+1}} \cdots \frac{1}{\lambda_k} \quad (90)$$

A (89) és (90) képletekbe a (79) összefüggésekkel λ_n helyébe φ_n és P_n helyébe A_n értékeket bevezetve és kisebb átcsoportosítást végrehajtva:

$$F_n = (-1)^n k_0 H \frac{1}{\left(\frac{\partial_n}{\partial_0} - 1\right) \left(\frac{\partial_n}{\varphi_0} + 1\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial_n}{\partial_1} - 1\right) \left(\frac{\partial_n}{\varphi_1} + 1\right)} \cdots \frac{1}{\left(\frac{\partial_n}{\partial_{n-1}} - 1\right) \left(\frac{\partial_n}{\varphi_{n-1}} + 1\right)}$$

$$\cdot \frac{1}{\frac{\partial_n}{\varphi_n} + 1} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial_n}{\varphi_{n+1}}\right) \left(1 + \frac{\partial_n}{\varphi_{n+1}}\right)} \cdots \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial_n}{\varphi_k}\right) \left(1 + \frac{\partial_n}{\varphi_k}\right)} \quad (91)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} k_0 H \frac{1}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_0} - 1\right) \left(\frac{\varphi_n}{\partial_0} + 1\right)} \cdots \frac{1}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} - 1\right) \left(\frac{\varphi_n}{\partial_{n-1}} + 1\right)}$$

$$\cdot \frac{1}{\frac{\varphi_n}{\partial_n} + 1} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}\right) \left(1 + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}\right)} \cdots \frac{1}{\left(1 - \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\right) \left(1 + \frac{\varphi_n}{\varphi_k}\right)} \quad (92)$$

A kapott képletekből az F és A értékrendszer egyértelműen kiszámítható. Nincs akadálya a $k \rightarrow \infty$ határátmenet képzésének sem, mert a szorzatban egymásután következő tényezők értéke növekvő k esetén az egységhez tart és a konvergencia további feltételei is teljesülnek. Numerikus számításra azonban a kapott képletek alig felelnek meg, mert kellő pontosság eléréséhez igen sok tényező kiszámítása és összeszorozása szükséges. A képletek konvergenciáját az alábbi módon lényegesen meg tudjuk javítani.

Emlékezzünk arra, hogy elegendő nagy i esetén

$$\varphi_i \approx \partial_i \approx i\pi \quad (93)$$

az $(i + 1)$ -ik szorzótényező tehát például a (91) képletben, ha azt $k \rightarrow \infty$ határátmenettel végtelen szorzattá alakítottuk át:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\partial_n}{\partial_i}\right) \left(1 + \frac{\partial_n}{\varphi_i}\right)} \approx \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial_n}{i\pi}\right) \left(1 + \frac{\partial_n}{i\pi}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\partial_n^2}{i^2 \pi^2}} \quad (94)$$

Ismeretes azonban a $\sin \vartheta_n$ függvénynek az alábbi végtelen szorzattal megadott alakja:

$$\sin \vartheta_n = \vartheta_n \left(1 - \frac{\vartheta_n^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\vartheta_n^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\vartheta_n^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\vartheta_n^2}{16\pi^2}\right) \dots \quad (95)$$

melynek $(i + 1)$ -ik szorzótényezője láthatóan reciprokértéke a (94) alattinak. Nyilvánvaló tehát, hogy elegendő nagy i -től kezdve a (91) alatti végtelen szorzat tagjai helyettesíthetők a (95) alatti szorzat megfelelő tagjainak reciprokával. Ha még ezenkívül a (71) alatti karakterisztikus egyenlet alapján felírható

$$\sin \vartheta_n = \frac{a_f \cos \vartheta_n}{\vartheta_n} \quad (96)$$

összefüggést is figyelembe vesszük, úgy F_n végleges képlete:

$$F_n = \frac{k_0 H}{a_f} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta_n} \cdot \frac{\vartheta_n^2}{\left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_0} - 1\right) \left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_0} + 1\right)} \cdot \frac{\frac{\vartheta_n^2}{\pi^2} - 1}{\left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_1} - 1\right) \left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_1} + 1\right)} \dots$$

$$\dots \frac{\frac{\vartheta_n^2}{(n-1)^2 \pi^2} - 1}{\left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n-1}} - 1\right) \left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n-1}} + 1\right)} \cdot \frac{\frac{\vartheta_n^2}{n^2 \pi^2} - 1}{\vartheta_n + 1} \cdot \frac{\frac{\vartheta_n^2}{(n+1)^2 \pi^2} - 1}{\left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n+1}} - 1\right) \left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n+1}} + 1\right)} \dots \quad (97)$$

Hasonlóan vezethető le a (92) egyenletből A_n képlete:

$$A_n = - \frac{k_0 H}{a_a} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_n} \cdot \frac{\varphi_n^2}{\left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_0} - 1\right) \left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_0} + 1\right)} \cdot \frac{\frac{\varphi_n^2}{\pi^2} - 1}{\left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_1} - 1\right) \left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_1} + 1\right)} \dots$$

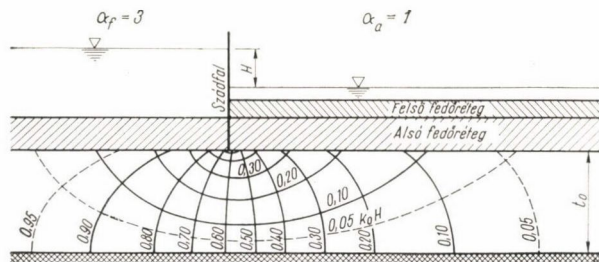
$$\dots \frac{\frac{\varphi_n^2}{(n-1)^2 \pi^2} - 1}{\left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_{n-1}} - 1\right) \left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_{n-1}} + 1\right)} \cdot \frac{\frac{\varphi_n^2}{n^2 \pi^2} - 1}{\left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_n} + 1\right)} \cdot \frac{\frac{\varphi_n^2}{(n+1)^2 \pi^2} - 1}{\left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_{n+1}} - 1\right) \left(\frac{\varphi_n}{\vartheta_{n+1}} + 1\right)} \dots \quad (98)$$

A (97–98) képletek már numerikus számításra is alkalmasak, mert gyorsan konvergálnak. A képletek szerkezete és a ki nem írt szorzótényezők képzési módja nem kíván magyarázatot, csupán F_0 és A_0 képletéhez fűzünk megjegyzést. Mivel F_n , ill. A_n képletében mindig az n indexű tényező nevezőjében marad el a különbség, $n = 0$ esetére az előírás nem evidens. A levezetésünk alapján azonban megállapíthatjuk, hogy ebben az esetben is a képletek harmadik tagjául

$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_0 + 1}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\varphi_0^2}{\vartheta_0 + 1}$$

írandó, tehát a nevezőben szereplő különbség elhagyandó. A további tényezők $n = 0$ helyettesítéssel képezhetők.

Levezetett számítási eljárásunk alkalmazását egy számpéldán mutatjuk be. A szivárgási tartományt és az általános elrendezést a 6. ábrán láthatjuk. A vízvezető réteg és a fedőréteg állandóiból számított karakterisztikus tényezők az alvízi oldalon $\alpha_a = 1$ és a felvízi oldalon $\alpha_f = 3$. Meghatározandó az áramkép.



6. ábra. Aszimmetrikus szivárgási tartomány áramképe keskeny műtárgy esetén

Először a φ és ϑ értékeket számítjuk a (71) karakterisztikus egyenletekből. A számításhoz felhasználjuk az (5) alatti számítási segédleteket. Az eredmények a következők:

$\varphi_0 =$	$= 0,860;$	$\vartheta_0 =$	$= 1,193;$
$\varphi_1 =$	$\pi + 0,284 = 3,426;$	$\vartheta_1 =$	$\pi + 0,667 = 3,809;$
$\varphi_2 =$	$2\pi + 0,154 = 6,437;$	$\vartheta_2 =$	$2\pi + 0,421 = 6,704;$
$\varphi_3 =$	$3\pi + 0,104 = 9,529;$	$\vartheta_3 =$	$3\pi + 0,299 = 9,724;$
$\varphi_4 =$	$4\pi + 0,079 = 12,645;$	$\vartheta_4 =$	$4\pi + 0,231 = 12,797;$
$\varphi_5 =$	$5\pi + 0,064 = 15,772;$	$\vartheta_5 =$	$5\pi + 0,187 = 15,895;$
$\varphi_6 =$	$6\pi + 0,053 = 18,903;$	$\vartheta_6 =$	$6\pi + 0,156 = 19,006;$
$\varphi_7 =$	$7\pi + 0,045 = 22,036;$	$\vartheta_7 =$	$7\pi + 0,134 = 22,126;$
$\varphi_8 =$	$8\pi + 0,040 = 25,173;$	$\vartheta_8 =$	$8\pi + 0,118 = 25,251;$
$\varphi_9 =$	$9\pi + 0,035 = 28,309;$	$\vartheta_9 =$	$9\pi + 0,105 = 28,379;$
$\varphi_{10} =$	$10\pi + 0,032 = 31,448;$	$\vartheta_{10} =$	$10\pi + 0,095 = 31,511.$

Következik az F , A értékrendszernek számítása. A számítást táblázatban végezzük. Az egyes szorzótényezőket addig kell figyelembe venni, amíg kellően meg nem közelítik az egységet. Megfigyelhető a számítás során, hogy a nagyobb n indexű F és A értékek számításánál a konvergencia rosszabb. A részletes számítás mellőzésével csak az eredményeket közöljük:

$F_0 =$	$0,489 k_0 H$	$A_0 =$	$-0,669 k_0 H$
$F_1 =$	$-0,103 k_0 H$	$A_1 =$	$0,100 k_0 H$
$F_2 =$	$0,039 k_0 H$	$A_2 =$	$-0,034 k_0 H$
$F_3 =$	$-0,020 k_0 H$	$A_3 =$	$0,016 k_0 H$
$F_4 =$	$0,011 k_0 H$	$A_4 =$	$-0,009 k_0 H$
.....		

Fenti értékeket a (78) alatti első egyenletbe, valamint a (77) alatti egyenletbe $\eta = 1$ helyen behelyettesítve nem kapunk tökéletes egyezést az elhanyagolt tagok miatt. Ezért célszerű az F_4 , A_4 értékeket úgy módosítani, hogy ezek az egyenletek, azaz a potenciál és vízhozam feltételi egyenletei kielégüljenek. A módosított értékek lesznek:

$$F'_4 = 0,004 k_0 H \quad A'_4 = -0,004 k_0 H$$

Az F és A értékrendszer ismeretében a (72–75) képletekkel számítjuk a potenciál és áramfüggvény értékeit a két tartomány egyes pontjaiban, s ezek alapján megszerkesztjük az áramképet. Az eredményt a 6. ábrán láthatjuk. Megállapítható az ábra alapján, hogy a műtárgy (szádfal) tengelyében a potenciál értéke ebben az esetben is közel állandó. A teljes átszivárgó vízhozam

$$Q = 0,542 k_0 H \quad (99)$$

a számítás eredménye szerint.

Közelítő megoldás lehetősége

Az ismertett számítási eljárás segítségével aszimmetrikus fedőrétegek esetén is pontosan meghatározhattuk az áramképet, de meglehetősen sok számítási munkával. Kívánatos volna ezért itt is egyszerűbb képletek felállítása, melyekkel közelítő eredményt nyerhetünk.

Közelítő megoldás akkor állítható fel, ha valamelyik tartomány α tényezője kicsi. Legyen például az alvízi oldalon a fedőrétegek fojtása olyan nagy, hogy $\alpha_a < 1$. Vizsgáljuk meg a (98) alatti képlettel megadott A tényezőök értékét. A φ tényezőök értékére feltesszük, hogy közelítőleg:

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{3\alpha_a}{3 + \alpha_a}} \quad \text{és} \quad \varphi_n = n\pi. \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

E közelítő feltevés folytán a (98) képletben az n indexű szorzótényező zérus értékű, tehát az összes A_n zérus az A_0 kivételével. Az A_0 értékét közelítőleg egyenlőnek vesszük a (98) alatti első három tényező szorzatával, tehát az 1, 2, 3... indexű, közel egységnyi értékű tényezőket nem vesszük figyelembe. Így

$$A_0 = -\frac{k_0 H}{\alpha_a} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0} \cdot \frac{\varphi_0^2}{\frac{\varphi_0}{\vartheta_0} + 1}$$

amit a φ -re vonatkozó (96)-hoz hasonló összefüggés alapján így is írhatunk:

$$A_0 = -\frac{k_0 H}{\sin \varphi_0} \cdot \frac{\varphi_0 \vartheta_0}{\varphi_0 + \vartheta_0}. \quad (100)$$

Az alsó tartomány potenciálfüggvénye és áramfüggvénye tehát a (72) és (74) képletekkel:

$$\Phi = \Phi_a - \frac{k_0 H}{\sin \varphi_0} \cdot \frac{\varphi_0 \vartheta_0}{\varphi_0 + \vartheta_0} e^{-\varphi_0 \xi} \cos \varphi_0 \eta \quad (101)$$

$$\Psi = \frac{k_0 H}{\sin \varphi_0} \cdot \frac{\varphi_0 \vartheta_0}{\varphi_0 + \vartheta_0} e^{-\varphi_0 \xi} \sin \varphi_0 \eta. \quad (102)$$

Vizsgáljuk meg a potenciál értékét a két tartomány határvonalán ($\xi = 0$). Egyszerűbb szemlélet érdekében a H_a alvízszinthez képest mutatkozó ΔH nyomásértékre áttérve:

$$\Delta H = \frac{H}{\sin \varphi_0} \cdot \frac{\vartheta_0 \varphi_0}{\varphi_0 + \vartheta_0} \cos \varphi_0 \eta.$$

Határozzuk meg ΔH értékét a határvonal alsó ($\eta = 0$) és felső ($\eta = 1$) végpontján:

$$\Delta H_0 = H \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0} \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0 + \vartheta_0} \quad \text{és} \quad \Delta H_1 = H \frac{\varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0 + \vartheta_0}.$$

Mivel kisértékű α_a mellett $\sin \varphi_0 \sim \varphi_0 \sim \operatorname{tg} \varphi_0$, ezért a potenciál a határvonalon állandónak tekinthető, s a nyomás értéke:

$$\Delta H = H \frac{\vartheta_0}{\varphi_0 + \vartheta_0} \quad (103)$$

Feladatunkat így visszavezettük a 2–4. fejezetekben tárgyalt alapesetre, mert a határvonalon a (103) képlettel számítható állandó értékű potenciál ismert, az áramkép az alsó és felső tartományban külön-külön meghatározható. Ismételjük, hogy fenti egyszerűbb képlet alkalmazásának elegendő feltétele az egyik tartomány α tényezőjének kicsiny volta, a másik tetszés szerinti lehet. Lehet például a felvízi oldalon $\alpha_f = \infty$, azaz a fedőréteg hiányzik. Ez esetben $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ és a felső tartomány áramképe az 51. pont képletei, illetve a 3. ábra szerint határozható meg.

Az átszivárgó teljes vízhozam képletét (102) alapján írhatjuk fel $\xi = 0$ és $\eta = 1$ helyettesítéssel:

$$Q = k_0 H \frac{\varphi_0 \vartheta_0}{\varphi_0 + \vartheta_0}. \quad (104)$$

Befejezésül számítsuk ki a nyomás értékét a határvonalon és az átszivárgó teljes vízmennyiséget a (103–104) képletekkel a részletesen kidolgozott számpélda adataival. Mivel $\varphi_0 = 0,860$; $\vartheta_0 = 1,193$, $\Delta H = 0,58 H$ és $Q = 0,50 k_0 H$, elég jó egyezésben a 6. ábrával, illetve a (99) képlet szerinti vízhozammal. Ha az α tényezők valamelyike a számpéldában kisebb lett volna, úgy az egyezés is jobb lenne.

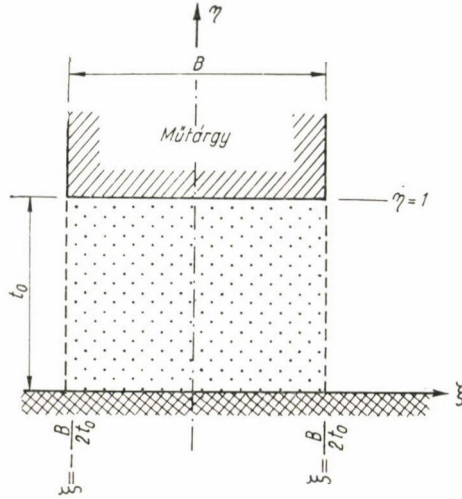
64. Széles műtárgy alatti szivárgás

Ha a műtárgy B szélessége a vízvezető réteg t_0 mélységéhez képest nem elhanyagolhatóan kicsi, úgy az alvízi és felvízi tartományok mellett a műtárgy alatti rész külön — harmadik — tartományként veendő figyelembe. E tartomány felső határvonalán ($\eta = 1$) vízelvezetés nincs, tehát $\alpha_B = 0$. A vonatkozó karakterisztikus egyenlet gyökrendszere tehát: $0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$, így az általános trigonometrikus függvényt a Fourier-sorba megy át. A tartomány

további két határvonala, melyek a 7. ábra szerint egyúttal az alvízi és felvízi tartományokkal közös határvonalak, a

$$\frac{B}{2t_0} = \beta \quad (105)$$

viszonyszám bevezetésével a $\xi = \beta$, ill. $\xi = -\beta$ egyenesek.



7. ábra. Széles műtárgy alatti szivárgási tartomány és koordinátarendszere

Ha a tartomány potenciálfüggvényét

$$\Phi = C_0 + D_0 \xi + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{ch} n \pi \xi + D_n \operatorname{sh} n \pi \xi) \cos n \pi \eta \quad (106)$$

alakban írjuk fel, úgy a $\xi = \beta$ és $\xi = -\beta$ határokon tetszés szerinti potenciáloszlás előírható kerületi feltételként. Ha ugyanis a határokon fellépő előírt potenciálfüggvényeket Fourier-sorba fejtjük, úgy ezek tiszta tagjaihoz igazodhatunk a C_0 és D_0 értékekkel, míg a szummáció n -ik tagjának egyenlővé tételéhez is két állandó, C_n és D_n áll rendelkezésünkre. Az állandók megfelelő választásával tehát a (106) képlet szerinti potenciálfüggvény jellemzi a műtárgy alatti tartományban előálló szivárgást, bármilyen tartományok csatlakozzanak az alvízi és felvízi oldalon.

A (106) képlet kiegészítésére írjuk fel a tartományra vonatkozó áramfüggvény képletét is:

$$\Psi = D_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} n \pi \xi + D_n \operatorname{ch} n \pi \xi) \sin n \pi \eta. \quad (107)$$

65. Az áramkép meghatározása széles műtárgy és szimmetrikus rétegződés esetén

A szimmetria folytán a műtárgy tengelyében a potenciál állandó, ezért a (106) képletben levő összes $C_n = 0$. Mivel az áramkép szimmetrikus, elegendő egy határvonalon — például a műtárgy alatti és az alvízi tartományok határ-

vonalán — a határfeltételeket kielégíteni. Ennek alapelve hasonló a 63. pontban tárgyalt esetéhez.

A két tartomány koordinátatengelyeit alábbiak szerint vesszük fel. A ξ tengely közös, értelme is egyező, kezdőpontja a műtárgy alatti tartományra a műtárgy középvonalában, az alvízi tartományra a két tartomány határvonalán van. A η tengelyek iránya és értelme egyező, kezdőpontjuk is azonos magasságban van, a vízzáró réteg szintjén.

A potenciál értéke a műtárgy tengelyében a szimmetria folytán ismert, mert az alvízi és felvízi értékek közepe:

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_a + \Phi_f}{2} = \Phi_a + \frac{\Phi_f - \Phi_a}{2} = \Phi_a - \frac{H_f - H_a}{2} k_0 = \Phi_a - k_0 \frac{H}{2}. \quad (108)$$

A (106) képletből $\xi = 0$ helyettesítéssel és $C_n = 0$ figyelembevételével $\Phi_0 = C_0$, s így

$$C_0 = \Phi_a - k_0 \frac{H}{2}. \quad (109)$$

A műtárgy alatti tartomány potenciálfüggvénye tehát az alvízi tartomány határvonalán a (106) képletből $\xi = \beta$ helyettesítéssel:

$$\Phi = \Phi_a - k_0 \frac{H}{2} + D_0 \beta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sh} n \pi \beta \cos n \pi \eta \quad (110)$$

és az alvízi tartomány potenciálfüggvénye ugyanitt a (72) képletből $\xi = 0$ helyettesítéssel:

$$\Phi = \Phi_a + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \varphi_n \eta. \quad (111)$$

Az A , D állandók meghatározására szolgáló egyik feltételi egyenlet tehát a (110) és (111) alatti potenciálok egyenlősége:

$$D_0 \beta - A_0 \cos \varphi_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \operatorname{sh} n \pi \beta \cos n \pi \eta - A_n \cos \varphi_n \eta) = k_0 \frac{H}{2}. \quad (112)$$

A második feltételi egyenletet kapjuk, ha a vízhozamok különbségét a határvonalon zérussal tesszük egyenlővé, tehát a (107) alatt $C_n = 0$ és $\xi = \beta$ helyettesítést, a (74) alatt $\xi = 0$ helyettesítést végzünk és a két egyenletet egymásból kivonjuk:

$$D_0 \eta + A_0 \sin \varphi_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \operatorname{ch} n \pi \beta \sin n \pi \eta + A_n \sin \varphi_n \eta) = 0. \quad (113)$$

A (112–113) feltételi egyenletek $\eta = 0$ és $\eta = 1$ határok között minden η -ra kielégítendőek. Meghatározandó az A , D értékrendszer.

Az A , D állandók kiszámításához — sajnos — nem tudunk zárt képletet felállítani, de egy viszonylag jól használható eljárást vezetünk le az alábbiakban.

Ha a (112) egyenletet $\eta = 0$ és $\eta = 1$ határok között integráljuk, úgy a Σ alatt levő D_n tagok eltűnnek. A kapott egyenletből D_0 kifejezhető:

$$D_0 = \frac{k_0 H}{2 \beta} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\sin \varphi_n}{\varphi_n}. \quad (114)$$

A (113) egyenletben viszont $\eta = 1$ értéket helyettesítve és D_0 kifejezve:

$$D_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \varphi_n. \quad (115)$$

A (114) és (115) egyenletet összevetve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \varphi_n \frac{\beta \varphi_n + 1}{\varphi_n} = - \frac{1}{2} k_0 H, \quad (116)$$

mely egyenletben csak az ismeretlen A értékek fordulnak elő, a D értékeket elimináltuk. További hasonló egyenletek nyerése céljából szorozzuk végig a (112) egyenletet $\cos k \pi \eta$ -val, ahol $k = 1, 2, 3, \dots$ egész számok bármelyike, s integráljunk ismét a fenti határok között. A $\cos n \pi \eta$ és $\cos k \pi \eta$ függvények ortogonalitása folytán a D_n értékek közül csak a k indexű marad az egyenletben, a többi eltűnik, D_0 -t is beleértve. A kapott egyenlet felírása előtt a fellépő határozott integrálokat oldjuk meg:

$$\int_0^1 \cos^2 k \pi \eta d \eta = \frac{1}{2} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos \varphi_n \eta \cos k \pi \eta d \eta &= \frac{\varphi_n \sin \varphi_n \cos k \pi - k \pi \cos \varphi_n \sin k \pi}{(\varphi_n - k \pi)(\varphi_n + k \pi)} = \\ &= (-1)^k \frac{\varphi_n \sin \varphi_n}{\varphi_n^2 - (k \pi)^2}. \end{aligned} \quad (118)$$

Ezek figyelembevételével az integrálás után kapott képlet D_k -ra megoldva:

$$D_k = (-1)^k \frac{2}{\operatorname{sh} k \pi \beta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n \sin \varphi_n}{\varphi_n^2 - (k \pi)^2}. \quad (119)$$

A (113) egyenletből teljesen analóg módon kaphatjuk D_k értékét, ha azt $\sin k \pi \eta$ -val szorozzuk és integráljuk. A fellépő határozott integrálok:

$$\int_0^1 \sin^2 k \pi \eta d \eta = \frac{1}{2} \quad (120)$$

és

$$\int_0^1 \sin \varphi_n \eta \sin k \pi \eta d \eta = (-1)^k \frac{k \pi \sin \varphi_n}{\varphi_n^2 - (k \pi)^2} \quad (121)$$

$$\int_0^1 \eta \sin k \pi \eta d \eta = - \frac{(-1)^k}{k \pi}. \quad (122)$$

Mivel a (122) integrál értéke nem zérus, az egyenletben a keresett D_k értéken kívül D_0 értéke is szerepel. Ennek helyébe írhatjuk azonban a (115)

összefüggés jobb oldalát, az egyenletben tehát D_k értékén kívül csak az A értéksorozat fog előfordulni. Az egyenlet összevonásával végeredményben D_k -ra a következő kifejezést kapjuk:

$$D_k = -(-1)^k \frac{2}{\operatorname{ch} k \pi \beta} \frac{1}{k \pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n^2 \sin \varphi_n}{\varphi_n^2 - (k \pi)^2}. \quad (123)$$

A (119) és (123) egyenleteket összevetve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n \sin \varphi_n}{\varphi_n^2 - (k \pi)^2} (\varphi_n \operatorname{th} k \pi \beta + k \pi) = 0. \quad (124)$$

A (124) egyenlet $k = 1, 2, 3, \dots$ felvétellel egy-egy egyenletet ad az A értékrendszer meghatározásához. Az így kapott homogén lineáris egyenletrendszer az első egyenletként hozzáírandó (116) alatti egyenlettel válik határozottá, mert utóbbinak jobb oldala nem zérus. Az egyenletrendszerből az A együtthatók egyértelműen meghatározhatók, s azok ismeretében D_0 és a többi D érték a (114) vagy (115) és (119) vagy (123) képletekkel közvetlenül számítható. Ha a D értékeket a rendelkezésre álló mindkét képletből számítjuk, úgy számításunkra kontrollt is kapunk.

Megjegyezzük, hogy a (124) egyenlet egy-két k érték után már lényegesen egyszerűbben írható fel. A $\operatorname{th} k \pi \beta$ érték ugyanis növekvő k mellett igen gyorsan az egységhez tart, s ekkor a (124) egyenlet helyett a

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n \sin \varphi_n}{\varphi_n - k \pi} = 0 \quad (125)$$

egyenlet alkalmazható. Szélesebb műtárgy esetén, ha B szélesség nagyobb a vízvezető réteg t_0 mélységének másfélszeresénél, úgy a (125) képlet már $k = 1$ esetben is használható, a (124) alkalmazása felesleges.

Az A és D értékek meghatározásához levezetett képleteinken a karakterisztikus alapegyenlet szerinti

$$\varphi_n \sin \varphi_n = \alpha_a \cos \varphi_n \quad (126)$$

összefüggés figyelembevételével még egy — a gyakorlati számítási munka szempontjából jelentős — egyszerűsítést hajthatunk végre. Eszerint az A értékrendszer lineáris egyenletrendszere a következő:

$$(k = 1, 2, \dots) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \varphi_n \frac{\beta \varphi_n + 1}{\varphi_n^2} = -\frac{k_0 H}{2 \alpha_a} \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \varphi_n \frac{\varphi_n \operatorname{th} k \pi \beta + k \pi}{\varphi_n^2 - (k \pi)^2} = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \varphi_n \frac{1}{\varphi_n - k \pi} = 0 \end{array} \right\}, \quad (127)$$

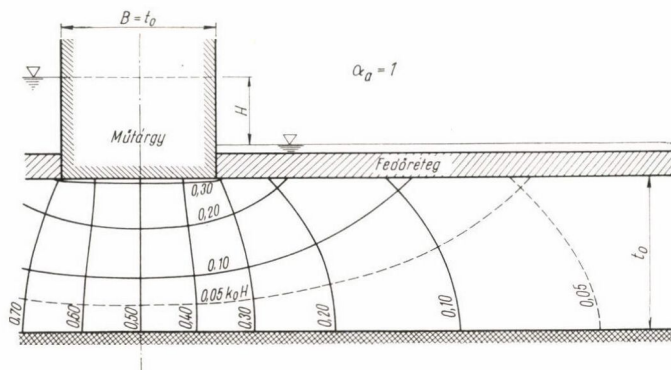
ahol az első egyenlet adja az egyenletrendszer első egyenletét, a második $k = 1, 2, 3, \dots$ helyettesítéssel a további egyenleteket, melyek az egyszerűbb harmadik egyenletből is meghatározhatók, ha már $\operatorname{th} k \pi \beta \sim 1$. A (126) alatti

értékeket a fent felsorolt pontos A értékek mellett zárójelben feltüntettük. Látható, hogy az egyezés $\alpha = 1$ értéknél még kiváló.

Az A értékek alapján a (115) és (119) egyenletekből számított D értékek:

$$\begin{aligned} D_0 &= +0,307 \quad k_0 H \\ D_1 &= -0,0089 \quad k_0 H \\ D_2 &= +0,00054 \quad k_0 H \\ D_3 &= -0,000058 \quad k_0 H \\ D_4 &= +0,000006 \quad k_0 H \end{aligned}$$

Az A és D értékek ismeretében számíthatók az egyes tartományokban a potenciál és áramfüggvény értékek. A műtárgy alatti tartományban a poten-



8. ábra. Szimmetrikus szivárgási tartomány áramképe széles műtárgy esetén

ciál képlete a (106) képlet, melyben C_0 értékét a (109) képlet határozza meg. Az áramfüggvény ugyanitt a (107) képletből számítható. (C_n szimmetria miatt zérus). Az alvízi tartományban a (72) képlet adja a potenciál és a (74) képlet az áramfüggvény értékeit.

A kiszámított potenciál és áramfüggvény értékek alapján megszerkesztett áramképet a 8. ábra szemlélteti. A teljes vízhozam:

$$Q = D_0 = 0,307 k_0 H.$$

Közelítő megoldás lehetősége

Egy egyszerűsítési lehetőségről az A értékek lineáris egyenletrendszerének közelítő megoldásával kapcsolatban már a számpélda alkalmával megemlékeztünk. Ez nagyobb α értékek esetén is alkalmazható nagyobb hiba nélkül. Ha α nem nagy, például $\alpha < 1$, úgy tovább mehetünk és A_0 mellett a többi A értéket elhanyagolhatjuk. A_0 értékét a (116) egyenletből számíthatjuk:

$$A_0 = - \frac{k_0 H}{2} \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\varphi_0}{1 + \beta \varphi_0}. \quad (129)$$

A D_0 érték (115) alapján:

$$D_0 = Q = \frac{k_0 H}{2} \frac{\varphi_0}{1 + \beta \varphi_0}, \quad (130)$$

mely egyúttal a teljes Q vízhozam képlete is, mint az a (107) egyenletből $\eta = 1$ helyettesítéssel adódik.

A 63. pontban foglalt megfontolás szerint a nyomás átlagos értéke a mőtárgy alatti és alvízi tartományok határvonalán, tehát a mőtárgy lábvonala-nak függőlegesen az alvízhez képest:

$$\Delta H = H \frac{1}{1 + \beta \varphi_0}. \quad (131)$$

Szám példánk adataival a (130) és (131) képletek szerinti értékek $Q = 0,301 k_0 H$ és $\Delta H = 0,35 H$, elég jó egyezésben a pontos Q értékkel, illetve a 8. ábrán látható nyomásértékkel.

66. Különleges eset; nincsen fedőréteg

Az előző pont eredményei alapján a fedőréteg nélküli, véges mélységű tartományban előálló szivárgás jellemzőit is meghatározhatjuk. A közelítő módszerek természetesen ez esetben nem érvényesek, hiszen $a \rightarrow \infty$. A vonatkozó képleteket határátmenet képzésével kell előállítanunk.

A φ_n értékek a határátmenet során az (59–60) alattiakba mennek át. Ezekkel a (127) egyenletek használhatatlanok, az eredeti (116) és (124–125) egyenletekben azonban a határátmenet elvégezhető. Eszerint az A értékek számítására szolgáló egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \left[\beta + \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] &= -\frac{1}{2} k_0 H \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \frac{(2n+1)^2 \operatorname{th} k \pi \beta + (2n+1) 2k}{(2n+1)^2 - 4k^2} &= 0, \\ \text{illetve nagyobb } k \text{ esetén:} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \frac{2n+1}{2n-2k+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Továbbiakban feltételezzük, hogy a mőtárgy B szélessége nagyobb a vízvezetőréteg t_0 mélységének másfélszeresénél. Ekkor ugyanis $\operatorname{th} \pi \beta = 0,98$, a (132) alatti második egyenlet helyett tehát már $k = 1$ esetben is használható az egyszerűbb harmadik, mely $k = 1, 2, 3, \dots$ helyettesítéssel adja az egyenletrendszer második, harmadik stb. egyenletét.

A (132) alatti egyenletek között csak az első függvénye tehát a mőtárgy B szélességének, a többiben β nem szerepel, az egyenletrendszer további része tehát egyszer s mindenkorra megoldható úgy, hogy az A_1, A_2, \dots tényezőknél és A_0 értéknek a viszonyát határozzuk meg. A_0 értéke ezután az első egyenletből adódik, mellyel az összes A érték ismert.

A szóban levő egyenletrendszer egyszerűsítése érdekében bevezetjük az

$$a_n = (-1)^n (2n+1) \frac{A_n}{A_0} \quad (133)$$

jelölést, s így a (132) alatti harmadik egyenlet $k = 1, 2, 3, \dots$ helyettesítéssel az alábbi egyenletrendszert adja:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \frac{a_4}{7} + \frac{a_5}{9} + \dots &= 1 \\
 \frac{a_1}{-1} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_5}{7} + \dots &= \frac{1}{3} \\
 \frac{a_1}{-3} + \frac{a_2}{-1} + \frac{a_3}{1} + \frac{a_4}{3} + \frac{a_5}{5} + \dots &= \frac{1}{5} \\
 \frac{a_1}{-5} + \frac{a_2}{-3} + \frac{a_3}{-1} + \frac{a_4}{1} + \frac{a_5}{3} + \dots &= \frac{1}{7} \\
 \dots & \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Az egyenletrendszer megoldása meglehetősen körülményes, ezért csak a megoldás lényegére utalunk és a végeredményt írjuk fel. A megoldás az egyenletrendszer determinánsának kifejtésén alapszik, amint azt például az alábbi harmadrendű determinánsan bemutatjuk:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r-1 & r+1 & r+3 \\ q-1 & q+1 & q+3 \\ p-1 & p+1 & p+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ r-1 & (r-1)(r+1) & (r-1)(r+3) \\ q-1 & (q-1)(q+1) & (q-1)(q+3) \\ p-1 & (p-1)(p+1) & (p-1)(p+3) \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{2 \cdot 4}{(r-1)(q-1)(p-1)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r+1} & \frac{1}{r+3} \\ 1 & \frac{1}{q+1} & \frac{1}{q+3} \\ 1 & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+3} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{2 \cdot 4}{(r-1)(q-1)(p-1)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r+1} & \frac{1}{r+3} \\ 0 & \frac{r-q}{(r+1)(q+1)} & \frac{r-q}{(r+3)(p+3)} \\ 0 & \frac{r-p}{(r+1)(p+1)} & \frac{r-p}{(r+3)(q+3)} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{2 \cdot 4 (r-q)(r-p)}{(r-1)(q-1)(p-1)(r+1)(r+3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q+1 & q+3 \\ p+1 & p+3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

A felvett determináns, melynek p, q, r értékei tetszőlegesen választott páros, egész számok, a kifejtés során az alábbi műveleteket végeztük. Előbb az első oszlopot kivontuk a második és harmadik oszlopból, majd a kapott determináns oszlopaiban levő -2 és -4 közös tényezőket, valamint a sorokban levő $(r-1), (q-1)$ és $(p-1)$ közös tényezőket kiemeltük. A kapott determináns első sorát a második és harmadik sorból kivonva olyan determinánst nyertünk, melynek első oszlopa az első elem kivételével zérus, tehát értéke másodrendű determinánssal közvetlenül felírható. Ez utóbbiból egyúttal kiemeltük az oszlopokban levő $(r+1), (r+3)$ és a sorokban levő $(r-q), (r-p)$ közös tényezőket. A megmaradt másodrendű determináns az eredeti harmadrendű determináns első eleméhez tartozó al-determináns, mellyel az eljárás hasonlóan folytatható. Végül a determináns értéke egy tört, melynek nevezőjében a determináns összes elemének nevezői, számlálójában a p, q, r értékekből alkotható különbségek szorzandók $2^2 \cdot 4 = 16$ pusztaszámmal.

A bemutatott kifejtési eljárás tetszőleges k -adrendű determináns esetén alkalmazható, s a végeredmény ismét egy tört, nevezőjében a determináns összes elemének nevezőivel, számlálójában az összes p, q, r, \dots értékekből alkotható különbségekkel és $2^{k-1} \cdot 4^{k-2} \cdot 6^{k-3} \dots (2k-4)^2 (2k-2)$ szorzóval. A (134) alatti egyenletrendszerben a p, q, r, \dots értékek egymásutáni páros számok, tehát az egyenletrendszer első k egyenletének megfelelő k -adrendű determináns kifejtett törtjének számlálójában levő különbségek között $(k-1)$ -szer fordul elő a 2, $(k-2)$ -szer a 4, stb., a különbségek szorzata tehát egyenlő a pusztaszámmal. A determináns számlálója tehát $2^{2k-2} \cdot 4^{2k-4} \cdot 6^{2k-6} \dots (2k-4)^4 (2k-2)^2$, s nevezője a szövegben levő k -adrendű determináns összes elemének nevezőiből alkotott szorzat.

Az a_i ismeretlen meghatározásához szükségünk van még egy determináns értékére, melyet úgy nyerünk, ha az előbbi determináns i -ik oszlopának helyébe a (134) alatti egyenletrendszer jobb oldalát írjuk. Ezt az i -ik oszlopot a kapott determinánsban felcseréljük az előtte levővel, majd ismét az előtte levővel, míg végül is ez lesz az első oszlop, s minden csere alkalmával az előjelet váltjuk. Ha ezután újabb előjelváltással a kapott első oszlopot végigszorozzuk (-1) -gyel, úgy ez az oszlop beleillik a determináns ciklikus rendszerébe, s a determináns csak annyiban tér el az egyenletrendszer már tárgyalt fődeterminánstól, hogy az i -ik oszlop után ugrás van — egy oszlop hiányzik. A kifejtés ugyanúgy végrehajtható, s az eredmény ismét egy tört, nevezőjében az új determináns összes elemének nevezőiből alkotott szorzat, számlálójában az összes p, q, r, \dots értékekből alkotott különbségek szorzata (mely azonos a fődeterminánséval) és egy pusztaszám: $2^{k-1} \cdot 4^{k-2} \cdot 6^{k-3} \dots (2k-4)^2 (2k-2) \cdot \frac{2k}{2i} \cdot \frac{2k-2}{2i-2} \dots \frac{2k-2i+2}{2}$.

A két determináns hányadosa adja az a_i ismeretlen értékét. A hányados képzésénél figyelembe vesszük, hogy a fődetermináns nevezőjében levő tényezők között az i -ik oszlop helyébe a (134) egyenletrendszer jobb oldalának nevezői kerültek, egyébként a tényezők azonosak, kiesnek. Az a_i ismeretlen tehát:

$$a_i = \left(\frac{k}{i} \cdot \frac{k-1}{i-1} \dots \frac{k-i+1}{1} \right) \left(\frac{2i-1}{1} \cdot \frac{2i-3}{3} \dots \dots \frac{3}{2i-3} \cdot \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{3}{2i+3} \dots \frac{2k-2i-1}{2k-1} \right). \quad (135)$$

Ez a megoldás az első zárjeles kifejezésben i tényezőt, a másodikban k tényezőt tartalmaz, mely utóbbinak első i tényezője az egységgel egyenlő szorzatot ad (párosával egymás reciprokai), így végeredményben $(k - i)$ tényező marad.

A kapott megoldás még nem a (134) alatti egyenletrendszer megoldása, csupán annak első k egyenletéből számított közelítő érték. A végleges a_i megoldás $k \rightarrow \infty$ határátmenettel keresendő. Válasszunk ezért olyan k értéket, mely i -nek többszöröse, pl. $k = ni$, ahol n egész szám. A (135) alatti második zárjeles kifejezés így $(k - i) = (n - 1) i$ tényezőt tartalmaz, melyek között az n -ik számlálója azonos az első nevezőjével, a $(2n - 1)$ -ik számlálója az n -ik nevezőjével stb., valamint az $(n + 1)$ -ik számlálója a második nevezőjével stb., az összes $(n - 1) i$ tényező tehát i számú tényezőre egyszerűsíthető, melyek a (135) alatti első zárjelben levő i számú tényezővel fordított sorrendben párosítva ($k = ni$ helyettesítéssel) az alábbi megoldást adják:

$$a_i = \frac{ni - i + 1}{2ni - 2i + 1} \cdot \frac{(ni - i + 2) 3}{(2ni - 2i + 3) 2} \cdot \frac{(ni - i + 3) 5}{(2ni - 2i + 5) 3} \cdots \frac{(2i - 1) n}{2ni - 1}.$$

A $k \rightarrow \infty$, azaz $n \rightarrow \infty$ határátmenet így már elvégezhető és a keresett a_i ismeretlen:

$$a_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2i - 1}{2i}. \quad (136)$$

A (132) alatti eredeti egyenletrendszerünk megoldásai tehát (133) alapján (visszatérve az n indexre):

$$A_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n - 1}{2n} \cdot \frac{1}{2n + 1} A_0, \quad (137)$$

ahol A_0 a (132) alatti első egyenletből határozandó meg. Helyettesítsük ezért ebbe az egyenletbe (133) alapján A_n értékét:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0 a_n}{2n + 1} \left[\beta + \frac{2}{(2n + 1)\pi} \right] &= A_0 \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n + 1} + \\ &+ A_0 \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2n + 1)^2} = -\frac{1}{2} k_0 H. \end{aligned} \quad (138)$$

Feladatunk tehát az alábbi összegek meghatározása:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n + 1} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} + \dots \quad (139)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2n + 1)^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 7} + \dots \quad (140)$$

Az előbbit az ismert

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad (141)$$

Mivel D_0 — mint már tárgyaltuk — egyúttal a műtárgy alatt átszivárgó összes vízmennyiséget is jelenti, a (145) képlettel a véges vízvezetőréteg vízhozamára vonatkozólag *Dachler* által már levezetett képletet kaptuk meg.

A további D_k értékeket akár a (119), akár a (123) képletekből számíthatnánk, a számítás azonban körülményes. Szorozzuk ezért (119)-et $\text{sh}k\pi\beta$ -val és (123)-at $\text{ch}k\pi\beta$ -val, majd a két egyenletet adjuk össze és fejezzük ki D_k értékét:

$$D_k = (-1)^k e^{-k\pi\beta} 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\varphi_n^2 \sin \varphi_n}{\varphi_n^2 - (k\pi)^2} \left(\frac{1}{\varphi_n} - \frac{1}{k\pi} \right)$$

azaz rendezés és (59–60) helyettesítése után:

$$D_k = -(-1)^k \frac{2}{k\pi} e^{-k\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \frac{2n+1}{2n+2k+1}$$

végül (133) alapján:

$$D_k = -(-1)^k \frac{2}{k\pi} A_0 e^{-k\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+2k+1}. \quad (146)$$

Feladatunk a képletben levő összeg értékét $k = 1, 2, 3 \dots$ helyettesítéssel egyszer s mindenkorra meghatározni, figyelemmel a (136) alatti értékekre. A summa kifejezett alakja:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+2k+1} &= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2k+5} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2k+7} + \dots \end{aligned} \quad (147)$$

Ha az alábbi Taylor-sort:

$$\frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} = x^{2k} + \frac{1}{2} x^{2k+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^{2k+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} x^{2k+6} + \dots$$

$x = 0$ és $x = 1$ határok között integráljuk, úgy jobboldala nyilván (147) jobboldalával lesz egyenlő, s ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+2k+1} = \int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (148)$$

A D_k értékek tehát (146)-ból; (145) figyelembevételével:

$$D_k = -\frac{2k+1}{k} e^{-k\pi\beta} A_k. \quad (149)$$

Számértékekkel:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= -\frac{\pi}{2} A_0 \\ D_1 &= +\frac{1}{2} e^{-\pi\beta} A_0 \\ D_2 &= -\frac{3}{16} e^{-2\pi\beta} A_0 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

A kapott D értékek ismeretében az áramkép a műtárgy alatti tartományban is adott a (106) és (107) képletekkel, melyekben $C_n = 0$ (szimmetria miatt) és C_0 a (109) képlet szerinti. Megjegyzendő, hogy a (150) alatti $D_1, D_2 \dots$ értékekben levő exponenciális függvény miatt az áramkép a műtárgy alatti tartománynak csak a két végén — mintegy a vízvezető réteg t_0 mélységének háromnegyed hosszúságán — tér el a paralelszálás szivárgási képtől.

E pontban végzett vizsgálataink során eddig feltételeztük, hogy a műtárgy B szélessége nagyobb a vízvezetőréteg t_0 mélységének másfélszeresénél. Most röviden utalunk még a megoldás módjára abban az esetben, ha ez a feltétel nem teljesül. Ebben az esetben ugyanis a (132) alatti második egyenlet helyett nem lehet minden esetben az egyszerűbb, harmadik egyenletet használni. Az egyenletrendszer első egyenlete változatlanul a (132) alatti első egyenlet lesz, utána néhány egyenlet a (132) alatti második egyenlet szerint írandó fel, majd — ha $\text{th } k\pi\beta$ kellően megözelíti az egységet — ismét áttérhetünk a harmadik — β -tól már független — egyenletre.

A számítás módszerét példaképpen bemutatjuk olyan esetre, hogy $\text{th } 3\pi\beta \approx 1$, de $\text{th } \pi\beta \neq 1 \neq \text{th } 2\pi\beta$, tehát két egyenlet kell a második típus szerint kifejtteni, a harmadiktól kezdve az egyszerű forma használható. Ez körülbelül annak az esetnek felel meg, ha a B műtárgyszélesség fele a t_0 mélységnek.

A (134) egyenletek helyébe így a következő egyenletek lépnek (megkülönböztetésül az a_n tényezőket vesszővel jelölve):

$$\left. \begin{aligned} &\frac{3 \text{ th } \pi\beta + 2}{5} \cdot \frac{a'_1}{1} + \frac{5 \text{ th } \pi\beta + 2}{7} \cdot \frac{a'_2}{3} + \frac{7 \text{ th } \pi\beta + 2}{9} \cdot \frac{a'_3}{5} + \\ &\quad + \frac{9 \text{ th } \pi\beta + 2}{11} \cdot \frac{a'_4}{7} + \dots = \frac{\text{th } \pi\beta + 2}{3} \cdot \frac{1}{1} \\ &\frac{3 \text{ th } 2\pi\beta + 4}{7} \cdot \frac{a'_1}{-1} + \frac{5 \text{ th } 2\pi\beta + 4}{9} \cdot \frac{a'_2}{1} + \frac{7 \text{ th } 2\pi\beta + 4}{11} \cdot \frac{a'_3}{3} + \\ &\quad + \frac{9 \text{ th } 2\pi\beta + 4}{13} \cdot \frac{a'_4}{5} + \dots = \frac{\text{th } 2\pi\beta + 4}{5} \cdot \frac{1}{3} \\ &\quad \frac{a'_1}{-3} + \frac{a'_2}{-1} + \frac{a'_3}{1} + \frac{a'_4}{3} + \dots = \frac{1}{5} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

hogy a szádfalszerűen keskeny műtárgy feltételezése — a műtárgy közvetlen környezetétől eltekintve — megengedhető. Utóbbi esetben ugyan az átszivárgó vízmennyiségre nem kapunk megoldást, erre vonatkozólag viszont rendelkezésre áll *Dachler* vonatkozó képlete, melyet $B < t_0$ esetre idézünk:

$$Q = k_0 H \cdot 0,73 \log \frac{13 + \left(\frac{B}{t_0}\right)^2}{2,54 \frac{B}{t_0}}. \quad (154)$$

67. Az áramkép meghatározása széles műtárgy és aszimmetrikus rétegződés esetén

A műtárgy alatti tartomány (106) alatti potenciálfüggvényét ebben az esetben úgy kell meghatározni, hogy a csatlakozási feltételek mind az alvízi tartomány határvonalán ($\xi = \beta$), mind a felvízi tartomány határvonalán ($\xi = -\beta$) kielégüljenek, mind a potenciál, mind a vízhozamok egyenlősége tekintetében. A feladat megoldására az eddigiekhez hasonlóan négy feltételi egyenlet írható fel a négy ismeretlen értékrendszer (alvízi A értékek, felvízi F értékek, műtárgy alatti C és D értékek) meghatározásához. A feladat tehát elvileg megoldható és van négy olyan értékrendszer, mellyel a teljes áramkép jellemezhető.

A feladat fenti módon való megoldása azonban körülményes és hosszadalmas, s $B < 1,5 t_0$ esetben — mely már a szimmetrikus esetnél is komplikációkat okozott — az exakt megoldás megkeresése alig kivihető. A $B > 1,5 t_0$ esetben viszont egy egyszerűbb módszer is áll rendelkezésünkre, mely — az előző pontban már említett módon — közelítő megoldásként mintegy $B \geq 0,5 t_0$ határig is alkalmazható, s melyet a következőkben ismertetünk.

A módszer alapja az a felismerés, hogy e hosszabb műtárgy alatt a szivárgás — legalábbis a műtárgy középvonalában — alig tér el a párhuzamos szálas áramképtől, a potenciál tehát a műtárgy középvonalában állandónak tekinthető, mert a potenciálvonalak merőlegesek az áramvonalakra. (Vö. a (150) képlet után tett megjegyzéssel). E potenciál értékét ugyan nem ismerjük, de meghatározása — mint egyetlen ismeretlené — az átszivárgó teljes vízmennyiség felvízi és alvízi egyenlősége alapján könnyű.

A számítást úgy célszerű végrehajtani, hogy a felvízi oldalon levő fedőrétegek helyébe is az alvízi fedőrétegeket képzeljük és az így kapott szimmetrikus esetet a (112–113) képletekkel megoldjuk $H = 1$ vízszintkülönbség felvételével. Az áramkép jellemzői A'_n és D'_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) együtthatók lesznek. Most az alvízi fedőrétegek helyébe képzeljük a felvízi tartomány fedőrétegeit és a kapott szimmetrikus esetet ugyanazokkal a képletekkel megoldjuk ismét $H = 1$ vízszintkülönbség esetére. A (112–113) képletekben φ_n helyébe természetesen a felvízi fedőrétegeknek megfelelő θ_n értékeket írjuk. Az így kapott együtthatókat jelöljük A''_n és D''_n -vel. Az átszivárgó víz mennyiségét a két esetben D'_0 ill. D''_0 adja meg.

Tegyük fel, hogy a műtárgy középvonalában fellépő állandó potenciálnak megfelelő nyomás az alvízi szinthez képest mH , ahol az m tényező 0 és 1 közötti szám a kétféle fedőréteg fojtásától függően. Szimmetrikus esetnek $m = 0,5$ tényező felel meg. Nyilvánvaló, hogy az m tényező a vízhozamok egyenlőségét kifejező

$$mD'_0 = (1 - m) D''_0$$

összefüggés alapján:

$$m = \frac{D_0''}{D_0' + D_0''} \quad (155)$$

képletből számítható. Az m tényező ismeretében az alvízi tartomány végleges áramképét jellemző A , D értékrendszer

$$A_n = 2 m A_n' H \quad \text{és} \quad D_n = 2 m D_n' H \quad (156)$$

összefüggésekkel rendelkezésre áll. A felvízi tartomány áramképének jellemzői hasonlóan nyerhetők az A_n'' és D_n'' értékekből $2(m - 1)H$ szorzóval. A negatív előjelet az indokolja, hogy a felvízi oldalon a szivárgás iránya ellentétes azzal, mint aminek alapján az A_n'' , D_n'' értékeket meghatároztuk.

Ha a felvízi és alvízi tartományok közül valamelyik fedőréteg nélküli, például a felvízi, úgy D_0'' helyett a (154) alatti Dachler-féle képletet helyettesíthetjük kisműtárgyszélesség esetén. Az alvízi áramkép így kis szélesség esetén is majdnem korrektt lesz, mert fedőréteg esetén a műtárgy alatti párhuzamos szivárgási kép a műtárgy középrészén gyakorlatilag már kisebb szélesség esetén is előáll.

A mondottakat egy számpéldával illusztráljuk. Legyen a szivárgási tartomány a felvízi oldalon fedőréteg nélküli, az alvízi oldalon a fedőrétegek alapján számított karakterisztikus tényező $a_a = 1$. A műtárgy szélessége legyen $B = t_0$, azaz $\beta = 0,5$. Határozzuk meg a nyomás értékét a műtárgy középvonalában, ha az alvízi és felvízi vízszintek különbsége H .

Az alvízi tartomány példánkban azonos a 65. pontban megoldott számpélda alvízi tartományával. A D_0' érték tehát azonos az ott kapott D_0' értékkel $H = 1$ esetére, azaz

$$D_0' = 0,307 k_0$$

A fedőréteg nélküli felvízi tartomány D_0'' vízhozama (145) képlettel:

$$D_0'' = 0,53 k_0$$

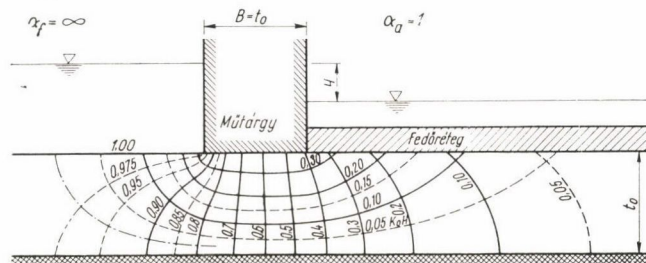
Az m tényező (155) képlettel

$$m = 0,634,$$

a keresett nyomás tehát $0,634 H$ az alvízszinthez képest.

Határozzuk meg a szivárgás áramképét! Az alvízi tartomány A , D értékei a 65. pont számpéldájában kiszámított megfelelő értékekből a (156) összefüggés szerint $2 m = 1,268$ szorzóval nyerhetők, a felvízi tartomány megfelelő értékei pedig a 66. pont (145) és (150) alatti értékeiből $2(1 - m) = -0,732$ szorzóval. Az együtthatók ismeretében az áramkép már ismert módon megszerkeszthető.

Az áramképet a 9. ábrán láthatjuk.



9. ábra. Aszimmetrikus szivárgási tartomány áramképe széles műtárgy esetén

7. Galli László megoldásának kritikája

Bevezetőben már említettük, hogy a fedőréteggel takart, véges mélységű vízvezető rétegben előálló szivárgások problémáját *Galli László* azzal a közelítő feltevéssel vizsgálta, hogy a vízvezető rétegben előálló sebességek függőleges komponensét elhanyagolta. A vízvezető réteget így folyamatos vízkivétellel terhelt csőnek tekinthetjük, melynek egy-egy függőleges metszetében a nyomás állandó. E feltétellel a probléma lényegesen egyszerűbb képletekre vezet, ezek hibahatárait azonban *Galli László* — megfelelő pontos számítási eljárás hiányában — csak közvetett módon, s kevésbé meggyőzően tudta megvizsgálni. E fejezetben e hiányosságot kívánjuk pótolni, s a Galli-féle számítási eljárásnak a pontos képletekkel való összehasonlítását elvégezni.

Galli László eljárása az áramképek megszerkesztésére természetesen nem alkalmas, csupán a műtárgytól különböző távolságban levő függőleges metszeten átszivárgó vízmennyiségek és az illető metszetekben fellépő nyomás (helyesebben az alvízi fedőrétegsor felső síkján levő nyomáshoz viszonyított nyomástöbblet) meghatározására szolgál. Végképletei lényegileg a következők (e tanulmány jelöléseit alkalmazva):

Valamely műtárgy alatt átszivárgó összes vízhozam

$$Q = \frac{t_0}{B_0} k_0 H. \quad (157)$$

ahol B_0 a teljes szivárgási tartomány egyenértékű műtárgyszélessége, mely a

$$B_0 = B_f + B + B_a \quad (158)$$

összefüggéssel a műtárgy tényleges B talpszélességéből, valamint a felvízi tartomány B_f és az alvízi tartomány B_a fiktív műtárgyszélességéből tevődik össze. Ez utóbbiak közül például az alvízi fiktív szélesség:

$$B_a = \sqrt{k_0 t_0 \frac{t_{fa}}{k_{fa}}}. \quad (159)$$

melyben t_{fa} és k_{fa} az alvízi fedőrétegsort helyettesítő egyenértékű fedőréteg (lásd 61. pontban) vastagsága és szivárgási tényezője. A B_f fiktív műtárgyszélesség képlete azonos a (159) képlettel, csupán a felvízi egyenértékű fedőréteg t_{ff} és k_{ff} állandói szerepelnek a megfelelő alvízi értékek helyett.

A műtárgy alvízi lábvonalától x távolságban felvett függőleges metszeten átszivárgó vízmennyiség Q ismeretében:

$$Q_x = Q e^{-\frac{x}{B_a}} \quad (160)$$

és hasonló a képlet a felvízi oldalra vonatkozólag B_f értékkel.

A műtárgy alvízi lábvonalában fellépő nyomás értéke (a fedőréteg felső síkjában fellépő nyomáshoz viszonyítva):

$$h_0 = \frac{B_a}{B_0} H \quad \text{vagy} \quad h_0 = \frac{B_a}{k_0 t_0} Q \quad (161)$$

képlettel nyerhető, melyből az alvízi lábvonaltól x távolságban fellépő nyomás értéke:

$$h_x = h_0 e^{-\frac{x}{B_a}} \quad (162)$$

Hasonlóan határozhatók meg a felvízi tartomány nyomásértékei, B_a helyett B_f helyettesítésével.

A Galli-féle eljárás képleteinek ismertetése után vizsgáljuk meg azoknak összefüggéseit az e tanulmányban foglalt képletekkel. Az alvízi tartomány α_a karakterisztikus tényezője (19) alapján

$$\alpha_a = \frac{k_{fa} t_0}{k_0 t_{fa}},$$

mellyel (159)-ből nyilvánvaló, hogy

$$B_a = \frac{t_0}{\sqrt{\alpha_a}} \quad (163)$$

és hasonlóan B_f ugyanígy függ α_f -től, tehát (158) szerint:

$$B_0 = \frac{t_0}{\sqrt{\alpha_f}} + B + \frac{t_0}{\sqrt{\alpha_a}}. \quad (164)$$

Az összes átszivárgó vízmennyiség tehát (157)-ből:

$$Q = \frac{k_0 H}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_f}} + \frac{B}{t_0} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}}}. \quad (165)$$

A kapott általános képlet különleges esetei a következők:

1. felvízi tartomány hiányzik és $B = 0$ (I. ábrának megfelelő idealizált eset):

$$Q = k_0 H \sqrt{\alpha_a}. \quad (166)$$

Tanulmányunkban erre az esetre $\alpha < 1$ esetén 4%-on belül pontos közelítő képletet vezetünk le, mely (36) alapján ($\Delta h = H$):

$$Q = k_0 H \sqrt{\alpha_a} \sqrt{\frac{3}{3 + \alpha_a}}. \quad (167)$$

A két képlet összehasonlítva nyilvánvaló, hogy a (166) képlet $\alpha_a = 1$ esetén további 14% hibával terhelt*. A hiba kisebb α értéknél kisebb, nagyobbánál növekszik. Nagyobb α esetén azonban a (167) képlet hibája is nő, tehát az I. táblázat szerinti pontos képletet kell használni.

2. áramkép aszimmetrikus, tehát $\alpha_f \neq \alpha_a$ és $B = 0$ (63. pontban tárgyalt eset):

$$Q = \frac{k_0 H}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_f}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}}}. \quad (168)$$

* A 14% hiba a két képlet között mutatkozik $\alpha_a = 1$ esetén. A (167) képlet 4% hibája azonban ezzel ellenkező értelmű, ezért a (166) képlet abszolút hibája csak 10% körül van.

Tanulmányunk (104) képlete kissé átalakítva:

$$Q = \frac{k_0 H}{\frac{1}{\vartheta_0} + \frac{1}{\varphi_0}}, \quad (169)$$

mely közelítő képlet és akkor érvényes, ha a felvízi és alvízi tartományok közül legalább az egyiknél a karakterisztikus a tényező kisebb az egységnél. A képletben ϑ_0 és φ_0 a karakterisztikus egyenletek első gyökei. Ha például az alvízi tartomány a_a tényezője kisebb 1-nél, úgy

$$\varphi_0 \sim \sqrt{\frac{3 a_a}{3 + a_a}} \sim \sqrt{a_a}, \quad (170)$$

mely utóbbi közelítés mintegy 10% hibával terhelt, ha $a_a = 1$. Ha a felvízi tartomány a_f tényezője is kisebb az egységnél, úgy ϑ_0 -ra hasonló közelítés alkalmazható és a (169) képlet azonos lesz a (168) képlettel. A (169) képlet azonban akkor is jó közelítést ad, ha csak az egyik, pl. az alvízi tartomány a_a tényezője kicsi, a másik lehet nagy, akár ∞ , mely a fedőréteg nélküli tartományt jelenti. Mivel ekkor $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$, ezért azt az érdekes következtetést vonhatjuk le, hogy

fedőréteg nélküli tartomány Galli-féle egyenértékű műtárgyszélessége $\frac{2}{\pi} t_0 = 0,64 t_0$ *abban az esetben, ha a másik tartomány a tényezője kicsi.* Utóbbi megszorítás nyilván szükséges, mert ha mindkét tartomány fedőréteg nélküli, úgy az általunk is levezetett (145) alatti Dachler-képletből ugyanez a műtárgyszélesség $0,44 t_0$ -ra adódik.

Fentiek alapján már következtethetünk a *Galli-féle módszer* érvényességi határaitra. *Ha a felvízi és alvízi tartományokra vonatkozólag az a karakterisztikus tényező kisebb az egységnél, úgy az eljárás 10%-nál kisebb hibával alkalmazható.* E hibahatár 4%-ra csökkenthető, ha a *Galli-féle* egyenértékű műtárgyszélességet

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{a}{3}} \quad (171)$$

növelő tényezővel szorozva állapítjuk meg. Ha a nagyobb az egységnél, úgy a hiba erősen nő, ezért az *I. táblázatban* foglalt pontos képlet alkalmazása javasolható.

A *Galli-féle eljárás kiegészítésére* megállapítjuk, hogy az eljárás akkor is alkalmazható, ha csak az egyik tartományra vonatkozólag teljesül az $a < 1$ feltétel. A másik — például a felvízi tartomány egyenértékű műtárgyszélességét ebben az esetben az a_f tényező nagyságától függően $0,64 t_0$ és t_0 határok között kell felvenni, melyek közül az előbbi az $a_f = \infty$ (fedőréteg nélküli eset), az utóbbi az $a_f = 1$ esetnek felel meg.

FÜGGELEK

Az általános trigonometrikus függvénysorok elmélete

Tanulmányunk bevezető részében említést tettünk már az általános trigonometrikus függvénysorokról, melyek a fedőréteges szivárgási tartományok matematikai tárgyalását lehetővé tették. Kilátásba helyeztük e függvénysorok elméletének ismertetését. Ez képezi jelen függelék tárgyát.

1. Az általános trigonometrikus függvénysorok

Állítjuk, hogy végtelen sok olyan

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad \psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \quad (F - 1)$$

értékrendszer létezik, melyekkel képezett

$$\left. \begin{aligned} &\cos \frac{\varphi_0}{l} x, \cos \frac{\varphi_1}{l} x, \cos \frac{\varphi_2}{l} x, \dots, \cos \frac{\varphi_n}{l} x, \dots \\ &\sin \frac{\psi_0}{l} x, \sin \frac{\psi_1}{l} x, \sin \frac{\psi_2}{l} x, \dots, \sin \frac{\psi_n}{l} x, \dots \end{aligned} \right\} \quad (F - 2)$$

függvényrendszer az $-l < x < +l$ intervallumban ortogonális és lehetővé teszi bármely $y = f(x)$ függvénykapcsolat említett intervallumba eső részének sorbafejtését az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\varphi_n}{l} x + B_n \sin \frac{\psi_n}{l} x \right) [n = 0, 1, 2, \dots] \quad (F - 3)$$

képlet szerint, ha az $f(x)$ függvény korlátos és legalább szakaszosan folytonos.

2. Segédtelemek

Idézzük az alábbi határozott integrálokat:

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-l}^{+l} \cos^2 \frac{\varphi_n}{l} x dx = l \left(1 + \frac{\sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n} \right) \\ &\int_{-l}^{+l} \sin^2 \frac{\psi_n}{l} x dx = l \left(1 - \frac{\sin 2 \psi_n}{2 \psi_n} \right) \end{aligned} \right\} \quad (F - 4)$$

továbbá, mivel az integrandus páratlan függvény, minden n és m értékre:

$$\int_{-l}^{+l} \cos \frac{\varphi_n}{l} x \sin \frac{\psi_m}{l} x dx = 0 \quad (F - 5)$$

végül minden n és m értékre, de $n \neq m$:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^{+l} \cos \frac{\varphi_n}{l} x \cos \frac{\varphi_m}{l} x dx &= \frac{2l \cos \varphi_n \cos \varphi_m}{\varphi_n^2 - \varphi_m^2} (\varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n - \varphi_m \operatorname{tg} \varphi_m) \\ \int_{-l}^{+l} \sin \frac{\psi_n}{l} x \sin \frac{\psi_m}{l} x dx &= \frac{2l \sin \psi_n \sin \psi_m}{\psi_n^2 - \psi_m^2} (\psi_m \operatorname{ctg} \psi_m - \psi_n \operatorname{ctg} \psi_n) \end{aligned} \right\} (F-6)$$

A fenti egyenletekben $\varphi_n, \varphi_m, \psi_n, \psi_m$ tetszés szerinti valós számértékek lehetnek.

3. A függvényrendszerek ortogonalitásának feltételei

Vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy az (F-2) alatti függvényrendszer ortogonális legyen?

Az (F-5) egyenlőség értelmében bármelyik cosinus függvény minden esetben ortogonális valamennyi szinuszfüggvényhez.

Az (F-6) egyenlőségek alapján viszont az (F-2) alatti cosinus és szinuszfüggvények egymás között is ortogonálisak, ha bármely n és m értékre ($n \neq m$) igazak az alábbi egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n - \varphi_m \operatorname{tg} \varphi_m &= 0 \\ \psi_n \operatorname{ctg} \psi_n - \psi_m \operatorname{ctg} \psi_m &= 0 \end{aligned} \right\} (F-7)$$

E feltételi egyenletek egyértelműen kielégülnek, ha az (F-1) alatti értékrendszer összes φ és ψ értékei a

$$\left. \begin{aligned} \varphi \operatorname{tg} \varphi &= C_\varphi \\ \psi \operatorname{ctg} \psi &= C_\psi \end{aligned} \right\} (F-8)$$

illetve

karakterisztikus egyenletek gyökei, ahol C_φ és C_ψ tetszés szerint választható állandók. A karakterisztikus egyenletekből meghatározható végtelen sok gyök minden C_φ -hez egy végtelen φ értékrendszert és minden C_ψ -hez egy végtelen ψ értékrendszert ad, ezek szerint kétszeresen végtelen sok ortogonális függvényrendszer képezhető.

A továbbiakban φ_0 és ψ_0 alatt az (F-8) alatti karakterisztikus egyenletek első pozitív gyökét (főértékét) értjük, míg φ_n és ψ_n azok $(n+1)$ -ik pozitív gyöke. A második karakterisztikus egyenletnek $\psi = 0$ is gyöke, ezt azonban az értékrendszerből kizárjuk, mert megfelelője az (F-2) függvényrendszerben zérusfüggvény.

A karakterisztikus egyenletek gyökeinek grafikus ábrázolása szemléletes áttekintést nyújt az értékrendszerekről. Az (F-8) egyenletek átalakításával

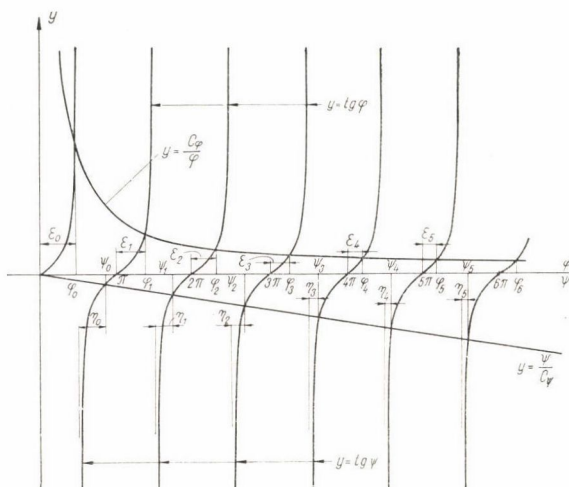
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{C_\varphi}{\varphi} \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\psi}{C_\psi} \end{aligned} \right\} (F-9)$$

ugyanis nyilvánvaló, hogy az *F-1. ábrán* felrajzolt tangensgörbéknek az $y = C_\varphi/\varphi$ hiperbolával, illetve az $y = \psi/C_\psi$ egyenessel való metszéspontjaihoz tartozó abszcisszákat a φ , illetve ψ értékek sorozatát adják.

Az ábra alapján megállapítható, hogy a φ és ψ értékek célszerűen írhatók az alábbi alakban:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= n\pi + \varepsilon_n \\ \psi_n &= n\pi + \frac{\pi}{2} + \eta_n \end{aligned} \right\} (n = 0, 1, 2, 3 \dots), \quad (F-10)$$

ahol ε_n és $\eta_n \frac{\pi}{2}$ -nél kisebb értékek és növekvő n -nel zérushoz tartanak.



F-1. ábra. A φ és ψ értékrendszer grafikus szerkesztése

Megjegyezzük, hogy a negatív gyökök megkeresése felesleges, mert azok az (F-2) alatti függvényrendszerben nem jelentenek új függvényt.

Gyakorlati esetekben C_φ általában pozitív, C_ψ pedig negatív állandónak adódik és gyakori eset, hogy $C_\varphi = -C_\psi$. Ez utóbbi esetre bizonyítható, hogy az (F-2) alatti függvényrendszer nem csak az $-l < x < +l$ intervallumban, hanem külön-külön az $-l < x < 0$ és $0 < x < +l$ intervallumokban is ortogonális.

4. Az általános trigonometrikus függvény sor együtthatói

Az (F-3) alatti kifejezést $\cos \frac{\varphi_n}{l} x$ értékkel szorozva és az érvényességi intervallumon belül integrálva az ortogonalitás miatt a polinomnak csak egy tagja nem lesz zérus, az, amelyikben φ_n szerepel. Így (F-4) figyelembevételével:

$$\int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{\varphi_n}{l} x dx = A_n l \left(1 + \frac{\sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n} \right)$$

amiből:

$$A_n = \frac{\int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{\varphi_n}{l} x dx}{l \left(1 + \frac{\sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n} \right)} \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad (F - 11)$$

és hasonlóan nyerhető:

$$B_n = \frac{\int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{\varphi_n}{l} x dx}{l \left(1 - \frac{\sin 2 \varphi_n}{2 \varphi_n} \right)} \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (F - 12)$$

Itt említjük meg, hogy az általános trigonometrikus függvénysor $C_\varphi = 0$ és $C_\psi = -\infty$ esetben az ismert Fourier-sorba megy át. Ekkor ugyanis az F-1. ábrán a φ , ill. ψ értékeket kimetsző hiperbola és egyenes összeesik az abszcisszateneggelyel, a φ és ψ értékek tehát $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ és $\psi = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ lesznek miáltal (F-3) valóban a Fourier-sort állítja elő. Az A_n, B_n együtt-hatók nevezőiben a zárjeles kifejezések az egységgel lesznek egyenlők, mert $\sin 2n\pi = 0$. Kivétel az $n = 0$ eset, mert ekkor az A_n képlet nevezőjében levő törtnek nemcsak számlálója, hanem nevezője is zérus. Mivel a tört határértéke, mint ismeretes, az egységgel egyenlő, a zárjeles kifejezés értéke ebben az egy esetben: 2. A Fourier-sorok általában önállóan, $\frac{a_0}{2}$ alakban felírt, ún. tiszta

tagjának ama szingularitására, hogy a többi együtthatóhoz képest kettővel osztva szerepel, így az általános trigonometrikus függvénysor ad magyarázatot.

5. Páros, páratlan függvények, periodicitás

Nyilvánvaló, hogy páros függvények sorbafejtésénél az (F-3) kifejezésben szereplő összes $B_n = 0$, míg páratlan függvények esetén az összes $A_n = 0$, ugyanúgy, mint a Fourier-soroknál.

A periodicitás ezzel szemben az általános trigonometrikus függvénysornak nem tulajdonsága. A Fourier-sorok a leképezett intervallumon kívül sorozatosan ismétlik az intervallumon belül leképezett függvényalakot, az általános trigonometrikus függvénysorok nem. Utóbbiak által az intervallumon kívül előállított függvényértékekre vonatkozólag egyelőre semmi megállapítást nem tehetünk.

6. Közelítő számítási módszerek

Az általános trigonometrikus függvénysorok gyakorlati alkalmazása körülményesebb a Fourier-sorokénál, mert a φ és ψ értékrendszert külön ki kell számítani az (F-8) alatti karakterisztikus egyenletekből. A karakterisztikus egyenletek gyökei zárt alakú képletekkel nem adhatók meg, de jó közelítő képletek vezethetők le, melyekkel kiszámított közelítő értékek szükség esetén iterációval pontosabbá tehetők. Jelen fejezetben a közelítő képleteket és leveztetésüket ismertetjük.

61. Közelítő képlet levezetése $\left(x \operatorname{ctg} x + \frac{x^2}{3}\right)$ értékére

Idézzük $x \operatorname{ctg} x$ ismert Taylor-sorát:

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - B_2 \frac{(2x)^2}{2!} + B_4 \frac{(2x)^4}{4!} - B_6 \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + (-1)^n B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (F-13)$$

mely $|x| < \pi$ esetre érvényes. A B_2, B_4, B_6, \dots értékek az ún. Bernoulli-féle számok, melyek nagyobb n értékek esetén kényelmesen számíthatók a

$$B_{2n} = (-1)^{n+1} 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots\right) \quad (F-14)$$

képletből, kis n esetén viszont inkább az

$$\binom{n}{1} B_{n-1} + \binom{n}{2} B_{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} B_1 + 1 = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (F-15)$$

rekurziós formulából.

A Bernoulli-féle számok értékei az idézett képletek alapján:

$$B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_8 = -\frac{1}{30}; \quad B_{10} = \frac{5}{66};$$

$B_{12} = -\frac{691}{2730}; \quad B_{14} = \frac{7}{6}; \dots$ stb. $B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0$. E felsorolásban a Bernoulli-féle számokat $n = 7$ -ig bezárólag írtuk fel, míg $n = 8$ -tól az (F-14) képletet alábbi közelítéssel használhatjuk:

$$B_{2n} \approx (-1)^{n+1} 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}, \quad (F-16)$$

mely B_{2n} értékét $1,5 \times 10^{-5}$ nél kisebb relatív hibával adja meg.

A Bernoulli-féle számok idézett értékeit, illetve $n = 8$ tól a fenti formulát (F-13) jobboldalára helyettesítve:

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{9x^{10}}{93555} - \frac{1382x^{12}}{638512875} - \dots - \frac{4x^{14}}{18243225} - \sum_{n=8}^{\infty} 2 \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n} \quad [|x| < \pi]. \quad (F-17)$$

A képlet utolsó tagja egy végtelen geometriai sor, melynek összege zárt alakban közvetlenül felírható. E helyettesítést elvégezve és némi rendezéssel:

$$x \operatorname{ctg} x + \frac{x^2}{3} = \quad (F-18)$$

$$= 1 - \frac{x^4}{45} \left[1 + \frac{2x^2}{21} + \frac{x^4}{105} + \frac{2x^6}{2079} + \frac{1382x^8}{14189175} + \frac{4x^{10}}{405405} + \frac{90}{\pi^4} \frac{\left(\frac{x}{\pi}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2} \right].$$

Hasonlítsuk össze (F-18) jobboldalát a következő kifejezéssel:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \frac{x^4}{45} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x^2}{21} \right)^n = \\ &= 1 - \frac{x^4}{45} \left[1 + \frac{2x^2}{21} + \frac{4x^4}{441} + \frac{8x^6}{9261} + \frac{16x^8}{194481} + \frac{32x^{10}}{4084101} + \frac{\left(\frac{2x^2}{21}\right)^6}{1 - \frac{2x^2}{21}} \right]. \end{aligned} \quad (F-19)$$

(F-18) és (F-19) különbségét jelöljük R -rel:

$$\begin{aligned} R &= \lambda - x \operatorname{ctg} x - \frac{x^2}{3} = \\ &= \frac{x^4}{45} \left[\frac{x^4}{2205} + \frac{x^6}{10187} + \frac{x^8}{66103} + \frac{x^{10}}{492268} + \frac{0,924 \left(\frac{x}{\pi}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2} - \frac{\left(\frac{2x^2}{21}\right)^6}{1 - \frac{2x^2}{21}} \right], \end{aligned} \quad (F-20)$$

ahonnan továbbá:

$$x \operatorname{ctg} x - \frac{x^2}{3} = \lambda \left(1 - \frac{R}{\lambda} \right). \quad (F-21)$$

Az (F-19) képletben levő végtelen geometriai sor értékét annak véges határértékével helyettesítve λ zárt alakban írható:

$$\lambda = 1 - \frac{7x^4}{315 - 30x^2}. \quad (F-22)$$

Tegyük kikötést x értékére vonatkozólag:

$$\text{ha } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \text{ akkor } \begin{cases} 1 \geq \lambda & \geq 0,823 \\ 0 \leq R & \leq 0,000685 \\ 1 \geq 1 - \frac{R}{\lambda} & \geq 0,99917 \end{cases} \quad (F-23)$$

Ha tehát (F—21) jobboldalát az (F—22) képlettel adott λ értékkel helyettesítjük, azaz

$$xc \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{3} \approx 1 - \frac{7x^4}{315 - 30x^2} \quad (F-24)$$

közelítést alkalmazzuk, úgy az (F—24) baloldalán álló trigonometrikus kifejezés értékét $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ esetben legfeljebb 0,83‰ relatív hibával kapjuk meg.

Ha x értéke kisebb, például $|x| \leq 0,5$, úgy a még egyszerűbb

$$xc \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{3} \approx 1 \quad (F-25)$$

közelítő képlet hibája legfeljebb 1,4‰. E képlet hibája $|x|=1$ esetén már 2,5‰ $\frac{\pi}{2}$ esetén pedig 21,5%, tehát ez esetekben már csupán durvább közelítésre alkalmas.

62. A φ értékrendszer meghatározása

Az előző pontban levezetett közelítő képlet eszközt ad kezünkbe a φ értékrendszer kényelmes meghatározásához. Kiindulunk φ_n (F—10) alatti alakjából, melyet az (F—9) alatti karakterisztikus egyenletbe helyettesítve:

$$(n\pi + \varepsilon_n) \operatorname{tg} \varepsilon_n = C_\varphi \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots), \quad (F-26)$$

ahol ε_n kisebb $\frac{\pi}{2}$ -nél, C_φ -re vonatkozólag pedig kikötjük, hogy pozitív legyen, ami a gyakorlati esetekben általában teljesül.

(F—26) reciprokát szorozzuk $\varepsilon_n(n\pi + \varepsilon_n)$ kifejezéssel és adjunk mindkét oldalhoz $\varepsilon_n^2/3$ értéket:

$$\varepsilon_n \operatorname{ctg} \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{3} = \frac{n\pi\varepsilon_n}{C_\varphi} + \frac{\varepsilon_n^2}{C_\varphi} + \frac{\varepsilon_n^2}{3}. \quad (F-27)$$

Vezessük be jobboldalán az

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{C_\varphi} + \frac{1}{3}; \quad \text{azaz} \quad \delta = \frac{3C_\varphi}{3 + C_\varphi} \quad (F-28)$$

jelölést, továbbá (F—27) baloldalát az (F—24) összefüggés alapján a

$$\lambda_n^{(\varphi)} = 1 - \frac{7\varepsilon_n^4}{315 - 30\varepsilon_n^2} \quad (F-29)$$

értékkel helyettesítjük úgy

$$\frac{\varepsilon_n^2}{\delta} + \frac{n\pi\varepsilon_n}{C_\varphi} - \lambda_n^{(\varphi)} = 0 \quad (F-30)$$

vegyes másodfokú egyenletet nyerjük, melyből

$$\varepsilon_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi\delta}{2C_\varphi}\right)^2 + \lambda_n^{(\varphi)}\delta} - \frac{n\pi\delta}{2C_\varphi} \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (F-31)$$

Az (F—31) képlet iterációs képlet, mert a gyök alatt szereplő $\lambda_n^{(\varphi)}$ érték a keresett ε_n -nek függvénye. A konvergencia viszont igen gyors, mert $\lambda_n^{(\varphi)}$ (F—23) szerint csak kismértékben változik. Az (F—31) képlet ezenkívül csak közelítő képlet, mert az (F—24) összefüggés 0,83‰ maximális relatív hibával terhelt. E hiba hatását a keresett ε_n értékre vonatkozólag az (F—31) összefüggés $\lambda_n^{(\varphi)}$ szerinti differenciálásával kaphatjuk meg. A levezetés mellőzésével megállapítjuk, hogy az első gyök, azaz ε_0 maximális relatív hibája 0,42‰, a további gyökök hibája kisebb.

Az ε_n értékek ismeretében a φ_n értékek (F—10) képlettel határozhatók meg.

Az ε_n értékek nagyobb n esetén mind kisebbek lesznek. Ha már $\varepsilon_n \leq 0,5$, úgy az (F—31) képletben $\lambda_n^{(\varphi)} = 1$ helyettesíthető, ettől kezdve tehát közvetlen (nem iterációs) képlet áll rendelkezésünkre, melynek legnagyobb hibája kisebb 0,7‰-nél.

Még nagyobb n értékekre a képlet tovább is egyszerűsíthető. Helyettesítsünk ugyanis (F—31)-ben $\lambda_n^{(\varphi)} = 1$ értéket, majd alábbiak szerint kiemelünk és sorbafejtünk:

$$\varepsilon_n = \frac{n \pi \delta}{2 C_\varphi} \left(\sqrt{1 + \frac{4 C_\varphi^2}{\delta (n \pi)^2}} - 1 \right) \approx \frac{C_\varphi}{n \pi} - \frac{1}{\delta} \left(\frac{C_\varphi}{n \pi} \right)^3. \quad (F - 32)$$

A kapott képlet 0,2‰ hibán belül használható, ha $\varepsilon_n \leq 0,1 \varepsilon_0$, ahol ε_0 a karakterisztikus egyenlet első gyöke. Ekkor ugyanis ε_n helyébe durvább közelítésként $C_\varphi/n \pi$ értéket, ε_0 helyébe pedig közelítőleg $\sqrt{\delta}$ értéket írva

$$\frac{C_\varphi}{n \pi} \leq 0,1 \sqrt{\delta} \quad \text{azaz} \quad \frac{4 C_\varphi^2}{\delta (n \pi)^2} \leq 0,04,$$

mely biztosítja, hogy az (F—32) alatti sorbafejtésnél az elhanyagolt tagok révén előálló hiba 0,2‰-nél kisebb legyen.

Ha végül $\varepsilon_n \leq 0,02 \varepsilon_0$ feltétel is teljesül, úgy ε_n 0,4‰ hibán belül számítható az egyszerű

$$\varepsilon_n \approx \frac{C_\varphi}{n \pi} \quad (F - 33)$$

képletből.

63. A ψ értékrendszer meghatározása

A ψ értékrendszer (F—10) alatti alakjával az (F—8) alatti karakterisztikus egyenlet

$$\left(n \pi + \frac{\pi}{2} + \eta_n \right) \operatorname{ctg} \left(n \pi + \frac{\pi}{2} + \eta_n \right) = - \left(n \pi + \frac{\pi}{2} + \eta_n \right) \operatorname{tg} \eta_n = C_\psi \quad (F - 34)$$

alakban írható, ahol $\eta_n \leq \frac{\pi}{2}$, C_ψ -re pedig kikötjük, hogy negatív, mint a gyakorlati esetekben általában.

Az (F-34) egyenlet reciprokértékét $-\eta_n \left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \eta_n \right)$ kifejezéssel szorozva az alábbi egyenlet nyerhető:

$$\eta_n \operatorname{ctg} \eta_n + \frac{\eta_n^2}{3} = - \frac{\left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \eta_n}{C_\varphi} + \frac{\eta_n^2}{3} - \frac{\eta_n^2}{C_\varphi}. \quad (F-35)$$

Bevezetve az

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{C_\varphi}; \quad \text{azaz} \quad \vartheta = \frac{3C_\varphi}{C_\varphi - 3} \quad (F-36)$$

paramétert, továbbá (F-35) baloldalát az (F-24) összefüggés alapján

$$\lambda_n^{(\varphi)} = 1 - \frac{7\eta_n^4}{315 - 30\eta_n^2} \quad (F-37)$$

értékkel helyettesítve:

$$\frac{\eta_n^2}{\vartheta} - \frac{\left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \eta_n}{C_\varphi} - \lambda_n^{(\varphi)} = 0 \quad (F-38)$$

melynek megoldása;

$$\eta_n = \sqrt{\left[\frac{\left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \vartheta}{2C_\varphi} \right]^2 + \lambda_n^{(\varphi)} \vartheta} + \frac{\left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \vartheta}{2C_\varphi}. \quad (F-39)$$

Az η_n értékek tehát hasonlóan számíthatók, mint a φ értékrendszer ε_n értékei. A képlet itt is gyorsan konvergáló iterációs képlet, mely 0,42%-nál kisebb hibával adja a végeredményt.

Az η_n értékek ismeretében a ψ_n értékek (F-10) képlettel határozhatók meg.

Az (F-39) képlet egyszerűsítési lehetőségei hasonlóak az (F-31)-éhez. Így $\eta_n \leq 0,5$ esetben (F-39)-ben $\lambda_n^{(\varphi)} = 1$ helyettesíthető, miáltal 0,7%-o hibán belül pontos közvetlen (nem iterációs) képlet áll rendelkezésünkre.

Ha $\eta_n \leq 0,1 \sqrt{\vartheta}$, úgy az alábbi képlet 0,2%-o-re pontos;

$$\eta_n = - \frac{C_\varphi}{n\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\vartheta} \left(\frac{C_\varphi}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \right)^3 \quad (F-40)$$

Ha $\eta_n \leq 0,02 \sqrt{\vartheta}$, úgy a még egyszerűbb

$$\eta_n = - \frac{C_\varphi}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (F-41)$$

összefüggés legnagyobb hibája kisebb 0,4%-o-nél.

7. Az általános trigonometrikus függvénysor gyakorlati alkalmazása

Az általános trigonometrikus függvénysor alkalmazását szivárgási feladatok megoldásánál jelen tanulmányban kimerítően tárgyaltuk.

További gyakorlati alkalmazási lehetőség kínálkozik síktárcsák és héjak szilárdságtanában. Itt a határfeltételek kielégítésére a Fourier-sorok használatosak, melyek a szabad peremen fellépő kerületi feltételeket kielégíthetik. Igazolható, hogy bizonyos feltételek mellett az a trigonometrikus függvénysor, melynek (F-8) alatti karakterisztikus egyenleteiben a C_φ és C_ψ állandók egy adott gerenda és lemez viszonylagos merevségének felelnek meg, az illető gerendával szegélyezett tárcsa vagy héj kerületi feltételeinek kielégítésére alkalmas.

*