

RUGALMAS SÍKBAN FEKVŐ KÖR ALAKÚ KIVÁGÁS KONTÚRJÁNAK ALAKVÁLTOZÁSA RADIÁLIS TERHELÉS HATÁSÁRA

1. Bevezetés

Talajvíz alatt épülő alagutak falazatát gyakran választják kör keresztmetszetűre. Mélyvezetésű, városi földalatti vasutak falazatai csaknem kizárólag ilyen alakúak. Az alagútfalazat erőjátékával kapcsolatos kutatások bizonyították, hogy az alagútfalazatot körülvevő közet nemcsak terhelést ad át a falazatra, hanem a terület bizonyos szakaszán megtámasztást is. A kör alakú alagútfalazatot ebből a szempontból két szakaszra lehet felosztani, úgymint: elváló szakaszra, ahol a közetnyomás hatására az alagútfalazat deformálódva, befelé mozdul el, és terhelőszakaszra, ahol a falazat a körülvevő közettömegre támaszkodik. (1. ábra.)

A deformáció hatására a terhelő szakasz hozzányomódik az alagutat körülvevő közethez és ott reakcióerőket ébreszt. Természetesen az erőjátéknak a kialakulásához szükséges az, hogy az alagútfalazatot építés után gondosan körülínjektálják, vagyis az alagútfalazat körül képződő építési hézagokat gondosan kitöltsék, amit minden alagútépítésnél a kialakuló hegynyomások csökkentése és a falazat teherbírásának növelése miatt is el kell végezni.

Az alagútfalazatot korszerűen, tehát mint rugalmas közegbe ágyazott gyűrűt kell méretezni. Ilyen számítási eljárást dolgozott ki *Gorelik, Bodrov és Matteri, Zurabov, Bugajeva* stb. [1], [2], [3]. Ezek a méretezési eljárások a talaj rugalmas sajátságait a Winkler-féle hipotézis alapján ágyazási együtthatóval jellemezték, azaz feltételezték, hogy a feszültségek és alakváltozások között fennáll a

$$p = cy$$

összefüggés, ahol

p = a terhelés,

c = az ágyazási együttható,

y = a terhelés hatására keletkező elmozdulás

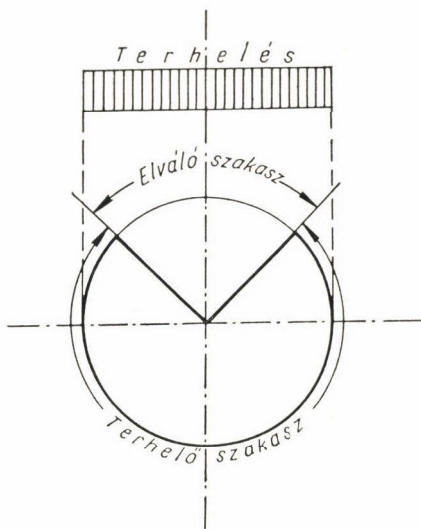
Az ágyazási együttható azonban a talajnak nem fizikai sajátossága, mert függ pl. a terhelő test alakjától, nagyságától és a terheléstől is. Alkalmazása egy sor tényező szubjektív értékelésén múlik. Az ágyazási együtthatóval dolgozó számítási eljárások kiküszöbölésére és a rugalmas ágyazásnak a talaj fizikai jellemzői (E rugalmassági modulus és μ Poisson-féle tényező) alapján való figyelembevételére Sz. A. Orlov [5] új eljárást dolgozott ki. Az új eljárás lényege az, hogy a Winkler-féle hipotézis helyett az elméleti rugalmasságtan módszerével vizsgálja végtelen térben kialakított r sugarú kör alakú kivágás mentén fellépő alakváltozási viszonyokat. Vagyis abból a feltevésből indult ki, hogy:

a) az alagútfalazatot környező talaj (kőzet) homogén, izotrop és tökéletesen rugalmas.

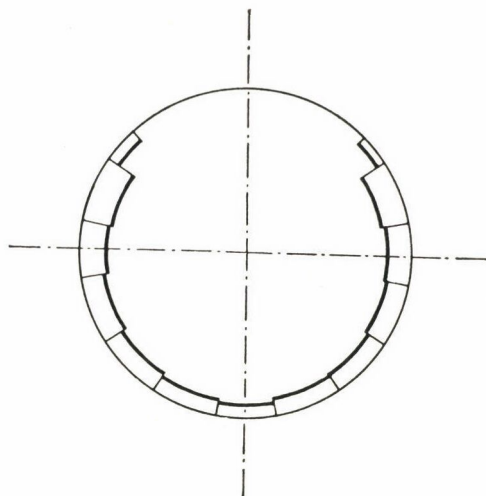
b) az alagút a térszinttől mérve oly mélyen fekszik, hogy az alagutat környező talaj (kőzet) minden irányban végtelen kiterjedésűnek tekinthető.

c) az alagút terhelési állapota valamennyi keresztmetszetben azonos és mivel a körkivágás síkjára merőleges alakváltozás nem lehetséges, tehát a feladat síkbeli alakváltozási állapotként vizsgálандó.

Sz. A. Orlov a megoldást Fourier-sor alakjában adta meg. Az általa közölt megoldás gyakorlati alkalmazása azonban nehézségekbe ütközhet a Fourier-



1. ábra



2. ábra

sor lassú konvergenciája miatt. A szerzők az alábbiakban egy olyan eljárást dolgoztak ki, mely a feladat zárt alakban történő megoldását szolgáltatja. Ezzel a gyűrű környezetében fellépő feszültségeket és alakváltozásokat zárt alakban előállították, és így Fourier-sor helyett véges formulát adtak. Ez utóbbi egyben a bevezetőben felvetett problémát is kielégíti, ugyanis az alagútról a kőzetre átadódó ágyazási nyomás szakaszonként egyenletesen megoszló terhelések szuperpozíciójával, azaz lépcsős ábrával közelíthető meg. (2. ábra.)

2. Alapösszefüggések

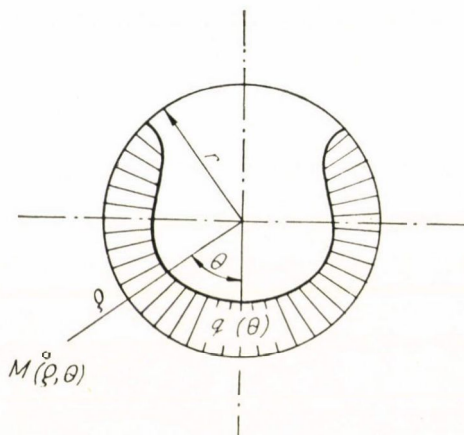
Hasson a végtelen térben r sugarú kör alakú kivágás mentén tetszőleges, a függőleges tengelyhez szimmetrikus, radiális terhelés. (3. ábra.) Ez megadható az alábbi Fourier-sorral.

$$q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \theta. \quad (1)$$

Vizsgáljuk a sík pontjaiban a $q(\theta)$ terhelés hatására keletkező feszültségeket és elmozdulásokat. Mint az irodalomból ismeretes [4], [5], a feszültségfüggvény ilyen esetben a következő alakban kereshető:

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho\theta) = & b_0 r^2 \ln\left(\frac{\varrho}{r}\right) + b_1 r \varrho \sin \theta + b'_1 r \varrho \ln\left(\frac{\varrho}{r}\right) \cos \theta + d_1 r^3 \varrho^{-1} \cos \theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n r^n \varrho^{-n+2} + d_n r^{n+2} \varrho^{-n}) \cos n \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

ahol b_0 b_1 b'_1 d_1 b_n d_n állandók. A $\varphi(\varrho\theta)$ függvény ismeretében a σ_ϱ radiális



3. ábra

feszültség, σ_θ tangenciális feszültség és a τ nyírófeszültség az (3), (4), (5) rugalmasságtani alapösszefüggésekkel határozható meg:

$$\sigma_\varrho = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2}, \quad (4)$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (5)$$

A fenti komponensek ki kell elégítsék az

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_\varrho + \sigma_\theta) = 0 \quad (6)$$

összeférhetőségi egyenletet és az alábbi kerületi feltételeket:

1. $\varrho = r$ helyeken a radiális feszültség magával a terheléssel egyenlő. $\varrho = \infty$ helyeken pedig a radiális terhelésnek zérussal kell egyenlőnek lennie, azaz

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= -q(\theta) \\ \sigma_r(\infty, \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2. $\varrho = \infty$ helyeken a tangenciális feszültség zérussal egyenlő, tehát

$$\sigma_\theta(\infty, \theta) = 0 \quad (8)$$

3. $\varrho = r$ és $\varrho = \infty$ helyeken csúsztatófeszültség nem keletkezik, és így

$$\left. \begin{aligned} \tau(r, \theta) &= 0 \\ \tau(\infty, \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

A rugalmasságtan fizikai egyenleteinek segítségével a feszültségek és az alakváltozások közötti összefüggést megállapíthatjuk. Ehhez az általánosított Hooke-törvényt használjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\mu}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\mu}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1+\mu}{E} [2\tau], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ahol E a rugalmassági modulus és μ Poisson-féle tényező. A sík pontjainak elmozdulását, illetve az elmozdulás radiális u és tangenciális v komponenseit a Cauchy-féle differenciálegyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right). \quad (12)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \quad (13)$$

Az u és v ismeretében pedig meghatározható a szóban forgó alagútfalazatok által átadódó erőhatás következtében kialakuló elmozdulás.

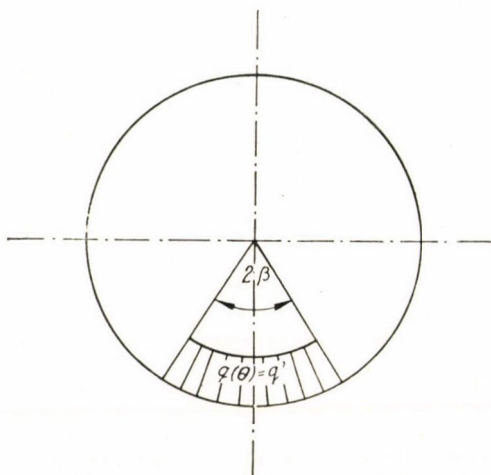
3. A feladat megoldása szakaszonként egyenletesen megoszló terhelés esetén zárt alakban

Vizsgáljuk a továbbiakban a térben r sugarú kör alakú kivágás mentén ható, a függőleges tengelyre szimmetrikus, konstans radiális terhelés esetét. (4. ábra.)

A (7) (8) (9)-ben felírt peremfeltételek ez esetben értelemszerűen az alábbiak lesznek:

$$\sigma_{\varrho}(r, \theta) = \begin{cases} -q', & \text{ha } \theta < \beta, \\ 0, & \text{ha } \theta > \beta, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\varrho}(\infty \theta) = 0; & \tau(r \theta) = 0; \\ \sigma_{\theta}(\infty \theta) = 0; & \tau(\infty \theta) = 0, \end{cases} \quad (15)$$



4. ábra

Sz. A. Orlov eredményeinek felhasználásával a (2)-ben szereplő állandók esetünkben a következő értékeket vesszük fel:

$$b_0 = -\frac{q'}{\pi} \beta; \quad b'_1 = \frac{q'}{\pi} \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \sin \beta;$$

$$b_1 = -\frac{q'}{\pi} \sin \beta; \quad d'_1 = \frac{q'}{\pi} \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \sin \beta;$$

$$b_n = \frac{q'}{\pi} \frac{\sin n \beta}{n(n-1)}; \quad d'_n = -\frac{q'}{\pi} \frac{\sin n \beta}{n(n+1)}.$$

Ezek behelyettesítésével az alkalmazott $\varphi(\varrho\theta)$ feszültségfüggvény így írható fel:

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho\theta) = & \frac{q'}{\pi} \left\{ -r^2 \beta \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) + \right. \\ & + \left(-r \varrho \theta \sin \theta + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} r \varrho \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) \cos \theta + \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{r^3}{\varrho} \cos \theta \right) \sin \beta + \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(r^n \varrho^{-(n-2)} \frac{\sin n \beta \cos n \theta}{n(n-1)} - r^{n+2} \varrho^{-n} \frac{\sin n \beta \cos n \theta}{n(n+1)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

A feszültség-függvényt tehát zárt alakú kifejezések és végtelen sor alkotja. Minthogy mi a $\varphi(\varrho\theta)$ függvényt zárt alakban keressük, meg kell határoznunk a függvényben szereplő végtelen sor összegét. Ennek érdekében vizsgáljuk meg a (17)-ben felírt speciális Fourier-sorokat:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin n \beta \cos n \theta; & S_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin n \beta \sin n \theta \\ C_{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \theta}{n-1}; & S_{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \theta}{n-1} \\ C_n &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \theta}{n}; & S_n &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \theta}{n} \\ C_{n+1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \theta}{n+1}; & S_{n+1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \theta}{n+1} \\ C_{(n-1)n} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \theta}{(n-1)n}; & S_{(n-1)n} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \theta}{(n-1)n} \\ C_{n(n+1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \theta}{n(n+1)}; & S_{n(n+1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \theta}{n(n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Állítjuk és a továbbiakban bizonyítjuk, hogy a fenti végtelen sorok összege az alábbi összegezési képletek segítségével zárt alakban állítható elő [6]

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos nz = \frac{1}{2} \left[\frac{1-R^2}{1-2R \cos z + R^2} - 1 \right], \quad \text{ha } |R| < 1 \\ \bar{c}_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n} = \left[\ln \frac{1}{\sqrt{1-2R \cos z + R^2}} \right], \quad \text{ha } \begin{cases} 0 < z < 2\pi \\ R^2 \leq 1 \end{cases} \\ \bar{s}_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \sin nz = \left[\frac{R \sin z}{1-2R \cos z + R^2} \right], \quad \text{ha } |R| < 1 \\ \bar{s}_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n} = \left[\operatorname{arctg} \frac{R \sin z}{1-R \cos z} \right], \quad \text{ha } \begin{cases} 0 < z < 2\pi \\ R^2 \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

illetve $R = 1$ esetében

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n} = -\frac{1}{2} \ln \left(2 \sin \frac{z}{2} \right)^2, \quad \text{ha } -\pi < z < \pi \\ s_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} = \begin{cases} -\frac{z-\pi}{2}, & \text{ha } 0 < z < \pi \\ -\frac{z+\pi}{2}, & \text{ha } -\pi < z < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

Bizonyításunk első lépéseként könnyen belátható, hogy

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

és az

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

összefüggések felhasználásával a (17) képletcsoport utolsó két sorában felírt képletek az ezt megelőzőekkel kifejezhetők a következőképpen:

$$\left. \begin{aligned} C_{(n-1)n} &= C_{n-1} - C_n \quad \text{és} \quad S_{(n-1)n} = S_{n-1} - S_n, \\ C_{n(n+1)} &= C_n - C_{n+1} \quad \text{és} \quad S_{n(n+1)} = S_n - S_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

A továbbiakban tehát csak a (17) első négy sorában levő kifejezésekkel kell foglalkoznunk.

Alkalmazva a

$$\sin n\beta \cos n\theta = \frac{1}{2} [\sin n(\theta + \beta) - \sin n(\theta - \beta)]$$

$$\sin n\beta \sin n\theta = \frac{1}{2} [\cos n(\theta - \beta) - \cos n(\theta + \beta)]$$

elemi képleteket, továbbá bevezetve a

$$(\theta + \beta) = y; \quad (\theta - \beta) = x$$

jelöléseket, akkor

$$\left. \begin{aligned} \sin n\beta \cos n\theta &= \frac{1}{2} [\sin ny - \sin nx], \\ \sin n\beta \sin n\theta &= \frac{1}{2} [\cos nx - \cos ny] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

összefüggéshez jutunk.

A (20)-nak (17)-be történő helyettesítése után azonnal beláthatjuk, hogy a vizsgált kifejezések az x és y változóktól eltekintve azonos alakú szummákra bonthatók. Az x és y változókat az írásmunka egyszerűsítése céljából közös jellel, z -vel jelölve, elegendő a következőkben tehát csak a (21) alatti szummákat vizsgálnunk.

$$\left. \begin{aligned} c_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \cos nz; & s_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin nz; \\ c_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n-1}, & s_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n-1}; \\ c_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n}, & s_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n}; \\ c_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n+1}; & s_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

A (18) felhasználásával azonban nyilvánvaló, hogy a $c_1(z)$, $c_n(z)$ illetve $s_1(z)$ és $s_n(z)$ zárt alakú előállításra következő:

$$\left. \begin{aligned} c_1(z) &= \bar{c}_1(z) - R \cos z; & s_1(z) &= \bar{s}_1(z) - R \sin z; \\ c_n(z) &= \bar{c}_n(z) - R \cos z; & s_n(z) &= \bar{s}_n(z) - R \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} c_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} R^{n+1} \frac{\cos(n+1)z}{n} = \\ &= R \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\cos nz}{n} \cos z - \frac{\sin nz}{n} \sin z \right], \end{aligned}$$

és a

$$\begin{aligned} c_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} R^{n-1} \frac{\cos(n-1)z}{n} = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=3}^{\infty} R^n \frac{\cos(n-1)z}{n} = \frac{1}{R} \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\cos(n-1)z}{n} - \left(R + R^2 \frac{\cos z}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\cos nz}{n} \cos z + \frac{\sin nz}{n} \sin z \right] - \left[\frac{R}{2} \cos z + 1 \right]. \end{aligned}$$

Tehát

$$\left. \begin{aligned} c_{n-1}(z) &= R \left[c_n(z) \cos z - \bar{s}_n(z) \sin z \right], \\ c_{n+1}(z) &= \frac{1}{R} \left[\bar{c}_n(z) \cos z + \bar{s}_n(z) \sin z \right] - \left[\frac{R}{2} \cos z + 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Végül

$$\begin{aligned} s_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} R^{n+1} \frac{\sin(n+1)z}{n} = \\ &= R \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\sin nz}{n} \cos z + \frac{\cos nz}{n} \sin z \right], \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} s_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} R^{n-1} \frac{\sin(n-1)z}{n} = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=3}^{\infty} R^n \frac{\sin(n-1)z}{n} = \frac{1}{R} \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\sin(n-1)z}{n} - R^2 \frac{\sin z}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\sin nz}{n} \cos z - \frac{\cos nz}{n} \sin z \right] - \left[\frac{R}{2} \sin z \right]. \end{aligned}$$

Tehát

$$\left. \begin{aligned} s_{n-1}(z) &= R \left[\bar{s}_n(z) \cos z + \bar{c}_n(z) \sin z \right] \\ s_{n+1}(z) &= \frac{1}{R} \left[\bar{s}_n(z) \cos z - \bar{c}_n(z) \sin z \right] - \left[\frac{R}{2} \sin z \right] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Ezek után a (17)-ben felírt Fourier-sorok összege a (21) (22) (23) és (24) alapján tehát a következő:

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2} [s_1(y) - s_1(x)] = \frac{1}{2} [\bar{s}_1(y) - \bar{s}_1(x) - R(\sin y - \sin x)], \\
 C_{n-1} &= \frac{1}{2} [s_{n-1}(y) - s_{n-1}(x)] = \frac{R}{2} [(\bar{s}_n(y) \cos y - \bar{s}_n(x) \cos x) + \\
 &\quad + (\bar{c}_n(y) \sin y - \bar{c}_n(x) \sin x)], \\
 C_n &= \frac{1}{2} [s_n(y) - s_n(x)] = \frac{1}{2} [\bar{s}_n(y) - \bar{s}_n(x) - R(\sin y - \sin x)], \\
 C_{n+1} &= \frac{1}{2} [s_{n+1}(y) - s_{n+1}(x)] = \frac{1}{2R} [(\bar{s}_n(y) \cos y - \bar{s}_n(x) \cos x) - \\
 &\quad - (\bar{c}_n(y) \sin y - \bar{c}_n(x) \sin x)] - \frac{R}{4} [\sin y - \sin x], \\
 S_1 &= \frac{1}{2} [c_1(x) - c_1(y)] = \frac{1}{2} [\bar{c}_1(x) - \bar{c}_1(y) - R(\cos x - \cos y)], \\
 S_{n-1} &= \frac{1}{2} [c_{n-1}(x) - c_{n-1}(y)] = \frac{R}{2} [(\bar{c}_n(x) \cos x - \bar{c}_n(y) \cos y) - \\
 &\quad - (\bar{s}_n(x) \sin x - \bar{s}_n(y) \sin y)], \\
 S_n &= \frac{1}{2} [c_n(x) - c_n(y)] = \frac{1}{2} [\bar{c}_n(x) - \bar{c}_n(y) - R(\cos x - \cos y)], \\
 S_{n+1} &= \frac{1}{2} [c_{n+1}(x) - c_{n+1}(y)] = \frac{1}{2R} [(\bar{c}_n(x) \cos x - \bar{c}_n(y) \cos y) + \\
 &\quad + (\bar{s}_n(x) \sin x - \bar{s}_n(y) \sin y)] - \frac{R}{4} [\cos x - \cos y].
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ezek ismeretében nem okoz nehézséget a (16)-ban felírt $\varphi(\varrho\theta)$ függvény zárt alakban történő felírása sem, mert, ha a továbbiakban bevezetjük az $R = \frac{r}{\varrho}$ jelölést, akkor

$$\begin{aligned}
 \varphi(\varrho, \theta) = \frac{\varrho'}{\pi} \bigg\{ &-r^2 \beta \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) + \left(-r \varrho \theta \sin \theta + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} r \varrho \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) \cos \theta + \right. \\
 &\left. + \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{r^3}{\varrho} \cos \theta \right) \sin \beta + \varrho^2 C_{n(n-1)} - r^2 C_{n(n+1)} \bigg\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Ily módon a fentebb alkalmazott összefüggések segítségével a feszültségfüggvényt sikerült zárt alakra hozni.

A feszültségfüggvény felhasználásával meghatározhatjuk a σ_ϱ , σ_θ és τ zárt alakját is. A műveletek elvégzése után megkapjuk a feszültségek értékeit:

$$\sigma_\varrho = \frac{q'}{\pi} \left\{ R \left[-R\beta + \left(\frac{1-R^2}{2} \cdot \frac{1-2\mu}{1-\mu} - 2 \right) \sin \beta \cos \theta \right] - [(1-R^2)C_1 + 2C_n] \right\}, \quad (27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{q'}{\pi} \left\{ R \left[R\beta + \left(\frac{1+R^2}{2} \cdot \frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \sin \beta \cos \theta \right] + [(1-R^2)C_1 - 2C_n] \right\}, \quad (28)$$

$$\tau = \frac{q'}{\pi} (1-R^2) \left\{ \frac{R}{2} \left(\frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \sin \beta \cos \theta - S_1 \right\}, \quad (29)$$

Illetve

$$\sigma_\varrho + \sigma_\theta = \frac{q'}{\pi} \left\{ R \frac{\sin \beta \cos \theta}{\mu - 1} - 4C_n \right\}. \quad (30)$$

A σ_ϱ , σ_θ és τ függvények kielégítik (14) (15) kerületi feltételeket.

A (14)-ben megadott kerületi feltételek teljesüléséről a (18a) és (25) felhasználásával könnyen meggyőződhetünk, mivel ebben az esetben $\varrho = r$, illetve $R = 1$ tehát

$$\sigma_\varrho(r, \theta) = \begin{cases} \frac{q'}{\pi} \left\{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \theta - \left[\frac{\pi - y}{2} + \frac{x - \pi}{2} - (\sin y - \sin x) \right] \right\}, & \text{ha } x > 0, \\ \frac{q'}{\pi} \left\{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \theta - \left[\frac{\pi - y}{2} + \frac{x + \pi}{2} - (\sin y - \sin x) \right] \right\}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

ahol

$$y = (\theta + \beta); \quad x = (\theta - \beta).$$

A műveletek elvégzése után

$$\sigma_\varrho(r, \theta) = \begin{cases} \frac{q'}{\pi} \left\{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \theta + \beta + (\sin(\beta - \theta) + \sin(\beta + \theta)) \right\} = 0, & \text{ha } \beta < \theta \\ \frac{q'}{\pi} \left\{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \theta - \pi + \beta + (\sin(\beta - \theta) + \sin(\beta + \theta)) \right\} = -q' & \text{ha } \beta > \theta \end{cases}$$

A (15)-ben megadott feltételek teljesülése rögtön belátható, ha figyelembe vesszük, hogy

$$\varrho = \infty \text{ esetén } R = 0 \text{ tehát } C_1 = C_n = S_1 = 0$$

$$\varrho = r \text{ esetén } R = 1 \text{ tehát } (1-R^2) = 0$$

A sík pontjainak ε_ϱ ; ε_θ ; $\varepsilon_{\varrho\theta}$ alakváltozási jellemzőket a (27), (28), (29), (30) függvényeknek (10)-be való behelyettesítésével kapjuk meg:

$$\varepsilon_\varrho = \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ R \left[R\beta + \frac{1}{2(1-\mu)} ((3-4\mu) + (1-2\mu)R^2) \sin \beta \cos \theta \right] + (1-R^2)C_1 + 2(1-2\mu)C_n \right\}, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ R \left[R\beta + \frac{1}{2(1-\mu)} (1 + (1-2\mu)R^2) \sin\beta \cos\theta \right] + \right. \\ \left. + (1-R^2)C_1 - 2(1-2\mu)C_n \right\}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_{\varrho\theta} = \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} (1-R^2) \left\{ R \left(\frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \sin\beta \sin\theta - 2S_1 \right\}. \quad (33)$$

A sík pontjainak u , v elmozdulás-függvényei (31), (32), (33) ismeretében a (11), (12) Cauchy-féle differenciál-egyenletrendszer megoldásának eredményeként adódnak.

$$u = \int \varepsilon_{\varrho} d\varrho + f_1(\theta) = \\ = \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ r \left[R\beta + \frac{1}{2(1-\mu)} \left(\frac{1-2\mu}{2} R^2 - (3-4\mu) \ln \varrho \right) \sin\beta \cos\theta \right] + \right. \\ \left. + (3-4\mu)\varrho C_{n-1} - 2(1-2\mu)\varrho C_n - r R C_{n+1} \right\} + f_1(\theta), \quad (34)$$

$$v = \int (\varrho \varepsilon_{\theta} - u) d\theta + f_2(\varrho) = \\ = \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ r \left[\frac{1}{2(1-\mu)} \left(\frac{1-2\mu}{2} R^2 + (3-4\mu) \ln \varrho + 1 \right) \sin\beta \sin\theta \right] - \right. \\ \left. - (3-4\mu)\varrho S_{n-1} + 4(1-\mu)\varrho S_n - r R S_{n+1} \right\} - \int f_1(\theta) d\theta + f_2(\varrho), \quad (35)$$

ahol $f_1(\theta)$ és $f_2(\varrho)$ integrálási függvények.

Továbbá a (13) alapján

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} (1-R^2) \left\{ \frac{1-2\mu}{1-\mu} R \sin\beta \sin\theta - 2S_1 \right\} + \frac{1}{\varrho} \left(\int f_1(\theta) d\theta + f_1'(\theta) \right) + \\ + f_2'(\varrho) - \frac{1}{\varrho} f_2(\varrho), \quad (36)$$

Az u és v függvényekben szereplő $f_1(\theta)$ illetve $f_2(\varrho)$ integrálási függvények meghatározása céljából hasonlítsuk össze $\varepsilon_{\theta\theta}$ (33) és (36)-ban megadott alakját. Az összehasonlításból következik, hogy

$$\frac{1}{\varrho} \left(\int f_1(\theta) d\theta + f_1'(\theta) \right) + f_2'(\varrho) - \frac{1}{\varrho} f_2(\varrho) = 0. \quad (37)$$

Ha a (37) egyenletet ϱ -val megszorozzuk, és először θ , majd ϱ szerint differenciáljuk, akkor az

$$f_1''(\theta) + f_1(\theta) = 0, \quad (38)$$

$$\varrho f_2''(\varrho) = 0, \quad (39)$$

differenciál-egyenleteket nyerjük, ahol (38) és (39) megoldása megadja az integrálási függvényeket:

$$f_1(\theta) = K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta,$$

és

$$f_2(\varrho) = K_3 \varrho + K_4.$$

Ha $f_1(\theta)$ és $f_2(\varrho)$ meghatározott értékeit u és v (34) illetve (35) alakjába beírjuk, akkor

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ r \left[R\beta + \frac{1}{2(1-\mu)} \left(\frac{1-2\mu}{2} R^2 - (3-4\mu) \ln \varrho \right) \sin \beta \cos \theta \right] + \right. \\ &\quad \left. + (3-4\mu) \varrho C_{n-1} - 2(1-2\mu) \varrho C_n - r R C_{n+1} \right\} + K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta, \\ v &= \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ r \left[\frac{1}{2(1-\mu)} \left(\frac{1-2\mu}{2} R^2 + (3-4\mu) \ln \varrho + 1 \right) \sin \beta \sin \theta \right] - \right. \\ &\quad \left. - (3-4\mu) \varrho S_{n-1} + 4(1-\mu) \varrho S_n - r R S_{n+1} \right\} - K_1 \sin \theta + K_2 \cos \theta + K_3 \varrho + K_4. \end{aligned}$$

Minthogy a $q(\theta)$ terhelésfüggvényt a függőleges tengelyre szimmetrikusan vesszük fel, kell hogy

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0,$$

és a $\theta = 0$ helyen

$$v(\varrho\theta) = 0$$

teljesüljenek. Ez pedig csak úgy állhat fenn, ha

$$K_2 = 0,$$

$$K_3 \varrho + K_4 = 0.$$

Tehát

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} r \beta R + \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ \frac{r}{2(1-\mu)} \left[\frac{1-2\mu}{2} R^2 - (3-4\mu) \varrho \ln \varrho + K_1 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \beta \cos \theta + (3-4\mu) C_{n-1} - 2(1-2\mu) \varrho C_n - r R C_{n+1} \right\}, \\ v &= \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \cdot \frac{r[(1-2\mu)R^2+1]}{2(1-\mu)} \sin \beta \sin \theta - \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ \frac{r}{2(1-\mu)} \left[\frac{1-2\mu}{2} R^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (3-4\mu) \ln \varrho + K_1 \right] \sin \beta \sin \theta - (3-4\mu) \varrho S_{n-1} + 4(1-\mu) \varrho S_n - r R S_{n+1} \right\}. \end{aligned}$$

Ha az elmozdulásokat valamilyen $\varrho = \text{constans}$ sugarú körök mentén vizsgáljuk, láthatjuk, hogy a körvonal minden pontja egyrészt merev testszerű Z másrészt u_0 , v_0 relatív elmozdulást végez. A kör középpontja ugyanis

$$Z = - \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ \frac{r}{2(1-\mu)} \left[\frac{1-2\mu}{2} R^2 - (3-4\mu) \ln \varrho + K_1 \right] \sin \beta \right\}$$

értékkel a terhelés eredője irányába eltolódik. A terheletlen állapotban felvett $\varrho = \text{constans}$ sugarú körhöz képest pedig az alábbi relatív elmozdulások keletkeznek:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ r R \beta + (3-4\mu)\varrho C_{n-1} - 2(1-2\mu)\varrho C_n - r R C_{n+1} \right\}, \\ v_0 &= \frac{(1+\mu)q'}{E\pi} \left\{ \frac{r[(1-2\mu)R^2+1]}{2(1-\mu)} \sin \beta \sin \theta - (3-4\mu)\varrho S_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + 4(1-\mu)\varrho S_n - r R S_{n+1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Ha az alagút tengelyvonala és a térszint vízszintes, akkor a $\varrho = r$ sugarú nyílásnak merev testszerű elmozdulása semmiféle kapcsolatban nincsen a benne elhelyezett szerkezet erőjatekával. Ezért a szóban forgó merev testszerű elmozdulás figyelmen kívül hagyható, és elégséges a továbbiakban csak a relatív elmozdulásokkal foglalkoznunk.

4. Elmozdulási hatásábrák

Vizsgáljuk meg röviden a relatív elmozdulásoknak azt a speciális esetét, midőn a körkivágás mentén P koncentrált erő hat, vagyis a (40) összefüggésekbe:

$$q' = \frac{P}{2r\beta}, \quad \text{ahol } \beta \rightarrow 0$$

írva, az u_0 és v_0 értékei az alábbiak lesznek:

$$\begin{aligned} u_0 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{(1+\mu)P}{2ER\pi} \left\{ R^2 + (3-4\mu)\frac{C_{n-1}}{\beta} - 2(1-2\mu)\frac{C_n}{\beta} - R^2\frac{C_{n+1}}{\beta} \right\}, \\ v_0 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{(1+\mu)P}{2ER\pi} \left\{ \frac{R[(1-2\mu)R^2+1]}{2(1-\mu)} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \sin \theta - (3-4\mu)\frac{S_{n-1}}{\beta} + \right. \\ &\quad \left. + 4(1-\mu)\frac{S_n}{\beta} - R^2\frac{S_{n+1}}{\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Ismeretes, hogy

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin n\beta}{\beta} = n.$$

Így a (22) (23) és (24) felhasználásával

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C_{n-1}}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n\beta}{\beta} \frac{\cos n\theta}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{n}{n-1} \cos n\theta = c_1(\theta) + c_{n-1}(\theta).$$

Ugyanígy

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C_n}{\beta} = c_1(\theta),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C_{n+1}}{\beta} = c_1(\theta) - c_{n+1}(\theta),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{S_{n-1}}{\beta} = s_1(\theta) + s_{n-1}(\theta),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{S_n}{\beta} = s_1(\theta),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{S_{n+1}}{\beta} = s_1(\theta) - s_{n+1}(\theta).$$

Tehát

$$u_0 = \frac{(1 + \mu)P}{2ER\pi} \{R^2 + (1 - R^2)c_1(\theta) + (3 - 4\mu)c_{n-1}(\theta) + R^2c_{n+1}(\theta)\},$$

$$v_0 = \frac{(1 + \mu)P}{2ER\pi} \left\{ \frac{R[(1 - 2\mu)R^2 + 1]}{2(1 - \mu)} \sin \theta + (1 - R^2)s_1(\theta) - \right. \\ \left. - (3 - 4\mu)s_{n-1}(\theta) + R^2s_{n+1}(\theta) \right\}.$$

A mérnöki gyakorlat számára elsősorban a kör alakú kivágás kerülete mentén fellépő relatív elmozdulások értékei fontosak. Tehát bennünket elsősorban az u_0 ; v_0 függvényeknek a $\varrho = r$, illetve $R = 1$ helyen felvett értékei érdekelnek. Ezek viszont a (18a) és (25) felhasználásával következő véges alakban írhatók fel:

$2r\beta$ ívszakaszon egyenletesen megoszló terhelés esetében:

$$u_0|_{\varrho=r} = \frac{(1 + \mu)q'r}{E\pi} \left\{ \beta + (1 - 2\mu) \left[(y - \pi) \sin^2 \frac{y}{2} - \xi \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \right] - \right. \\ \left. - (1 - \mu) \left[(\sin y) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 - (\sin x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 \right] + \frac{5 - 8\mu}{4} [\sin y - \sin x] \right\}, \quad (41)$$

$$v_0|_{\varrho=r} = \frac{(1 + \mu)q'r}{E\pi} \left\{ \sin \beta \sin \theta - 2(1 - \mu) \left[\left(\sin^2 \frac{x}{2} \right) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\sin^2 \frac{y}{2} \right) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 \right] - \frac{1 - 2\mu}{2} [\xi \sin x - (y - \pi) \sin y] - \right. \\ \left. - \frac{7 - 8\mu}{4} [\cos x - \cos y] \right\}, \quad (42)$$

ahol

$$\xi = \begin{cases} (x - \pi) & \text{ha } x > 0, \\ (x + \pi) & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

és

$$y = (\theta + \beta); \quad x = (\theta - \beta).$$

Továbbá (18a) (23) és (24) felhasználásával P koncentrált terhelés esetében

$$u_0|_{e=r} = -\frac{(1+\mu)P}{2E\pi} \left\{ \left[2(1-\mu) \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \cos \theta + (1-2\mu)(\pi - \theta) \sin \theta \right\}, \quad (43)$$

$$v_0|_{e=r} = \frac{(1+\mu)P}{2E\pi} \left\{ \left[2(1-\mu) \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \sin \theta + (1-2\mu)(\pi - \theta) \cos \theta \right\}. \quad (44)$$

Az elmozdulások hatásábraszerű alkalmazása érdekében vizsgáljuk meg a $2r\beta$ ívhosszon egységnyi eredőjű egyenletesen megoszló terhelés, vagyis $q = \frac{1}{2r\beta}$ hatására fellépő elmozdulásokat. A (41), (42) kifejezésekbe behelyettesítve kapjuk

$$\eta = u_0|_{e=r} = \frac{(1+\mu)}{2E\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-2\mu) \left((y-\pi) \sin^2 \frac{y}{2} - \xi \sin^2 \frac{x}{2} \right) - (1-\mu) \left((\sin y) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 - (\sin x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 \right) + \frac{5-8\mu}{4} (\sin y - \sin x) \right] \right\}, \quad (45)$$

$$\zeta = v_0|_{e=r} = \frac{(1+\mu)}{2E\pi} \left\{ \frac{\sin \beta}{\beta} \sin \theta - \frac{1}{\beta} \left[2(1-\mu) \left(\left(\sin^2 \frac{x}{2} \right) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 - \left(\sin^2 \frac{y}{2} \right) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 \right) + \frac{1-2\mu}{2} (\xi \sin x - (y-\pi) \sin y) + \frac{7-8\mu}{4} (\cos x - \cos y) \right] \right\}, \quad (46)$$

ahol

$$\xi = \begin{cases} (x - \pi) & \text{ha } x > 0 \\ (x + \pi) & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

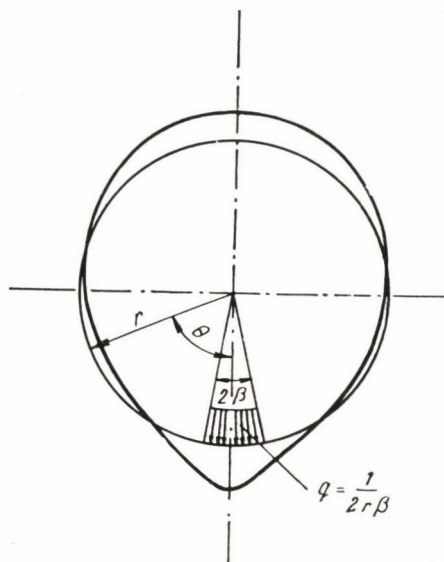
és

$$y = (\theta + \beta); \quad x = (\theta - \beta)$$

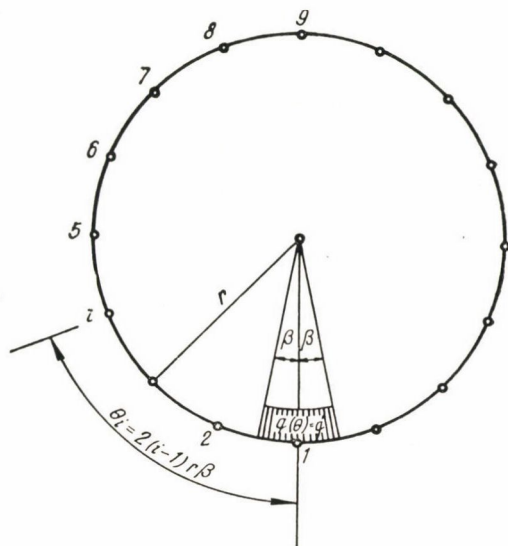
A fenti képletek alapján számított elmozdulási ábrákat (5. ábra) kör alakú kivágás tetszőleges pontjához tartozó speciális hatásábráknak tekinthetjük.

Az alábbiakban kiszámítottuk az η értékeit a $\beta = 11^\circ 30'$ és $\mu = 0,3$ értékeknél a körívnek a 6. ábrában feltüntetett osztáspontjaiban.

A szerzők által levezetett zárt alakú kifejezés értékeit az alábbi táblázatban összehasonlítottuk az [5] irodalomban közölt Fourier-sorral számított értékekkel.



5. ábra



6. ábra

A táblázatból látható, hogy még 64 Fourier-tag figyelembevétele mellett is jelentős eltérések vannak a pontos értékekhez képest. A Fourier-sorral kapott értékek a pontos érték alatt és felett ingadoznak.

5. Alkalmazás alagútfalazatok gyakorlati számítására

Az (1) táblázat alkalmas arra is, hogy 16-szögű sokszöggel megközelített rugalmasan ágyazott kör alakú alagútfalazatok számításánál az ágyazási együtthatót kiküszöbölve az alagútfalazatot körülvevő közet fizikai jellemzői (E , μ) segítségével méretezzünk. A törzstartót ilyen esetben úgy foghatjuk fel, mint rugalmas rudakkal megtámasztott csuklós rúdlánra támaszkodó háromcsuklós ívet. (7. ábra.)

Az erőmódszer szerint megoldva a kanonikus egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_{11} M_1 + a_{13} M_3 + a_{14} M_4 + \dots + a_{19} M_9 + a_{10} &= 0 \\ a_{31} M_1 + a_{33} M_3 + a_{34} M_4 + \dots + a_{39} M_9 + a_{30} &= 0 \\ \vdots & \\ a_{91} M_1 + a_{93} M_3 + a_{94} M_4 + \dots + a_{99} M_9 + a_{90} &= 0 \end{aligned}$$

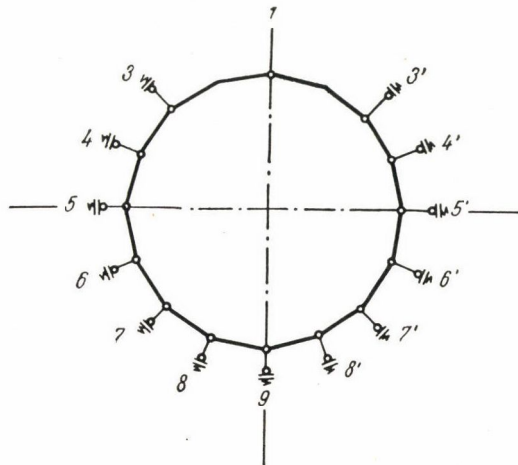
θ		0°	$22^\circ 30'$	45°	$67^\circ 30'$	90°	$112^\circ 30'$	135°	$157^\circ 30'$	180°
η_i		η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9
η közelítő értékei a sor „ n ” tagjának figyelembevétele mellett	$n = 8$	+1,31	+0,39	—0,08	—0,22	—0,11	+0,04	+0,30	+0,42	+0,52
	$n = 16$	+1,43	+0,34	—0,09	—0,21	—0,13	+0,06	+0,28	+0,44	+0,50
	$n = 32$	+1,37	+0,36	—0,09	—0,20	—0,12	+0,06	+0,28	+0,44	+0,50
	$n = 64$	+1,38	+0,35	—0,09	—0,20	—0,12	+0,06	+0,28	+0,44	+0,50
η pontos értékei		+1,3873	+0,3517	—0,0892	—0,2052	—0,1117	+0,0636	+0,2766	+0,4389	+0,5000

1. táblázat

Az egyenletrendszer koefficiensei a szerkezet $E_1 J$ konstans jellemzői esetén

$$(a_{ik}) = \int M_i M_k ds + \frac{J}{F} \sum N_i N_k + E_1 J \sum u_i R_k$$

Különös figyelmet az utolsó tagnak kell szentelnünk. Ez a tag fejezi ki az ágyazás munkáját. R -rel jelöltük a kerület mentén ható támaszerőket, u val pedig a megfelelő elmozdulásokat.



7. ábra

Az u_1 értékeket könnyen meghatározhatjuk, ha ismerjük az 1. táblázatban foglalt, egységnyi erő hatására fellépő alakváltozási ordinátákat s így

$$u_i = \sum R_i \eta_i.$$

Az általunk vizsgált tizenhatszög esetén az U_i értékeket az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$\begin{aligned} u_3 &= (\eta_1 + \eta_5) R_3 + (\eta_2 + \eta_6) R_4 + \dots + (\eta_6 + \eta_8) R_8 + \eta_7 \cdot R_9 \\ u_4 &= (\eta_2 + \eta_6) R_3 + (\eta_1 + \eta_7) R_4 + \dots + (\eta_5 + \eta_7) R_8 + \eta_6 \cdot R_9 \\ u_5 &= (\eta_3 + \eta_7) R_3 + (\eta_2 + \eta_8) R_4 + \dots + (\eta_4 + \eta_6) R_8 + \eta_5 \cdot R_9 \\ u_6 &= (\eta_4 + \eta_8) R_3 + (\eta_3 + \eta_9) R_4 + \dots + (\eta_3 + \eta_5) R_8 + \eta_4 \cdot R_9 \\ u_7 &= (\eta_5 + \eta_9) R_3 + (\eta_4 + \eta_8) R_4 + \dots + (\eta_2 + \eta_4) R_8 + \eta_3 \cdot R_9 \\ u_8 &= (\eta_6 + \eta_8) R_3 + (\eta_5 + \eta_7) R_4 + \dots + (\eta_1 + \eta_3) R_8 + \eta_2 \cdot R_9 \\ u_9 &= (\eta_7 + \eta_7) R_3 + (\eta_6 + \eta_6) R_4 + \dots + (\eta_2 + \eta_2) R_8 + \eta_1 \cdot R_9 \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy az előbbi összefüggések mátrix alakban a következőképpen írhatók fel:

$$u \cdot H \cdot r$$

ahol

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix}$$

Az elmozdulások és a reakcióerők oszlopmátrixát és

$$\mathbf{H} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} (\eta_1 + \eta_5)(\eta_2 + \eta_6) \dots (\eta_6 + \eta_8) \eta_7 \\ (\eta_2 + \eta_6)(\eta_1 + \eta_7) \dots (\eta_5 + \eta_7) \eta_6 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ (\eta_6 + \eta_8)(\eta_5 + \eta_7) \dots (\eta_1 + \eta_3) \eta_2 \\ (\eta_7 + \eta_7)(\eta_6 + \eta_6) \dots (\eta_2 + \eta_2) \eta_1 \end{bmatrix}$$

az elmozdulások hatására ordinátaiból alkotott kvadratikus mátrixot jelenti.

Az $\mu = 0,3$ esetben kiszámítottuk a $\mathbf{H}$ mátrixot, és ez számszerűen az alábbi:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1,2756 & 0,4153 & 0,1874 & 0,2337 & 0,3883 & 0,5025 & 0,2766 \\ 0,4153 & 1,6639 & 0,7906 & 0,4108 & 0,2337 & 0,1649 & 0,0636 \\ 0,1874 & 0,7906 & 1,8873 & 0,7906 & 0,1874 & -0,1416 & -0,1117 \\ 0,2337 & 0,4108 & 0,7906 & 1,6639 & 0,4153 & -0,2009 & -0,2052 \\ 0,3883 & 0,2337 & 0,1874 & 0,4153 & 1,2756 & 0,1465 & -0,0892 \\ 0,5025 & 0,1649 & -0,1416 & -0,2009 & 0,1465 & 1,2981 & 0,3517 \\ 0,5532 & 0,1272 & -0,2234 & -0,4104 & -0,1784 & 0,7034 & 2,7746 \end{bmatrix}$$

Tekintettel arra, hogy az $\mathbf{u}$ elmozdulási oszlopmátrixot a számítás érdekében a törzstartó minden csomópontjában beiktatott egységnyi terhelés nyomatókából származó $\mathbf{r}$ oszlopmátrix esetében meg kell határozni, az oszlopmátrixot célszerűen indexszel láthatjuk el. Az „i”, illetve „o” index egyben utal arra, hogy az melyik csomópontba beiktatott egységnyi, illetve külső terhelés hatására keletkezett elmozdulásokra, illetve R_k erőkre vonatkozik.

Így az előző kifejezés az alábbi alakot nyeri:

$$u_i = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_i$$

és

$$u_0 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_0.$$

Könnyen belátható, hogy az általunk vizsgált $\Sigma u_i R_k$ kifejezés, mátrix alakban írva, a következő:

$$\Sigma u_i R_k = \mathbf{u}_r^* \mathbf{r}_k$$

illetve

$$\Sigma u_0 R_0 = \mathbf{u}_0^* \cdot \mathbf{r}_0$$

Azaz a kannonikus egyenletrendszer koefficienseinek a talaj ágyazási munkáját kifejező tagját úgy kapjuk meg, hogy az „i” pontban beiktatott egységnyi nyomatókpár, illetve külső terhelés hatására keletkező elmozdulások sor mátrixát (transzponált oszlopmátrixát) megszorozzuk a „k” pontban beiktatott egységnyi nyomatókpár, illetve külső terhelés hatására keletkező $\mathbf{r}$ erők oszlopmátrixával.

A $\Sigma u_i R_k$ kifejezés ismeretében nem jelent különleges nehézséget az egy-ség és terhelési tényezők meghatározása, illetve a kanonikus egyenlet megoldása sem.

A szerzők befejezésül köszönetet mondanak *Kohlmann László* matematikusnak, aki a levezetések ellenőrzésében és részletszámítások elvégzésével értékes segítséget nyújtott számukra.

IRODALOM

- [1] *Volkov* és mások: Alagutak. (oroszul) Moszkva 1945.
- [2] *Dr. Széchy K.* : Alagútépítéstan. Egyetemi jegyzet 1960.
- [3] *Davidov Sz. Sz.* : Földalatti szerkezetek méretezése és tervezése. (oroszul) Moszkva 1950.
- [4] *Timosenko, S.* : Theory of Elasticity, New York 1934.
- [5] *Orlov, Sz. A.* : Síkban, kör alakú kivágás peremén fekvő szerkezetek számítása. Szerkezeti — elméleti kutatások, 6 kötet. Moszkva 1954. (oroszul).
- [6] *Rüzsik, I. M. és Gradstein, I. Sz.* : Integrálok, sorok táblázata. (oroszul) Moszkva 1951.

A kézirat 1961. február hóban érkezett.