

## A VASÚTI KERESZTALJ SZTATIKAI VIZSGÁLATA A FELLOVAGLÁS FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

Ebben a tanulmányban a keresztalj sztatikai vizsgálatára kidolgozott új képletsorozatainkat mutatjuk be. Ezekben a képletsorozatokban olyan két mechanikai hatás jut kifejezésre, amelyek az eddig használatos számítási eljárásoknál figyelmen kívül maradtak. Ezek a hatások a következők:

1. *A függőleges irányú talpnyomások harang alakú megoszlásának hatása*
2. *A keresztalj alátömörített részeinek elfordulásával szemben az ágyazás által kifejtett ellenálló nyomaték hatása.*

Ezek mellett még figyelembe vesszük a *részleges fellovágás* hatását is.

### *Fellovágás*

Fellovágáson — a szó eredeti értelmében — a vasúti keresztaljnak azt a labilis helyzetét értik, amelyben a keresztalj csak a közepe táján támaszkodik az ágyazásra. Ez a helyzet úgy állhat elő, hogy a keresztalj talpfelülete alatt tömörítési hiba folytán az ágyazásban púp alakul ki a vágánytengely környezetében, miközben a talpfelületnek a sínek alatt fekvő részei „üresek”, vagyis alátámasztás nélkül maradnak. Ebben a labilis helyzetben a keresztalj közbenső keresztmetszeteire olyan nagy, negatív értelmű nyomaték hárulhat, amely repedést, sőt törést is okozhat.

Ennek a veszélyes helyzetnek elkerülése végett — szabályos pályafenntartásnál — az aljnak csak a sínek környezetében fekvő, két szélső szakasza alatt tömörítik az ágyazást, de a vágánytengely környezetében az alj középű szakaszát üresen hagyják.

A fellovágás veszélyének még hatékonyabb elhárítása céljából a vasbeton- és feszített betonkeresztaljat olyan alakban gyártják, hogy a középű, kb. 70 cm hosszú részén az alj alsó felülete a talpsík fölé emelkedjék fel néhány centiméterrel.

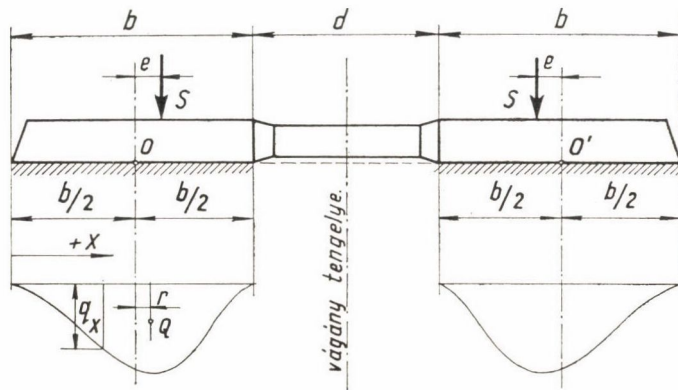
Ilyen óvintézkedések mellett a keresztaljak méretezésénél a *teljes* fellovágásból származó nagy negatív nyomatékokkal nem kell számolni. Viszont — a pályafenntartás esetleges kisebb fogyatékoságainak figyelembevétele végett — mégis ajánlatos a sztatikai vizsgálatot kiterjeszteni arra a terhelési változatra is, amelynél a szabályosan alávert két szélső szakasz alatt ébredő talpnyomások mellett az alj középű szakaszára is támadnak szabálytalan talpnyomások valamilyen *részleges fellovágásnak* megfelelő módon és mértékben. Gyakorlati szempontok mérlegelésével ezeknek a talpnyomásoknak az

eredőjét célszerű akkora felfelé ható erővel felvenni, amely a két sínnyomás összegének kb. 1/10—1/5 része.

A következőkben „fellovágás”-on ilyen részleges fellovágásnak megfelelő terhelési változatot értünk.

### A talpnyomások harang alakú megoszlása

A szabályosan alávert keresztalj két szélső,  $b$  cm hosszú részét olyan két, rugalmasan beágyazott, rugalmas nyomólapnak foghatjuk fel, amelyeket a közbülső  $d$  cm hosszú, üres rész köt össze egymással (1. ábra). Ha ezt az „összekötő rudat eltávolítanók, az alj két alávert részének erőjátéka külön-külön, egymástól függetlenül úgy alakulna ki, mint az egyszerű rugalmas nyomólap erőjátéka szemcsés talajban, excentrikus nyomás alatt.



1. ábra

A talajmechanikai kísérletek eredményei szerint szemcsés talajban vízszintes nyomólap alatt a talpfeszültségek függőleges összetevői harang alakú görbével ábrázolható módon oszlanak meg. Ezért jogosult az a feltevés, hogy a szemcsés talajhoz hasonló ágyazásban a keresztalja alátömörített talpfelületrészei alatt is a függőleges talpnyomások olyan harang alakú görbének megfelelő megoszlással alakulnak ki, amely harang alak a sínnyomás excentricitásának hatására bizonyos mértékben eltorzul, azaz asszimmetrikussá válik.

A talpnyomások megoszlásának ez a harang alakja arra mutat, hogy a Winkler-féle arányossági elv ( $p = Cy$ ) alapján a keresztalj számára levezetett számítási módszer (Zimmermann és követői) téves feltevésből indult ki. Mert ha ez az alapelv a keresztalj számítására is alkalmas volna, akkor merev (ill. közel merev) nyomólap alatt, ahol minden pont lesüllyedése azonos, a talpfeszültségek értéke is ugyanakkora volna a nyomólap szélein, mint a közép-pont alatt, azaz a talpfeszültségek függőleges komponenseinek megoszlási módja nem felelhetne meg a harang alakú ábrának. Tehát minden olyan módszer, amely  $C$  kg/cm<sup>3</sup> ágyazási tényezővel, mint valamely — ugyanolyan ágyazásra nézve — állandó értékű tényezővel számol, a keresztalj számítására alkalmatlan. Megállapított tény, hogy  $C$  nemcsak az ágyazási anyag szemecskéinek saját rugalmasságától, ezek nagyságától, szerkezetétől és hézagátvitelétől

(tömörségétől), szóval az ágyazás *saját* rugalmasságától függő tényező, hanem ezen kívül még igen lényegesen függ a nyomólap alakjától és méreteitől is. Ezért a sín számításánál  $C$  tényező csak azért alkalmazható, mert itt *azonos* méretű és alakú nyomólapok, azaz keresztaljak rugalmas besüllyedésével kell számolnunk. De már más vagy változó méretű keresztaljakra kötött sín számítása ugyanolyan értékű  $C$  tényezővel nem volna helyes azonos minőségű és tömörségű ágyazási anyag esetén sem. Viszont sok kísérlettel igazolt jelenség az is, hogy ha több, azonos méretű nyomólapot ugyanabba az ágyazásba különböző nagyságú erőkkel benyomunk (ez a keresztaljas felépítmény esete is), akkor — egy bizonyos nyomóerő határán belül — a nyomólapok besüllyedései (elhanyagolhatóan kis különbségekkel) valóban arányosak a nyomóerőkkel.

Annak a látszólagos ellentmondásnak, amely szerint  $C$  tényező a sín számításai képleteiben használható, de a keresztalj számításánál már nem alkalmazható fogalom, a fenti megállapítások értelmében az egyszerű magyarázata a következő.

A sín számításánál használt  $S = Dy = Cvby$  szabály [ $S$  kg sínnyomás,  $D$  kg/cm az a fajlagos erő, mely a nyomólapot önmagával párhuzamosan 1 cm mélyre volna képes az ágyazásba benyomni,  $y$  cm a besüllyedés] állandó  $D$ , illetve  $C$  értékkel számolva érvényes mindaddig, amíg az egymást követő keresztaljak alátömörített felületei [azaz nyomófelületei] alakra és méretre azonosak. Ugyanis az egyensúly folytán az egymást követő sínnyomások egyenlők az alattuk levő nyomólap alatt ébresztett talpfeszültségek felületi integráljával. Tehát mindaddig, amíg a nyomófelületek alakra és méretre azonosak, ezeknek a határozott integráloknak értékei függetlenek attól, hogy a határokon, azaz a nyomófelület *kerületén belül* a talpfeszültségek milyen függvény szerint alakulnak ki. Lényeg csak az, hogy a határozott integrálok értékeinek egymás közötti viszonyozása a nyomóerők viszonyozásával egyenlő. Eszerint tehát a sín alátámasztási pontjainak lesüllyedési különbségeire nézve (márpedig a sín számításánál csak ez a mértékadó) közömbös, hogy a keresztaljak nyomótalpa alatti talpfeszültségek megoszlása egyenletes, illetve lineáris-e, vagy hogy a megoszlás valamely harang alaknak megfelelően fejlődik-e ki. Mondhatjuk tehát, hogy ebben az „integrális” értelemben az arányossági szabály érvényes, vagyis a sín számítására állandó  $C$  érték feltételezésével levezetett képleteink érvényesek.

Ezzel szemben a keresztalj számításánál éppen az a döntő, hogy egy alj alátömörített felületének szélein belül, vagyis a nyomólap *kerületén belül* milyen megoszlási alakban fejlődnek ki a talpfeszültségek. Mivel pedig ez a megoszlás valóban harang alakú, s így az állandónak feltételezett  $C$  érték a nyomófelületen belül pontról pontra változik, tehát ebben a „*differenciális*” értelemben  $p = Cy$  arányossági szabály már érvénytelen anélkül, hogy ez ellentmondásban állana a sín számításánál alkalmazott elmélettel. Viszont ez a magyarázata annak is, hogy miért van szükség a keresztalj igénybevételeinek olyan új számítási módszerére, amelynél már az arányossági szabályt nem alkalmazzuk a talpnyomások megoszlási módjának törvényeként.

\*

### *Az ellenálló nyomaték*

A nyomólapnak azt a teljes elmozdulását, amelyet excentrikus nyomás alatt végez, miközben az az eredeti vízszintes síkjából az új egyensúlyi helyzetébe jut, két mozgásösszetevőre bontjuk. Ezt úgy képzeljük el, hogy a nyomóerő először excentricitás nélkül hat, vagyis a nyomólap súlypontjában támad. Ebben az esetben a lap önmagával párhuzamosan lesüllyed, miközben a saját rugalmassága folytán szimmetrikus alakváltozást végez. A második menetképpen azt képzeljük el, hogy a centrikus terhelésre az excentricitásnak megfelelő erőpár superponálódik. Ennek egyik következményeként a nyomólapnak eddig még szimmetrikusan behajlott alakja aszimmetrikus görbe felületté torzul el. Ugyanakkor a superponálódott nyomaték második hatásaként

az egész nyomólap a nyomófelületének egyik súlyponti tengelye körül a rugalmas talajban valamilyen kis szöggel *elfordul*.

Eszerint a keresztalj két alávert részének teljes elmozdulását is úgy foghatjuk fel, hogy az új egyensúlyi helyzet függőleges elmozdulásokkal egyidejűleg végzett elfordulás kíséretében alakul ki. Viszont a rugalmas ágyazás szükségképpen ellenállást fejt ki nemcsak a függőleges bonyomódásokkal szemben, hanem az elfordulással szemben is. Mivel kis mozgásokról van szó, ezért joggal feltehető, hogy az új egyensúly kialakulásakor a *rugalmas ágyazásnak* a nyomólap elfordulásával szemben kifejtett *ellenálló nyomatéka* — bizonyos határon belül — arányos az elfordulás szögével, és egyenlő a nyomóerő excentricitásának megfelelő (külső) nyomaték negatív értékével:

$$M_p = - M_a = - \frac{\varphi}{\psi},$$

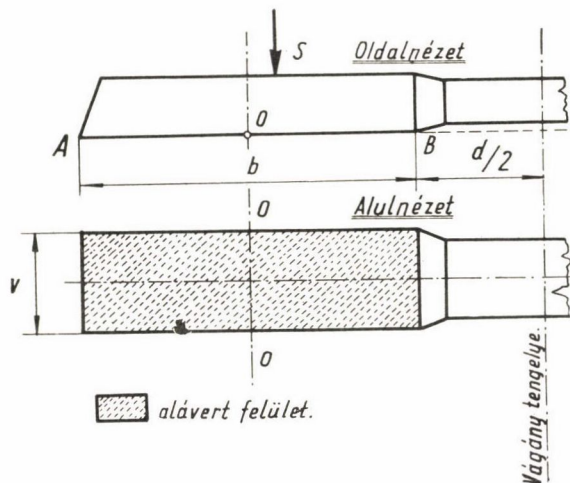
ahol  $M_p$  kgcm a passzív, vagyis ellenálló nyomaték;

$M_a$  kgcm az aktív nyomaték;

$\varphi$  az elfordulás szöge;

$\psi$  kg<sup>-1</sup> cm<sup>-1</sup> az arányossági tényező.

Ennek az arányossági tényezőnek fizikai értelme annak az elfordulásnak szöge, amelyet a talp a rugalmas ágyazásban végez a nyomófelület 0—0 jelű



2. ábra

súlyponti tengelyére támadó egységnyi ( $M_0 = 1$  kgcm) nyomaték hatására (2. ábra).  $\psi$  tényező kísérleti és elméleti értékének meghatározási módját a „Függelék I. részében mutatjuk be. Az ágyazás rugalmassága mellett — amint már említettük — ez az érték függ az alj alávert talpfelületrészének alakjától és méreteitől, valamint az elfordulás irányától is. Ezért az ellenálló nyomaték-nak ez a tényezője nem ugyanolyan értékű, mint amelyik a sín számításánál érvényesül, mert az 0—0 jelű tengely merőleges annak a tengelynek az irányára, amelyikre a sín szabad elfordulását gátló ellenálló nyomaték támad.

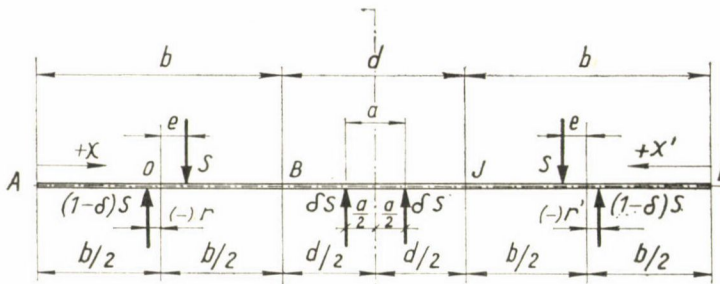
*A rugalmas mennyiségek kifejezése racionális egész függvényekkel*

A talpnyomások megoszlásának  $q_x = f(x)$  függvényét olyan koordináta-rendszerben ábrázoljuk, amelynek kezdőpontja a keresztalj talpvonalának bal végpontja, és a pozitív  $x$  irány balról jobbra mutat.

A függvénynek a következő feltételeket kell kielégítenie:

1.  $x = 0$ ,  $q_x = 0$
2.  $x = b$ ,  $q_x = 0$
3.  $x = \frac{b}{2}$ ,  $q_x = \varrho q_0 \dots$ , ahol  $q_0 = \frac{(1 - \delta) S}{b}$
4.  $\int_0^b q_x dx = (1 - \delta) S$
5.  $\int_0^b q_x \cdot x dx = (1 - \delta) \cdot S \cdot \left( \frac{b}{2} + r \right)$ .

$S$  kg a sínnyomás,  $\delta$  a fellovágás tényezője,  $b$  cm az alátömörített rész hossza  $\varrho$  arányossági tényező,  $q_0$  kg/cm a talpnyomások átlagos értéke,  $r$  cm a harang-görbe és az abszcisszatengely közé zárt terület súlypontjának távolsága az



3. ábra

alátömörített rész középvonalától (3. ábra).  $r$  távolság általában nem egyenlő  $e$  cm-rel, vagyis a sínnyomás excentricitásával, mert a keresztaljnak a  $d$  cm hosszú rúddal rugalmasan összekapcsolt két alátömörített része  $e$  nélkül a fel-tétel nélkül is egyensúlyba jöhet.

A legegyszerűbb függvény a racionális egészfüggvény. Mivel elsősorban az a célunk a mérnöki gyakorlat számára alkalmas, mennél könnyebben használható módszert dolgozzunk ki a rugalmas mennyiségek (talpnyomások, eredő erők, nyomatók és lesüllyedések) meghatározására: szükségtelen szigorúan ragaszkodnunk ahhoz, hogy a függvényt tisztán elméleti úton vezessük le. Ugyanis a kitűzött célra jó megközelítő módszer is alkalmas, ha  $q_x = f(x)$  függvény megfelel annak a követelménynek, hogy harang alakú görbével ábrázolható—és a kezdeti feltételeket, valamint a statikai egyensúly követelményeit is kielégíti.

Öt feltétel öt együtthatóval, azaz *negyedfokú* racionális egészfüggvénnyel elégíthető ki. Mivel pedig a negyedfokú racionális egészfüggvény általában harang alakú görbének felel meg; a függvény alakjánál fogva is alkalmas a talpnyomások megoszlásának kifejezésére. Tehát:

$$q_x = a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5.$$

Határozzuk meg ezeket az  $a_i$  együtthatókat úgy, hogy ez a függvény kielégítse öt követelményünket:

$a_5 = 0$ , mert különben  $q_x$  az  $x = 0$  helyen nem lehetne  $O$ .  $a_4 \dots a_1$  együtthatók kiszámításához négy egyenletet írhatunk fel:

$$a_1 b^3 + a_2 b^2 + a_3 b + a_4 = 0$$

$$\frac{1}{16} a_1 b^3 + \frac{1}{8} a_2 b^2 + \frac{1}{4} a_3 b + \frac{1}{2} a_4 = \varrho \frac{(1 - \delta) S}{b^2}$$

$$\frac{1}{5} a_1 b^3 + \frac{1}{4} a_2 b^2 + \frac{1}{3} a_3 b + \frac{1}{2} a_4 = \frac{(1 - \delta) S}{b^2}$$

$$\frac{1}{6} a_1 b^3 + \frac{1}{5} a_2 b^2 + \frac{1}{4} a_3 b + \frac{1}{3} a_4 = \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{b} \right) \frac{(1 - \delta) S}{b^2}.$$

Ebből a lineáris egyenletrendszerből a négy ismeretlen  $a_i$  képletét kiszámítva az eredmény:

$$a_1 = + 40 (2\varrho - 3) \cdot \frac{(1 - \delta) S}{b^5}$$

$$a_2 = - 40 \left( 3 \frac{r}{b} + 4\varrho - 6 \right) \cdot \frac{(1 - \delta) S}{b^4}$$

$$a_3 = + 6 \left( 30 \frac{r}{b} + 16\varrho - 25 \right) \cdot \frac{(1 - \delta) S}{b^3}$$

$$a_4 = - 2 \left( 30 \frac{r}{b} + 8\varrho - 15 \right) \cdot \frac{(1 - \delta) S}{b^2}.$$

A könnyebb kezelhetőség céljából a függvényt a következő formában írjuk fel

$$q_\xi = \frac{(1 - \delta) S}{b} \cdot [\beta_1 \xi^4 - \beta_2 \xi^3 + \beta_3 \xi^2 - \beta_4 \xi] \quad (1)$$

itt

$$\xi = \frac{x}{b}$$

és az együtthatók:

$$\beta_1 = 40 (2\varrho - 3)$$

$$\beta_2 = 40 \left( 3 \frac{r}{b} + 4\varrho - 6 \right)$$

$$\beta_3 = 6 \left( 3\vartheta \frac{r}{b} + 16\varrho - 25 \right)$$

$$\beta_4 = 2 \left( 30 \frac{r}{b} + 8\varrho - 15 \right)$$

\* \* \*

$q_\xi$  függvény egyszeri integrálásával nyerjük az eredő erők függvényét, majd a második integrálással a nyomatékot, és a negyedik integrálás útján a lesüllyedések függvényeihez jutunk az alkalmas integrálási állandók bevezetésével. Így valóban elérhetjük azt az előre kitűzött célunkat, hogy az összes rugalmas mennyiségeket egyszerű racionális egész függvényekkel fejezhetjük ki, és pedig a talpnyomásokat negyedfokú, az eredő erőket ötödfokú, a nyomatékot hatodfokú és a lesüllyedéseket nyolcadfokú racionális egész függvényekkel.

\* \* \*

$$\varrho = \frac{q_x}{q_0} \left( \text{az } x = \frac{b}{2} \text{ helyen} \right)$$

Ennek a viszonyzámnak, azaz arányossági tényezőnek értéke általában a nyomólap alatt kifejlődő talpnyomások *koncentrációjától* függ. Ez pedig függ a szemcsés talaj tömörségétől, szemszerkezetétől, a nyomófelület alakjától, érdességétől és méreteitől stb. Tehát  $\varrho$  tényező olyan érték, amely csak kísérlettel határozható meg megbízható módon. A keresztalj számítására kidolgozott, közelítő képleteinkben — közvetlenül erre vonatkozó kísérleti adatok hiányában — műszaki megfontolások alapján valószínű érték képpen  $\varrho = 1,7$  értékkel számoltunk.

Ezt a  $\varrho$  értéket a számítás egyszerűsítése végett konstansnak vesszük akkor is, ha  $b$  és  $r$  változnak, bár  $\varrho$  nyilván függő változója mindkét változónak. Mivel excentrikus nyomásnál is  $\varrho$  továbbra is a  $b$  középvonalában ébresztett  $q_x \left[ x = \frac{b}{2} \right]$  nyomásnak  $q_0$  átlagos értékhez viszonyított arányszáma marad (és nem  $q_{\max/q_0}$ ), ezért  $\varrho$  állandónak tartott értéke nem zárja ki azt a lehetőséget, hogy  $r$  növekedésével  $q_{\max/q_0}$  is növekedjék, mert ha  $r$  már nem zérus, akkor  $q_{\max}$ -nak a helye is elvándorol a középvonaltól.

Azt, hogy a  $\varrho$  értékére vonatkozó egyszerűsítő feltevésünk megengedhető lényeges hiba nélkül, igazolják a talpfák elasztikus görbéinek alakjára vonatkozó kísérleti eredmények, amelyekkel összehasonlítottuk a módszerünk alkalmazásával kiszámított rugalmas lesüllyedések jellemző viszonyszámait [lásd szerzőnek „A vasúti felépítmény számítása” című tanulmányában az 54–57. oldalakon közölt példákat (Akadémiai Kiadó 1950)].

Ezek szerint  $\rho = 1,7$  helyettesítéssel a mérekszámítás képleteihez kiszámítandó  $\beta$  tényezők a következő módon egyszerűsített alakban írhatók fel:

$$\beta_1 = 16,00$$

$$\beta_2 = 120 \frac{r}{b} + 32,00$$

$$\beta_3 = 180 \frac{r}{b} + 13,20$$

$$\beta_4 = 60 \frac{r}{b} - 2,80,$$

vagyis már csak  $r/b$  változónak függvényei.

### *A sztatikai határozatlanság feloldása*

A sztatikailag határozatlan mennyiségek meghatározásának módját először a szimmetrikus terhelési változat esetére mutatjuk be, majd közöljük az aszimmetrikus terhelési változat számára kidolgozott képleteinket is.

A szimmetrikus terhelési változat *egyenes* pályában fekvő keresztalj vizsgálatára alkalmas, ahol a két sínnyomás egyenlő egymással, s így feltehető, hogy a fellovágás hatása is szimmetrikus, vagyis egyenértékűnek tekinthető olyan két  $P$  kg erő hatásával, amelyek egymással egyenlők és a vágánytengelytől jobbra és balra egyenlő távolságban támadnak az alj közbülső részére.

Aszimmetrikus terhelési változattal *köríves* vágányban fekvő keresztaljnál célszerű számolni, ahol a két sínnyomás között számottevő különbség van, s ezért valószínű, hogy a közbülső szakaszra támadó talpnyomások  $R$  kg eredőjének támadó pontja a vágány tengelyétől valamilyen  $z$  cm távolságra eltolódik a nagyobbik sínnyomás felé.

Mindkét esetben a sínnyomások értékeit ismert adatoknak, vagyis előre kiszámított értékeknek tekintjük. Úgyszintén ismert adatnak vesszük annak a horizontális erőnek az értékét is, amely az ívben fekvő keresztaljra támadó sínnyomásokkal egyidejűleg a külső sínszál koronájának belső éléről a keresztalj szilárdsági tengelyére hárul.  $\delta$ , illetve  $\delta'$  fellovágási tényezőt és  $a$  cm, illetve  $z$  cm távolságot (3., illetve 11. ábra) műszaki megfontolások alapján előre felvesszük. Ismert adatok a keresztalj terve alapján: az alj hosszirányú és keresztmetszeti méretei, anyagának rugalmassági modulusa, és pedig  $b$  cm hosszban  $E_1$  kg/cm<sup>2</sup> és  $d$  cm hosszban  $E_2$  kg/cm<sup>2</sup>,  $b$  cm az alátömörített részek hossza és  $d$  cm az ún. „összekötő rúd” hossza. Ismert adat még  $e$  cm a sínnyomás excentricitása, azaz az alávert  $b$  hosszúság felezőpontjától mért távolsága, majd még adott, *állandó* értékeknek tekintjük az alj keresztmetszetének inercianyomatékát oly módon, hogy ez  $b$  hosszban  $I_1$  cm<sup>4</sup> és  $d$  hosszban  $I_2$  cm<sup>4</sup>. Végül még ismert kísérleti vagy közelítőleg becsült adatnak tekintjük az ágyazás által kifejtett ellenálló nyomaték  $\psi$  kg<sup>-1</sup>cm<sup>-1</sup> tényezőjét is. Eszerint ismeretlenek csupán a talpnyomások harang alakú ábráinak súlyponti excentricitásai  $r$  cm és  $r'$  cm (az alj bal-, illetve jobboldali alávert részei alatt), amelyek *sztatikailag határozatlan* mennyiségek. Szimmetrikus terhelési változat esetén természetesen  $r' = r$ .



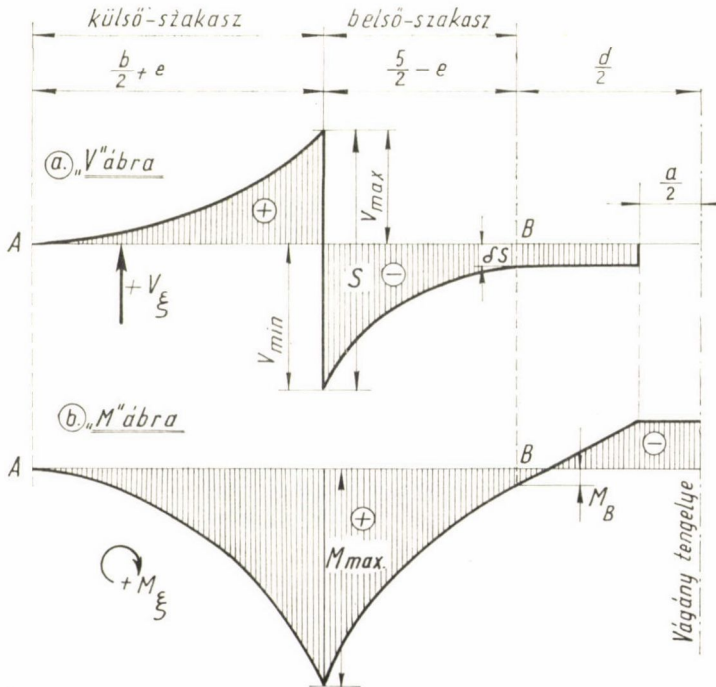
## I. Szimmetrikus terhelés

A koordináta-rendszer kezdőpontját a keresztalj talpvonalának bal végén levő  $A$  jelű pontban vesszük fel, és pozitív  $x$  iránynak a balról jobbra haladó vízszintes irányt tekintjük. Mivel a vizsgált szerkezet (keresztalj), valamint a terhelés is szimmetrikus a vágány tengelyére, mint szimmetriatengelyre nézve, ezért ezúttal elégséges a keresztaljnak csak a bal felével foglalkozni.

A keresztalj feleresze ilyenformán egyszerűen sztatikailag határozatlan szerkezetnek tekinthető. A határozatlanság a legegyszerűbben úgy oldható fel, hogy kiszámítjuk a  $B$  jelű keresztmetszetre balról ható  $M_B$  kgcm nyomaték értékét a következő képlet szerint:

$$M_B = S \cdot \frac{\left(e - \delta \frac{b}{2}\right) \psi - \frac{(1 - \delta) c + \frac{3}{4} \delta}{4 E_1 I_1} b^2 + \frac{e^2}{2 E_1 I_1} + \delta \cdot \frac{d^2 - a^2}{8 E_2 I_2}}{\psi + \frac{b}{2 E_1 I_1} + \frac{d}{2 E_2 I_2}} \quad (2)$$

(A képletben szereplő  $c$  jelű dimenzió nélküli szám nem egyéb, mint a talpnyomások koncentrációjától függő, de egyébként állandó értékű olyan tényező, amelynek értéke — amint a később bemutatandó összevonások során kitűnik — ebben az esetben:  $c = 0,0424$ ).



4. ábra

Ezután kiszámítható a talpnyomások ábrájának súlyponti excentricitása ( $r$  cm):

$$r = \frac{1}{1 - \delta} \cdot \left[ e - \delta \frac{b}{2} - \frac{M_B}{S} \right] \quad (3)$$

$r$ , (illetve  $\frac{r}{b}$  viszonyított) súlyponti excentricitás meghatározása után kiszámíthatók a  $\beta$  jelű együtthatók, s így felírható a talpnyomások megoszlásának  $q_\xi$  (lásd 1. számú képletet) függvénye. Ennek egyszeres integrálásával kapjuk a keresztalj  $b$  hosszú (szélső) szakaszának keresztmetszeteire balról ható eredő erőket kifejező függvényt, s kétszeres integrálással a nyomatékokat kifejező függvényhez jutunk. Figyelemmel kell lenni arra, hogy az integrálási állandók különböznek egymástól az alávert résznek a *külső* és a *belső* szakaszában, ahol a külső szakaszon a keresztaljnak a baloldali végétől a sínnyomás támadópontjáig terjedő részét értjük, belső szakaszon pedig ettől a támadóponttól kezdve tovább jobbra a  $B$  pontig terjedő részét. E szerint az *eredő erők* képlete a következő (4a. ábra):

A *külső szakaszban*:

$$V_\xi = (1 - \delta) \cdot S \cdot \left[ \frac{\beta_1}{5} \xi^5 - \frac{\beta_2}{4} \xi^4 + \frac{\beta_3}{3} \xi^3 - \frac{\beta_4}{2} \xi^2 \right] \quad (4a)$$

ez érvényes  $0 \leq \xi \leq \eta$  intervallumban, ahol  $\eta = \frac{1}{2} + \frac{e}{b}$  és a *belső szakaszban*

$$V_\xi = (1 - \delta) \cdot S \cdot \left[ \frac{\beta_1}{5} \xi^5 - \frac{\beta_2}{4} \xi^4 + \frac{\beta_3}{3} \xi^3 - \frac{\beta_4}{2} \xi^2 - \frac{1}{1 - \delta} \right] \quad (4b)$$

ez érvényes  $\eta \leq \xi \leq 1$  intervallumban.

A *nyomatékok* képlete a következő (4b. ábra) :

A *külső szakaszban*:

$$M_\xi = (1 - \delta) \cdot S b \cdot \left[ \frac{\beta_1}{30} \xi^6 - \frac{\beta_2}{20} \xi^5 + \frac{\beta_3}{23} \xi^4 - \frac{\beta_4}{6} \xi^3 \right] \quad (5a)$$

s a *belső szakaszban*:

$$M_\xi = (1 - \delta) \cdot S b \cdot \left[ \frac{\beta_1}{30} \xi^6 - \frac{\beta_2}{20} \xi^5 + \frac{\beta_3}{12} \xi^4 - \frac{\beta_4}{6} \xi^3 - \frac{\xi - \eta}{1 - \delta} \right] \quad (5b)$$

A keresztalj  $d$  hosszú, *közbülső szakaszának* keresztmetszeteire balról ható eredők és nyomatékok ábráját az 5a., illetve 5b. ábra mutatja. Ezek szerint:

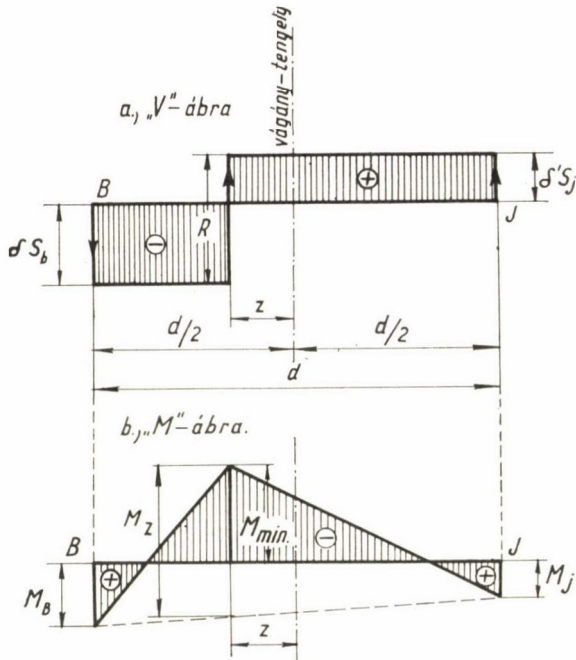
$V_{\max} = \delta S = P$ ,  $V_{\min} = -\delta S = -P$  (A felfelé irányuló eredőt tekintjük pozitív értelműnek.) (4c)

$$M_{\min} = M_B - \sigma S \cdot \frac{d - a}{2} \quad (\text{Az } M \text{ ábra itt annak az esetnek felel meg,}$$

amikor  $M_B$  pozitív értelmű.) (5c)

Mivel a fellovaglást valóban nem koncentrált erők, hanem valamilyen — hosszabb vagy rövidebb — darabon megoszló talpnyomások idézik elő, ezért a nyomatéki ábra valószínű alakjaként poligon helyett inkább megfelel az ábrába szaggatott vonallal be rajzolt görbe, amely a poligon sarkait letompítja.

$M_B$  képletének elemzésével kapcsolatban arra mutatunk rá, hogy mód-szerűnk olyan különleges szerkezetű keresztaljak sztatikai vizsgálatára is alkalmas, amelyeknél az összekötő rúd nemcsak keresztmetszeti méreteiben



5. ábra

különbözik az alávért szakaszoktól, hanem még abban is, hogy másfajta anyagból készül. A rendes esetben, vagyis amikor a keresztalj egész hosszán a rugalmassági modulus változatlan,  $E_1 = E_2 = E$  bevezetésével  $M_1$  képlete egyszerűsíthető.

*A sztatikailag határozatlan (r illetve  $M_B$ ) mennyiség képletének igazolása*

A keresztalj baloldali alávért részének egyensúlyi feltételeit vizsgáljuk  $A$  és  $B$  jelű pontok között (6. ábra). Ez az alávért szakasz a  $B$  jelű keresztmetszetenél csatlakozik az alj közbülső részéhez, amelyről erre a keresztmetszetre  $\delta S$  erő és  $M_B$  nyomaték hárul. Ezek ellentétes értelműek a kereszt-

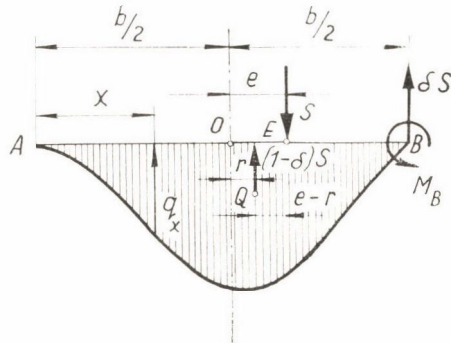
alj  $B$  jelű keresztmetszetére balról ható eredő erővel és nyomatékkal. Az ábra jelölései szerint az  $\bar{AB}$  rúd  $O$  jelű középpontjára támadó, külső nyomatékok egyensúlyát felírjuk, miközben  $q_x$  talpnyomások együttes hatását a megoszlási ábra  $Q$  jelű súlypontjából támadó,  $(1 - \delta)S$  értékű eredővel helyettesítjük:

$$S \cdot \left[ e - \delta \cdot \frac{b}{2} - (1 - \delta) \cdot r \right] - M_B = 0$$

$$M_B = S \cdot \left[ e - \delta \cdot \frac{b}{2} - (1 - \delta) \cdot r \right]$$

$$r = \frac{1}{1 - \delta} \cdot \left[ e - \delta \frac{b}{2} - \frac{M_B}{S} \right].$$

Eszerint  $r$ , mint  $M_B$  függvénye, *sztatikailag határozatlan mennyiség*. (Megjegyezzük, hogy olyan esetben, amikor  $E$  vagy  $Q$  jelű pont az  $O$  ponton átmenő

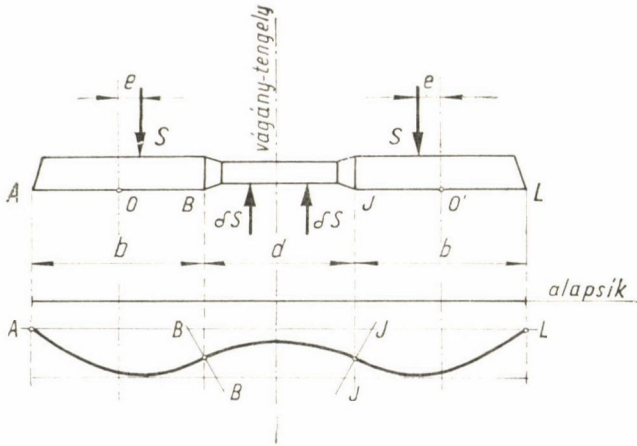


6. ábra

függőleges középvonaltól balra kerül, akkor  $e$ , illetve  $r$  excentricitás negatív értelművé válik.) Ugyanis terhelés alatt az új egyensúlyi állapot a szilárd keresztalj és rugalmas ágyazás erőjátékának kölcsönös egymáshatása közben fejlődik ki. Ezért egyrészt a talpnyomások megoszlási görbéjének alakja függ a keresztalj rugalmas tulajdonságaitól (éspedig nemcsak az alávert  $b$  hosszú rész rugalmasságától, hanem a közbülső,  $d$  hosszú „összekötő” rész hajlékonyságának viszonylagos mértékétől is), másrészt a keresztalj elasztikus görbéjének alakja függ a talpnyomások koncentrációjától, a megoszlási görbe eltorzulásának mértékétől, és általában az ágyazás rugalmas tulajdonságaitól. Eszerint a keresztalj erőjátékát általában sztatikailag kétszeresen határozatlan szerkezetként kell megvizsgálni, de ebben az esetben, amikor nemcsak a szerkezet, hanem a terhelés is szimmetrikus a vágánytengelyre, mint a szimmetria tengelyére nézve, a keresztalj egyszeresen határozatlan szerkezetként vizsgálható meg. Ugyanis a tengelybe eső keresztmetszet a terhelés után is függőleges síkban marad, mert a szimmetria folytán egyik irányba sem fordul el (7. ábra).

A sztatikai határozatlanság feloldása végett azt képzeljük el, hogy  $B-B$  és  $J-J$  keresztmetszetenél a keresztaljat a szilárdsági tengelyére merőlegesen átmetszve, a folytonos anyagi összefüggésnek ezen a két helyén egy-

egy csuklót alkalmazunk. Az ilyenformán kialakított törzstartó új egyensúlyi helyzetét vizsgáljuk meg, és meghatározzuk az átmetszés helyén a terhelés folytán kialakuló  $\kappa_x$  szögforgást. Majd meghatározzuk azt a  $\kappa_0$  szögforgást is,

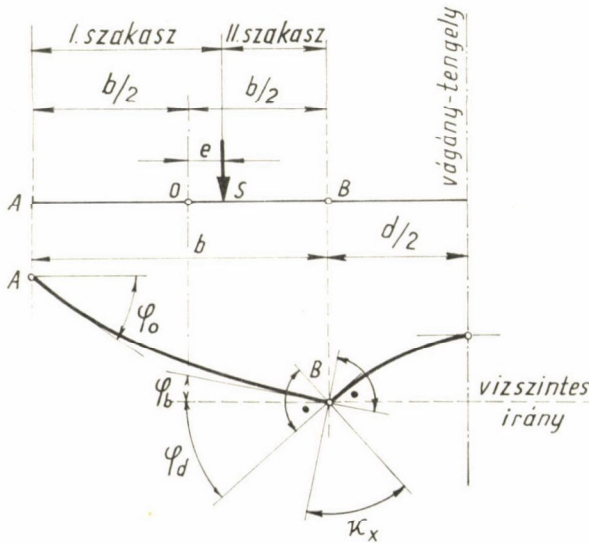


7. ábra

amelyet a törzstartó B jelű csukló körül az átmetszéssel egymástól elválasztott két véglap egymáshoz képest az egységnyi nyomaték hatására végezne. Ennek a két elméleti szögnek a viszonyszámából  $M_B$  nyomaték, majd ennek ismeretében a keresett  $r$  súlyponti excentricitás is kiszámítható.

$$M_B = M_0 \frac{\kappa_x}{\kappa_0}, \quad (6)$$

ahol  $M_0 = 1$  kgcm.



8. ábra

Mivel az átmetszés merőleges a rúd (keresztalj) szilárdsági tengelyére, azért  $\alpha_x$  szög egyenlő azzal a szöggel, amely a törzstartó  $B$  pont csuklójánál alakul ki az átmetszés folytán szétválasztott két (baloldali és középső) rúd elasztikus görbéinek  $B$  ponti érintői között (8. ábra). Eszerint

$$\alpha_x = \varphi_b + \varphi_d, \quad (7)$$

ahol  $\varphi_b$  a törzstartó  $b$  hosszú szakasza behajlási görbéjének  $B$  ponti végérintője és a vízszintes egyenes közötti szög;

$\varphi_d$  a  $d$  hosszú középső szakasz behajlási görbéjének  $B$  ponti érintője és a vízszintes irány közötti szög.

$\varphi_b$  szög meghatározása végett szükségünk van arra a függvényre, amelyből az elasztikus görbe érintőinek irányhatározói kiszámíthatók. Ez előállítható a nyomatéki függvény integrálásával a következőképpen:

Mivel igen kis szögekről van szó, ezért a szög értéke és tangense lényegtelen elhanyagolással felcserélhető. Tehát

$$\varphi_x \sim \operatorname{tg} \varphi_x = - \int \frac{M_x}{E_1 \cdot I_1} \cdot dx + \varphi_0$$

A  $b$  hosszú, alávert rész belső szakaszában  $M_\xi$  nyomaték 5b. számú képletének alkalmazásával kapjuk az elfordulások szögének következő képletét:

$$\varphi_\xi = \varphi_0 - \frac{(1-\delta) S b^2}{E_1 I_1} \cdot \left[ a_1 \xi^7 - a_2 \xi^6 - a_3 \xi^5 - a_4 \xi^4 - \frac{(\xi - \eta)^2}{2(1-\delta)} \right], \quad (8)$$

$$\text{ahol } \xi = \frac{x}{b} \text{ és } \eta = \frac{\frac{b}{2} + e}{b}$$

$$a_1 = \frac{8}{105}, \quad a_2 = \frac{r}{b} + \frac{4}{15}, \quad a_3 = r \frac{r}{b} + \frac{11}{50}, \quad a_4 = \frac{5}{2} \cdot \frac{r}{b} - \frac{1}{60}.$$

Ebből a függvényből  $\varphi_b$  képletét kapjuk  $\xi = 1$  helyettesítésével. A helyettesítés és az összevonások elvégzése után:

$$\varphi_b = \varphi_0 - \frac{(1-\delta) S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot \left[ c - \frac{r}{b} - \frac{\delta}{4(1-\delta)} + \frac{\varepsilon}{1-\delta} - \frac{\varepsilon^2}{1-\delta} \right], \quad (9)$$

$$\text{ahol } c = 0,424 \text{ és } \varepsilon = \frac{e}{b}.$$

$\varphi_0$  az elasztikus görbe  $A$  kezdőpontjában az érintőnek a vízszintes irány-nyal bezárt szöge, amely — egyelőre — még ismeretlen integrálási állandóként szerepel a képletben. Ez a „kezdeti feltételekből” határozható meg a következő „elméleti” kísérlet során, amelyet három lépésben végzünk el:

1. Induljunk ki a mindkét végén teljesen szabaddá tett és *centrikusan* terhelt rúd elasztikus görbéjének alakjából. Legyen ennek a rúdnak a hossza is  $b$  cm, keresztmetszete állandó, melynek inercianyomatéka:  $I_1$  cm<sup>4</sup>, rugalmassági modulusa:  $E_1$  kg/cm és az  $O$  jelű középpontjára támadó erő:  $(1-\delta)$ .

$S$  kg Mivel ebben az esetben az elasztikus görbe a középvonalra nézve szimmetrikus alakú (9. ábra), ezért

$$\varphi_{00} = -\varphi_{b0}.$$

Viszont ebben az esetben  $\varepsilon = 0$ , és emiatt az egyensúlyi feltétel értelmében a talpnyomások megoszlása is szimmetrikus, vagyis  $r = 0$ , tehát a 9. képlet szerint

$$\varphi_{00} - \varphi_{b0} = + \frac{(1 - \delta) \cdot S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot \left[ c - \frac{\delta}{4(1 - \delta)} \right] = 2 \varphi_{00},$$

tehát

$$\varphi_{00} = + \frac{(1 - \delta) \cdot S \cdot b^2}{4 E_1 I_1} \cdot \left[ c - \frac{\delta}{4(1 - \delta)} \right]. \quad (10)$$

Megjegyezzük, hogy így a képletünk szerint — látszólag — az elasztikus görbe alakja független volna az ágyazás rugalmasságától. De figyelembe kell venni, hogy a  $c$  jelű állandó értéke, valamint a  $\beta$  jelű együtthatók értéke is a talpnyomások megoszlási görbéjének alakjától függ, vagyis végső fokon  $c$  értékében a megoszlást ábrázoló harangalak karsúságának mértéke jut kifejezésre. Ezek szerint  $c$  tulajdonképpen olyan kísérleti adatnak tekinthető, amely a talpnyomások *koncentrációjától*, ez pedig az ágyazás és a rúd rugalmas tulajdonságainak kölcsönös egymáshatásától függ.

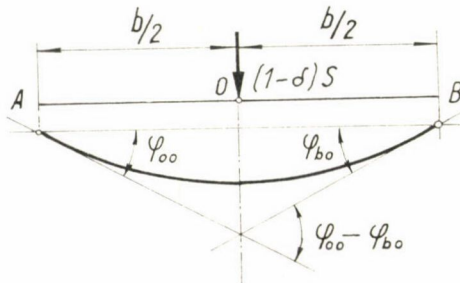
2. Az „elméleti kísérlet” folytatásaként képzeljük el, hogy  $(1 - \delta) \cdot S$  erő támadópontja a középponttól  $e$  távolságra jobbra eltolódik. Így a középpontra

$$\Delta M_1 = (1 - \delta) \cdot S \cdot e$$

nagyságú forgató nyomaték támad, amelynek hatására az egész  $b$  hosszú rúd

$$\Delta \varphi_1 = \psi \cdot \Delta M_1 = (1 - \delta) \cdot S \cdot \psi \cdot e$$

szöggel az ágyazásban az ábra síkjára merőleges tengely körül elfordul. Ezzel a forgással egyidejűleg a rúd valamilyen új, most már aszimmetrikus görbe



9. ábra

alakjába hajlik el. Ugyanis a  $b$  hosszban rugalmasan ágyazott, rugalmas rúd teljes alakváltozása úgy megy végbe, hogy az alátámasztás rugalmassága

folytán létrejövő elfordulásával egyidejűleg a saját rugalmassága miatt is végez elmozdulást.  $A$  jelű kezdőpontban az érintő hajlásszöge most

$$\varphi_{01} = \varphi_{00} + \Delta\varphi_1$$

3. Végül harmadik lépésként a törzstartónak megfelelő teljes terhelés hatásának elemzéséhez jutunk, ha megvizsgáljuk annak a  $\pm \delta S$  értékű erő-párnak a hatását is, amelyek közül a pozitív, azaz felfelé ható erő a rúd  $B$  jelű végpontjára támad; és a negatív, azaz lefelé irányuló erő a sínnyomás helyén szuperponálódik az előző esetben itt feltételezett  $(1 - \delta)S$  nagyságú erőre, amely ilyenformán  $\delta S$ -sel kiegészítve a teljes sínnyomás  $S$  értékére emelkedik fel. Az erőpár karja ezek szerint  $\frac{b}{2} - e$  távolsággal egyenlő, tehát a nyomatéka

$$\Delta M_2 = -\delta S \cdot \left( \frac{b}{2} - e \right).$$

Ennek a nyomatéknak hatására a rúd a rugalmas ágyazásban az ábra síkjára merőleges tengely körül elfordul  $\Delta\varphi_2$  szöggel, ahol

$$\Delta\varphi_2 = -\psi \cdot \delta S \cdot \left( \frac{b}{2} - e \right).$$

Eszerint az elasztikus görbe  $A$  ponti kezdő érintőjének hajlásszöge is módosul  $\Delta\varphi_2$  értelemszerű hozzáadásával. Tehát végeredményképpen:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_{02} = \varphi_{00} + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \\ \varphi_0 &= \psi S \cdot \left( e - \delta \frac{b}{2} \right) + \frac{(1 - \delta) S b^2}{4 E_1 I_1} \cdot \left[ c - \frac{\delta}{4(1 - \eta)} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Az új egyensúlyi helyzet nyomatéki feltételének megfelelően a talpnyomások ábrájának  $Q$  jelű súlypontja (lásd a 6. ábrát)  $\Delta M_2$  nyomaték hatására szükségképpen balra tolódik el a sínnyomás hatásvonalától  $e - \bar{r}$  vízszintes távolságra. Ebben az esetben  $r$  értékét a 3. képletből kapjuk  $M_B = 0$  helyettesítésével. Eszerint:

$$\bar{r} = \frac{1}{1 - \delta} \cdot \left( e - \delta \cdot \frac{b}{2} \right)$$

$Q$  súlypont eltolódása folytán a rúd elasztikus görbéjének alakja is módosul, tehát a  $B$  ponti végérintő hajlásszöge is megváltozik a 9. képlet értelmében  $r = \bar{r}$  fenti értékének bevezetésével:

$$\varphi_b = \varphi_0 - \frac{(1 - \delta) S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot \left[ c - \frac{\bar{r}}{b} - \frac{\delta}{4(1 - \delta)} + \frac{\varepsilon}{1 - \delta} - \frac{\varepsilon^2}{1 - \delta} \right],$$



ahol  $\varphi_0$  értékét a 11. kifejezéssel helyettesítjük. Végeredményül a helyettesítések és összevonások elvégzése után nyerjük a  $B$  ponti végérintő hajlásszögének keresett képletét:

$$\varphi_b = S \cdot \left[ \left( e - \delta \frac{b}{2} \right) \cdot \psi - \frac{(1 - \delta)c + \frac{3}{4}\delta}{4 E_1 I_1} b^2 + \frac{e^2}{2 E_1 I_1} \right] \quad (12)$$

$\varphi_d$  szög meghatározása végett a kétsuklós törzstartó közbülső ( $d$  cm hosszú) rúdjának erőjátékát elemezzük, amely a részleges fellovágásnak megfelelő, két felfelé ható  $\delta S$  erő (10. ábra) hatása alatt alakul ki.

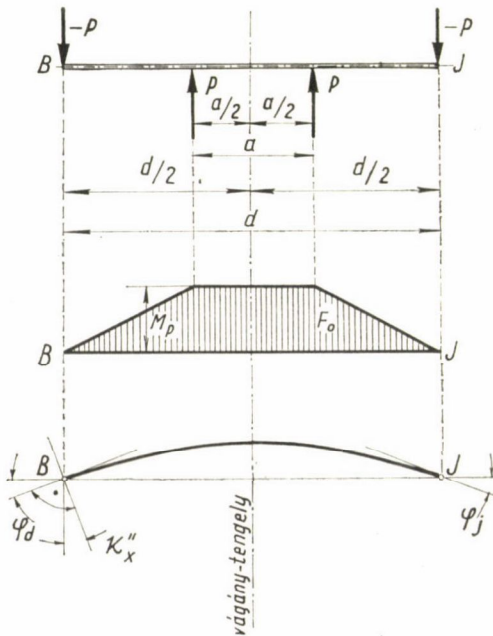
$$P = \delta S$$

A törzstartó nyomatéki ábrája  $B$  és  $J$  csuklók között a szimmetrikus terhelés folytán trapéz alakú, amelynek magassága:

$$M_p = \delta S \cdot \frac{d - a}{2} .$$

Eszerint a nyomatéki ábra területe:

$$F_0 = M_p \cdot \frac{d + a}{2} = \delta S \cdot \frac{d^2 - a^2}{4} .$$



10. ábra

Tehát az elasztikus görbe  $B$  kezdőponti érintőjének a vízszintes iránnyal bezárt szöge:

$$\varphi_d = \frac{\frac{d}{2}}{d} \cdot \frac{F_0}{E_2 I_2} = \delta S \cdot \frac{d^2 - a^2}{8 E_2 I_2}. \quad (13)$$

Ezek szerint a 7. képlet értelmében az átmetszés folytán  $B$  csuklónál a törzstartó két véglapja között kialakuló elfordulási szöget a 12. és 13. kifejezések összegezésével kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha_x = \varphi_b + \varphi_d = S \cdot & \left[ \left( e - \delta \frac{b}{2} \right) \psi - \frac{(1 - \delta)c + \frac{3}{4}\delta}{4 E_1 I_1} b^2 + \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{2 E_1 I_1} + \frac{(d^2 - a^2)}{8 E_2 I_2} \right] \end{aligned}$$

$\alpha_0$  szög meghatározásához is abból a feltevésből indulunk ki, hogy ez a szög is két, egymástól függetlenül kialakuló elfordulás összegezésével jön létre:

$$\alpha_0 = \alpha'_0 + \alpha''_0,$$

ahol  $\alpha'_0$  a  $b$  hosszban beágyazott rúd  $B$  jelű véglapjának a csukló körüli elfordulási szöge, mely az erre a véglapra támadó *egységnyi* ( $M_0 = 1$  kgcm) *nyomaték* hatására alakul ki:

$\alpha''_0$  a törzstartó  $B$  és  $J$  jelű csuklói között fekvő  $d$  hosszú rúd  $B$  jelű véglapjának a csukló körüli elfordulási szöge, amelyet akkor végez ez a lap, amikor egység nagyságú, de ellentétes értelmű nyomaték támad egyidejűleg a rúd mindkét ( $B$  és  $J$  jelű) véglapjára.

Ugyanis ezt az „elméleti kísérletet” úgy kell elképzelni, hogy amit a keresztaltnak a vágánytengelytől balra fekvő részén végzünk, egyidejűleg ugyanazt végezzük teljesen szimmetrikus módon, vagyis ellentétes értelmű mozgattással az altnak a tengelytől jobbra fekvő részén is.

$$\alpha'_0 = \Delta \varphi_b = \varphi_b [r = \bar{r} + \Delta \bar{r}] - \varphi_b [r = \bar{r}] = \bar{\varphi}_b - \bar{\bar{\varphi}}_b,$$

ahol  $\bar{r} = \frac{1}{1 - \delta} \cdot \left( e - \delta \frac{b}{2} \right)$  és

$$\bar{r} + \Delta \bar{r} = \frac{1}{1 - \delta} \cdot \left( e - \frac{S}{2} b + \frac{1}{S} \right)$$

ugyanis  $M_0 = 1$  kgcm (a  $b$  hosszú rúd jobb oldali véglapjára ható, az óramutató járásával megegyező értelmű nyomaték). Az előbbieket szerint:

$$\bar{\varphi}_b = \bar{\varphi}_0 - \frac{(1 - \delta) \cdot S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot \left[ c - \frac{\bar{r}}{b} - \frac{\delta}{4(1 - \delta)} + \frac{\varepsilon}{1 - \delta} - \frac{\varepsilon^2}{1 - \delta} \right]$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_b = \bar{\varphi}_0 - \frac{(1 - \delta) \cdot S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot \left[ c - \frac{\bar{r} + \Delta \bar{r}}{b} - \frac{\delta}{4(1 - \delta)} + \frac{\varepsilon}{1 - \delta} - \frac{\varepsilon^2}{1 - \delta} \right]$$

$\bar{r}$  és  $\bar{r} \Delta \bar{r}$  fenti értékeinek bevezetése és a kijelölt kivonás elvégzése után marad:

$$\Delta \varphi_b = \bar{\varphi}_0 - \varphi_0 - \frac{(1 - \delta) \cdot S b^2}{2 E_1 I_1} \cdot \left[ - \frac{1}{(1 - \delta) \cdot S b} \right]$$

$$\Delta \varphi_b = \bar{\varphi}_0 - \varphi_0 - \frac{b}{2 E_1 I_1}.$$

Amikor  $B$  véglapra egységnyi nyomaték támad, a beágyazott rúd a saját rugalmas elmozdulása mellett az ágyazásban is elfordul  $\psi$   $M_0 = \psi$  szöggel, tehát

$$\bar{\varphi}_0 - \varphi_0 = \psi$$

Ezek szerint

$$\kappa'_0 = \psi + \frac{b}{2 E_1 I_1}.$$

Amikor a  $d$  hosszú rúd két véglapjára a két csukló felől egyidejűleg egy-egy ellentétes értelmű, egység nagyságú nyomaték támad, akkor a rúd egész hosszán, mindegyik keresztmetszetében, a balról ható nyomaték azonos és az egységgel egyenlő. A szimmetria folytán az elasztikus görbe érintője a közepén, azaz a vágánytengelyben vízszintes, vagyis ez a középső keresztmetszet nem fordul el, hanem függőleges síkban marad. Eszerint a bal oldali —  $B$  jelű — csuklónál levő véglap elfordulása a pozitív értelmű, egységnyi nyomaték hatására:

$$\kappa''_0 = - \int_{x=b+\frac{d}{2}}^{x=c} \frac{M_0}{E_2 I_2} dx = + \frac{1}{E_2 I_2} \cdot \int_{x=b}^{x=b+\frac{d}{2}} dx = \frac{d}{2 E_2 I_2}.$$

tehát összesen:

$$\kappa_0 = \kappa'_0 + \kappa''_0 = \psi + \frac{b}{2 E_1 I_1} + \frac{d}{2 E_2 I_2}, \quad (15)$$

Megjegyezzük, hogy  $\kappa''_0$  fenti képletének levezetése során elhanyagoltuk annak az ágyazási nyomásnak a hatását, amely nyomás a fellovaglás folytán a  $d$  hosszú összekötő rúdra alulról felfelé támad akkor, amikor a rúdra a két csukló felől a két egységnyi nyomatékot egyidejűleg működtetjük. Igazolható, hogy ebből az elhanyagolásból származó hibának (amely hiba  $M_{\min}$  értékénél jelentkezik) a nagyságrendje 2%-nál nem nagyobb. Az igazolást a „Függelék” II. részében közöljük.

\*

Tehát végeredményként felírható az a képlet, amelynek segítségével  $M_B$  és  $r$  sztatikailag határozatlan mennyiségek értéke kiszámítható:

$$\frac{M_B}{S} = \frac{\left( e - \delta \frac{b}{2} \right) \psi - \frac{(1 - \delta) c + \frac{3}{4} \delta}{4 E_1 I_1} b^2 + \frac{e^2}{2 E_1 I_1} + \frac{(d^2 - a^2)}{8 E_2 I_2}}{\psi + \frac{b}{2 E_1 I_1} + \frac{d}{2 E_1 I_1}}. \quad (16)$$

Ha ezt a kifejezést a 3. képletbe bevezetjük,  $r$  keresett képletéhez jutunk.

### I. Példa

A Magyar Államvasutak egyik fővonalai feszített beton keresztalját vizsgáljuk meg szimmetrikus terhelés esetére részleges fellovágás figyelembevételével. A keresztalj külső méreteire és rugalmasságára vonatkozó adatok:

$$b = 85 \text{ cm}, d = 72 \text{ cm}, v = 28 \text{ cm}, e = + 2,5 \text{ cm}$$

$$I_1 = 10\,155 \text{ cm}^4, I_2 = 3421 \text{ cm}^4, \frac{I_1}{I_2} = 2,92$$

$$E_1 = E_2 = E = 365\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Az ágyazás rugalmasságára vonatkozó adatok:

$$D = (C \cdot v \cdot b) = 15 \cdot 28 \cdot 85 = 35\,700 \text{ kg/cm} \text{ (feltéve, hogy } C = 15 \text{ kg/cm}^3)$$

$$\varphi = \frac{17}{D \cdot b^2} = \frac{17}{35\,700 \cdot 85^2} = \frac{10^{-6}}{15,16} \text{ (kgcm)}^{-1}.$$

\*

A részleges fellovágásra vonatkozó feltevések:

$$\delta = 0,2 \quad a = 24 \text{ cm}$$

A 2. számú képlet értelmében:

$$\frac{M_B}{S} = \frac{2 EI_1 \left( e - \delta \frac{b}{2} \right) \varphi - \left[ (1 - \delta) c + \frac{3}{2} \delta \right] \cdot \frac{b^2}{2} + e^2 + \frac{\delta}{4} \cdot \frac{I_1}{I_2} \cdot (d^2 - a^2)}{2 EI_1 \varphi + b + \frac{I_1}{I_2} \cdot d}.$$

ahol  $c = 0,0424$

$$2 EI_1 \varphi = \frac{2 \cdot 365 \cdot 10,155 \cdot 10^6}{15,17 \cdot 10^6} = 489 \text{ cm}$$

$$\frac{M_B}{S} = \frac{-6,0 \cdot 489 - 0,184 \cdot 3612 + 6,25 + 0,05 \cdot 2,92 \cdot (72^2 - 24^2)}{489 + 85 + 2,92 \cdot 72}$$

$$\frac{M_B}{S} = -\frac{2920}{784} = -3,73 \text{ cm}$$

A 3. számú képlet szerint:

$$r = \frac{1}{1,0 - 0,2} \cdot \left[ + 2,50 - 0,2 \cdot \frac{85}{2} + 3,73 \right] = -2,84 \text{ cm}$$

Ezzel kiszámíthatók az 1. számú függvény  $\beta$  jelű együtthatói:

$$\frac{r}{b} = -\frac{2,84}{85,00} = -0,0334$$

$$\beta_1 = 16,00, \beta_2 = -0,0334 \cdot 120 + 32,00 = +28,0$$

$$\beta_3 = 0,0334 \cdot 180 + 13,20 = +7,2$$

$$\beta_4 = -0,0334 \cdot 60 - 2,80 = -4,8$$

Feltéve, hogy a sínnyomás:  $S = 10\,000 \text{ kg}$

$$M_B = -3,73 \cdot 10\,000 = -37\,300 \text{ kgcm}$$

A talpnyomások átlagos értéke:

$$q_0 = \frac{(1,0 - 0,2) \cdot 10\,000}{85} = 94 \text{ kg/cm},$$

tehát a *talpnyomások* megoszlását kifejező függvény az 1. számú képlet szerint a  $b$  hosszú, alátömörített rész alatt:

$$q_\xi = 94 \cdot [16,0 \xi^4 - 28,0 \xi^3 + 7,2 \xi^2 + 4,8 \xi] \text{ kg/cm}$$

Az *eredő erőket* kifejező függvény az alátömörített rész külső szakaszában a 4a., képlet szerint:

$$V_\xi = 8000 \cdot [3,2 \xi^5 - 7,0 \xi^4 + 2,4 \xi^3 + 2,4 \xi^2] \text{ kg}$$

érvényes  $0 \leq \xi \leq \eta$  intervallumban, ahol

$$\eta = \frac{\frac{b}{2} + e}{b} = \frac{1}{2} + \frac{2,5}{85} = 0,53$$

a belső szakaszban a 4b., képlet szerint:

$$V_\xi = 8000 \cdot [3,2 \xi^5 - 7,0 \xi^4 + 2,4 \xi^3 + 2,4 \xi^2 - 1,25] \text{ kg}$$

érvényes  $0,53 = \xi = 1,00$  intervallumban. Ugyanis az együtthatók:

$$\frac{\beta_1}{5} = 3,2, \quad \frac{\beta_2}{4} = 7,0, \quad \frac{\beta_3}{3} = 2,4, \quad \frac{\beta_4}{2} = -2,4.$$

A *nyomatékokat* kifejező függvény az alátömörített rész külső szakaszában, azaz  $0 \leq \xi \leq 0,53$  intervallumban az 5a., képlet szerint:

$$M_\xi = 680\,000 \cdot [0,53 \xi^6 - 1,40 \xi^5 + 0,60 \xi^4 + 0,80 \xi^3] \text{ kgcm},$$

mert most az együtthatók:

$$\frac{\beta_1}{30} = 0,533, \quad \frac{\beta_2}{20} = 1,400, \quad \frac{\beta_3}{12} = 0,599, \quad \frac{\beta_4}{6} = -0,801$$

a belső szakaszban az 5b., képlet szerint:

$$M_\xi = 680\,000 \cdot [0,53 \xi^6 - 1,40 \xi^5 + 0,60 \xi^4 + 0,80 \xi^3 - 1,25 \cdot (\xi - 0,53)] \text{ kgcm}$$

$$\text{mert } \frac{\xi - \eta}{1 - \delta} = 1,25 \cdot (\xi - 0,53).$$

$$\text{Kontroll: } M_\xi [\xi = 1,00] = -37\,060 \text{ kgcm}$$

$$M_B = -37\,300 \text{ kgcm}$$

tehát a különbség, amely az együtthatók lekerekítéséből származik: 0,65%.

\*

A közbülső,  $d$  hosszú szakaszban a fellovágás folytán támadó *eredő erők* szélső értéke a 4c., képlet szerint:

$$V_{\max} = +\delta S = +2000 \text{ kg}, \quad V_{\min} = -\delta S = -2000 \text{ kg}$$

A *nyomatékok* szélső értéke az 5c., képlet szerint:

$$M_{\min} = -37\,300 - 2000 \cdot \frac{72 - 24}{2} = -85\,300 \text{ kgcm}.$$

\*

Az alátömörített  $b$  hosszú szakaszokban az előbb kiszámított képletek szerint az *elméleti* szélső értékek  $\xi = \eta = 0,53$  helyen a következők:

$$\begin{aligned} \text{a felfelé irányuló} \quad V_{\max} &= +4900 \text{ kg} \\ \text{a lefelé irányuló} \quad V_{\min} &= -5100 \text{ kg} \\ \text{és} \quad M_{\max} &= +81\,180 \text{ kgcm} \end{aligned}$$

\*

### Megjegyzések

1. Az alátétlemező és a sántalp teherelosztó hatása folytán az eredő erők és nyomatékok elméleti csúcserkéi bizonyos mértékben letompulnak. Ezért — feltevésünk szerint — az eredő erő és nyomaték *mértékadó*, legnagyobb értéke nem lehet nagyobb azoknál a függvényértékeknél, amelyek a sínnyomás elméleti támadó pontjától (azaz az elméleti szélső értékek helyétől)  $\pm 6$  cm távolságban levő keresztmetszetekhez tartoznak. Eszerint példánkban a következő két abszcisszához tartozó függvényértékek közül ajánlatos a nagyobbakat mértékadókként kiválasztani:

$$\xi_1 = \eta + \frac{6}{85} = 0,60 \quad \text{vagy} \quad \xi_2 = \eta - \frac{6}{85} = 0,46.$$

2. Az alátömörített  $b$  hosszú szakaszok vizsgálatát a fellovágás nélküli terhelési változatra is célszerű elvégezni, vagyis olyan módon, hogy

$$\delta = 0$$

helyettesítésével a fent bemutatott műveleteket megismételve határozzuk meg az eredő erők és nyomatékok függvényeit. Ebben az esetben nyilván  $M_B$  nyomatékra más értéket kapunk, és ezért megváltoznak a függvények együtt-hatói is.

Ha  $\delta = 0$ , akkor

$$\frac{M_B}{S} = \frac{2EI_1 e - \frac{c}{2} b^2 + e^2}{2EI_1 \psi + b + \frac{I_1}{I_2} \cdot d} \quad \text{és} \quad r = e - \frac{M_B}{S}$$

$$\frac{M_B}{S} = + \frac{1075}{784} = + 1,37 \quad \text{és} \quad r = + 2,50 - 1,37 = + 1,13 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{b} = \frac{1,13}{85} = 0,0133, \quad \beta_1 = + 16,00, \quad \beta_2 = + 33,60$$

$$\beta_3 = + 15,60, \quad \beta_4 = - 2,000, \quad q_0 = \frac{S}{b} = \frac{10\,000}{85} = 118 \text{ kg/cm}$$

$$q_\xi = 118 \cdot [16,00 \xi^4 - 33,60 \xi^3 + 15,60 \xi^2 + 2,00 \xi] \text{ kg/cm}$$

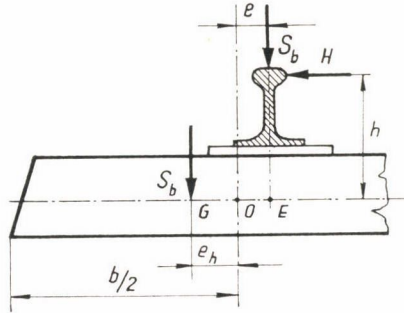
$$V_\xi = 10\,000 \cdot [3,20 \xi^5 - 8,40 \xi^4 + 5,20 \xi^3 + 1,00 \xi^2] \text{ kg}$$

$$M_\xi = 850\,000 \cdot [0,533 \xi^6 - 1,680 \xi^5 + 1,300 \xi^4 + 0,333 \xi^3] \text{ kgcm}$$

$$\eta = \frac{1}{2} + \frac{2,50}{85} = 0,53$$



1. A sínnyomások egyenlőtlenségének megfelelő vertikális és horizontális túlterhelés hatása.
  2. A fellovaglás aszimmetriájának hatása.
  3. A két sín alatti besüllyedések különbségének hatása.
1. Amikor a baloldali sínnyomás ( $S_b$  kg) nagyobb a jobboldalinál ( $S_j$  kg), akkor  $S_b = S + \Delta S$  és ugyanakkor  $S_j = S - \Delta S$ , ahol  $\Delta S$  a vertikális túlterhelés mértékadó nagyságát jelöli.



12. ábra

$+\Delta S$  vertikális túlterhelés hatásával egyidejűleg a keresztalj erőjátékát módosítja a külső sínszál belső élére támadó  $H$  kg horizontális erő is, vagyis az az erő, amely a túlemelésnek megfelelő sugárirányú erő és a centrifugális gyorsulásnak megfelelő erő különbsége. Ezzel a hatással a legegyszerűbb módon a következőképpen számolhatunk:

$S_b$  sínnyomás támadópontja a keresztalj szilárdsági tengelye mentén eltolódik negatív irányba  $E$  pontból a  $G$  jelű pontba  $H \cdot h = M_h$  negatív értelmű nyomaték hatására (12. ábra).  $h$  cm ebben az esetben  $H$  kg erő támadópontjának magasságát jelöli a keresztalj szilárdsági tengelye felett.  $O$  jelű forgáspontra vonatkozó nyomatéki egyensúly feltételéből következik, hogy

$$e_h = e - \frac{M_h}{S_b} = e - h \frac{H}{S_b}.$$

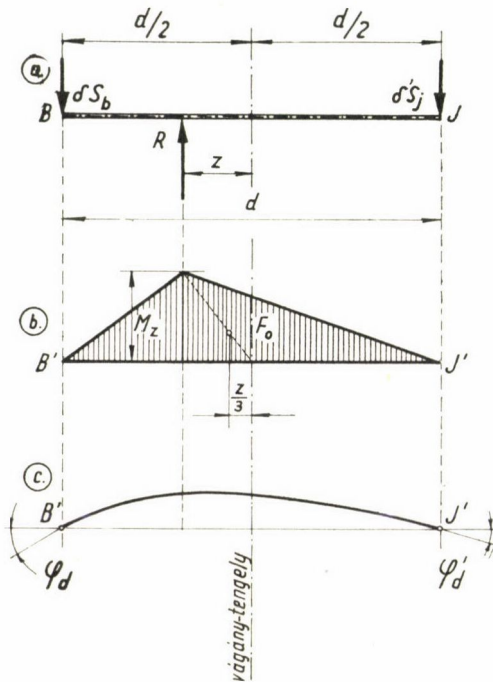
Tehát a horizontális erő hatása abban nyilvánul meg az aszimmetrikus terhelés számításánál, hogy a keresztalj *baloldalára* vonatkozó képletekben  $e$  excentricitás helyére  $e_h$  kerül.

\*

2. A két sínnyomás különbözősége folytán feltehető, hogy a fellovaglás is aszimmetrikussá válik oly módon, hogy az alj középső szakaszában a talpnyomások  $R$  kg eredőjének támadó pontja a vágánytengelytől valamely  $z$  cm távolságra tolódik el balfelé, azaz a nagyobbik sínnyomás helye felé. A feladat megoldása végett most is a törzstartónak a két csuklópontja ( $B$  és  $J$ ) között fekvő  $d$  hosszú középső rész erőjátékát kell megvizsgálni, és meghatározni az átmetszések folytán sztatikailag határozottá vált szerkezeti rész  $B'$  és  $J'$  jelű két véglapjának elfordulási szögeit az excentrikusan támadó



$R$  eredő hatása alatt. Ennek a két szögnek az abszolút értéke az aszimmetria folytán most nyilván nem lesz egyenlő, ugyanis a két véglap elfordulási szöge azonos azokkal a  $\varphi_d$  és  $\varphi'_d$  szögekkel (13. c ábra), amelyeket az elasztikus görbe végérintői zárnak be a két csuklópontot összekötő egyenessel.



13. ábra

Az  $a$  ábra szerint:

$$\delta S_b = \frac{R}{d} \cdot \left( \frac{d}{2} + z \right) \quad \text{és} \quad \delta' S_j = \frac{R}{d} \cdot \left( \frac{d}{2} - z \right),$$

tehát

$$\delta = \frac{R}{S_b} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{d} \right) \quad \text{és} \quad \delta' = \frac{R}{S_j} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{d} \right).$$

A  $b$  ábra szerint:

$$M_z = \delta S_b \cdot \left( \frac{d}{2} - z \right) = \frac{R}{d} \cdot \left( \frac{d^2}{4} - z^2 \right).$$

Mivel a nyomatéki ábra most háromszög alakú, ezért a területe:

$$F_0 = \frac{d}{2} \cdot M_z = \frac{R}{2} \cdot \left( \frac{d^2}{2} - z^2 \right).$$

A terület súlypontjának távolsága a vágánytengelytől  $z/3$ , tehát a  $B$  jelű csuklónál:

$$\varphi_d = \frac{F_0}{E_2 I_2 d} \cdot \left( \frac{d}{2} + \frac{z}{3} \right) = \frac{\delta S_b}{2 E_2 I_2} \cdot \left( \frac{d}{2} - z \right) \cdot \left( \frac{d}{2} + \frac{z}{3} \right) \quad (17a)$$

és a  $J$  jelű csuklónál:

$$\varphi'_d = \frac{F_0}{E_2 I_2 d} \cdot \left( \frac{d}{2} - \frac{z}{3} \right) = \frac{\delta' S_j}{2 E_2 I_2} \cdot \left( \frac{d}{2} + z \right) \cdot \left( \frac{d}{2} - \frac{z}{3} \right) \quad (17b)$$

(A két szög nyilván ellentétes értelmű, de ebben az esetben egyértelműnek kell tekinteni, mivel az alj jobbfelén  $x - x$  irány haladási értelme is ellentétes értelmű, mint a balfelén.)

\*

3. A terhelés aszimmetriája folytán a két sín alatti besüllyedés sem egyenlő, mert ez

a baloldalon 
$$y_b = \frac{(1 - \delta) \cdot S_b}{D}$$

és a jobboldalon 
$$y_j = \frac{(1 - \delta') \cdot S_j}{D}$$

Ahol  $D$  kg/cm az a fajlagos erő a sínnyomások helyén, amely a keresztaljnak a sín alatti részét 1 cm mélyre volna képes az ágyazásba benyomni. Mivel a felovaglás folytán az alátömörített  $b$  hosszú szakaszokban a teljes sínnyomások helyett ezeknek  $\delta S_b$ -, illetve  $\delta' S_j$ -vel csökkentett része hárul az ágyazásra, ezért az ágyazás összenyomódásából származó besüllyedés is a teljes besüllyedésnek arányosan csökkentett része.

Ezek szerint a sínnyomások támadó pontjait ( $E$  és  $F$  pontokat) összekötő egyenes az alj besüllyedése után  $\overline{E'F'}$  ferde egyenes helyzetébe kerül (14. ábra), amelyik  $\vartheta$  szöggel hajlik az alapirányhoz. Viszonylag kis szögről lévén szó, írható, hogy

$$\vartheta \sim \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y_b - y_j}{t} = \frac{(1 - \delta) S_b - (1 - \delta') S_j}{Dt},$$

ahol  $t$  cm = a nyomtáv + a sínkorona szélessége.

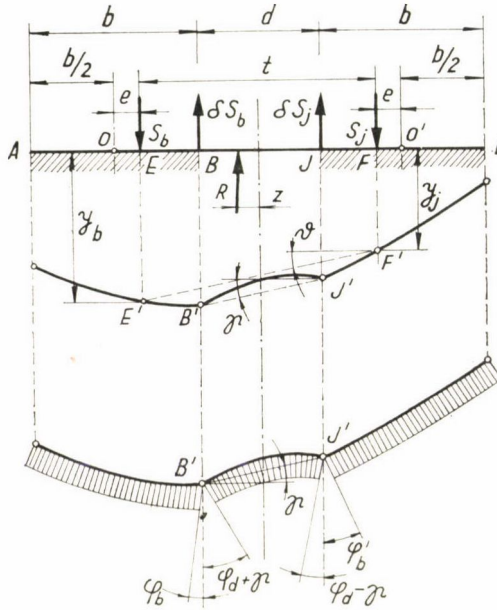
Ugyancsak az alj bal- és jobboldali részének egyenlőtlen lesüllyedése folytán a törzstartó  $B'$  és  $J'$  jelű (képzelt) csuklóit összekötő  $\overline{B'J'}$  egyenes valamely  $\gamma$  szöggel hajlik el az alapiránytól.

Mivel  $\overline{B'J'}$  egyenes közel párhuzamos  $\overline{E'F'}$  egyenessel, a számítás egyszerűsítése kedvéért elfogadható, hogy

Amint az ábra is mutatja, a törzstartónál a csuklók közötti  $d$  hosszú összekötő rúd baloldali véglapjának a  $B'$  jelű csuklón átmenő függőleges síkkal bezárt szöge ( $\varphi_d$ ) ezzel a  $\gamma$  szöggel megnövekedik, miközben a jobboldali  $J'$  jelű csuklónál levő véglap elfordulása ( $\varphi'_d$ ) ezzel a  $\gamma$  szöggel csökken.

$$+\gamma = \frac{(1 - \delta) \cdot S_b}{Dt} \cdot \left[ 1 - \frac{(t - \delta') \cdot S_j}{(1 - \delta) \cdot S_b} \right] \quad (18a)$$

$$-\gamma = \frac{(1 - \delta') \cdot S_j}{Dt} \cdot \left[ \frac{(1 - \delta) \cdot S_b}{(1 - \delta') \cdot S_j} - 1 \right] \quad (18b)$$



14. ábra

#### A sztatikailag határozatlan $M_B$ és $M_J$ nyomatékok képletei

A keresztalj sztatikailag kétszeresen határozatlan szerkezet, ezért csak szimmetrikus terhelés alatt számítható egyszeresen határozatlan szerkezet módján, de abban az általánosabb esetben, amikor a terhelés aszimmetrikus, a határozatlanság feloldásához két ismeretlen rugalmas mennyiséget kell előre meghatározni. Erre a szerepre a legcélszerűbb a  $B$  és  $J$  jelű (lásd a 11. ábrán) keresztmetszetekre támadó  $M_B$  és  $M_J$  nyomatékokat választani ki, mert ez az a két keresztmetszet, amelyek a keresztaljnak a két szélő, alávert szakaszát az összekötő rúdtól elválasztják. Ezért indokolt a törzstartót oly módon alakítani ki, hogy a keresztaljat ennél a két keresztmetszetenél alkalmazott két átmetszéssel képzeletben három részre daraboljuk, és a folytonos anyagi összefüggés helyett a kapcsolat számára egy-egy csuklót iktatunk közbe (a  $B$  és  $J$  jelű csuklót).

Mivel  $M_B$  és  $M_J$  értékei a keresztalj bal- és jobboldali részén kialakuló erőjátékok kölcsönös egymásra hatása közben fejlődnek ki, meghatározásukhoz alkalmazzuk a kétszeres sztatikai határozatlanság feloldására használatos, két ismeretlenes két egyenlet megoldásait:

$$m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{10} = 0$$

$$m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{20} = 0$$

Itt  $x_1 = M_B$  és  $x_2 = M_j$ .

Esetünkben a törzstartó szimmetriája folytán a hatástényezők páronként egyenlők egymással:

$$m_{22} = m_{11} \text{ és } m_{21} = m_{12}.$$

Eszerint az egyenletrendszer megoldása:

$$M_B = \frac{m_{12}m_{20} - m_{11}m_{10}}{m_{11}^2 - m_{12}^2} \quad (19a)$$

$$M_j = \frac{m_{12}m_{10} - m_{11}m_{20}}{m_{11}^2 - m_{12}^2} \quad (19b)$$

$$m_{11} = 2E_1J_1 \cdot \left[ 1 + \frac{b}{2d} \right] \cdot \psi + b + \frac{2}{3} \cdot \frac{E_1J_1}{E_2J_2} \cdot d - \frac{cb^2}{2d} \quad (20a)$$

$$m_{12} = -2E_1J_1 \cdot \frac{b}{2d} \cdot \psi + \frac{1}{3} \frac{E_1J_1}{E_2J_2} \cdot d + \frac{cb^2}{2d}, \quad (20b)$$

ahol  $c = 0,0424$  állandó érték, amint ezt már a szimmetrikus terhelési változat tárgyalásánál kimutattuk.

Amikor kísérleti adatok hiányában meg kell elégednünk  $D$  kg/cm fajlagos erőnek valamilyen módon becsült értékével, akkor ennek felhasználásával az ellenálló nyomaték tényezőjének *elméleti értékét* nagyságrendileg a következő képlettel lehet megközelíteni (lásd „Függelék” I. részében):

$$\psi = \frac{17}{Db^2} \quad (21)$$

A terhelési tényezők a következő képletek szerint számíthatók ki:

$$m_{10} = 2E_1J_1 \cdot [\varphi_b + \varphi_d + \gamma] \quad (22a)$$

$$m_{20} = 2E_1J_1 \cdot [\varphi'_b + \varphi'_d - \gamma] \quad (22b)$$

$$2E_1J_1\varphi_b = S_b \cdot \left[ 2E_1J_1 \cdot \left( e_h - \delta \frac{b}{2} \right) \cdot \psi - \left( (1 - \delta)c + \frac{3}{4}\delta \right) \cdot \frac{b^2}{2} + e_h^2 \right]$$

( $\varphi_b$  szögnek ez a képlete azonos módon igazolható, mint ahogy már ezt a szimmetrikus terhelési változatnál igazoltuk. Lásd a 12. számú képletet.)

$$2E_1J_1 \cdot \varphi_d = \frac{E_1J_1}{E_2J_2} \cdot \delta S_b \cdot \left( \frac{d}{2} - z \right) \cdot \left( \frac{d}{2} + \frac{z}{3} \right)$$

$$2 E_1 J_1 \cdot \gamma = 2 E_1 J_1 \cdot S_b \cdot (1 - \delta) \cdot \frac{1 - \frac{(1 - \delta') S_j}{(1 - \delta) S_b}}{D \cdot t}$$

$$2 E_1 J_1 \cdot \varphi'_b = S_j \left[ 2 E_1 J_1 \cdot \left( e - \delta' \frac{b}{2} \right) \cdot \psi - \right. \\ \left. - \left( (1 - \delta') c + \frac{3}{4} \delta' \right) \cdot \frac{b^2}{2} + e^2 \right]$$

$$2 E_1 J_1 \cdot \varphi'_d = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} \cdot \delta' S_j \cdot \left( \frac{d}{2} + z \right) \cdot \left( \frac{d}{2} - \frac{z}{3} \right) \\ - 2 E_1 J_1 \cdot \gamma = - 2 E_1 J_1 \cdot (1 - \delta') \cdot S_j \cdot \frac{\frac{(1 - \delta) \cdot S_b}{(1 - \delta') \cdot S_j} - 1}{D \cdot t} .$$

\*

Vizsgáljuk meg  $M_B$  és  $M_J$  nyomatékok fenti, általános érvényű képleteit arra a már bemutatott speciális esetre, amikor a terhelés szimmetrikus, vagyis amikor

$$\varphi_b = \varphi'_b, \quad \varphi_d = \varphi'_d, \quad \gamma = 0, \quad \Delta S = 0, \quad H = 0$$

$$S_b = S_j = S$$

Ezek szerint  $m_{10} = m_{20}$   
tehát

$$M_B = \frac{(m_{12} - m_{11}) \cdot m_{10}}{(m_{11} - m_{12}) \cdot (m_{11} + m_{12})} = M_J$$

$$M_B = - \frac{m_{10}}{m_{11} - m_{12}} = - \frac{2 E_1 J_1 \cdot (\varphi_b + \varphi_d)}{2 E_1 J_1 \psi + b + \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} d}$$

Ha  $\varphi_d$  elfordulási szög helyén a szimmetrikus fellovágás esetére levezetett szög 13. számú képletét alkalmazzuk, akkor  $M_B$  nyomatéknak ugyanarra a 2. számú képletére jutunk, amelyet a szimmetrikus terhelési változat számára már levezettünk.

\*

### *A hatástényezők képleteinek igazolása*

$m_{11}$  és  $m_{12}$  hatástényezők képleteinek magyarázata a következő:

$$m_{11} = 2 E_1 J_1 \cdot \kappa'_0 + \Delta m_{11},$$

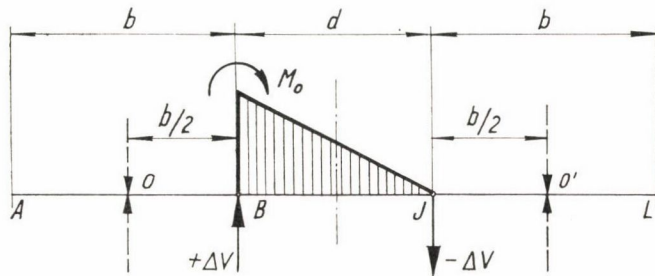
ahol  $\kappa'_0$  jelenti a  $b$  hosszban beágyazott rúd  $B$  jelű véglapjának a törzstartó  $B$  jelű csuklója körüli elfordulási szögét, amely az erre a véglapra támadó egységnyi ( $M_0 = 1$  kgcm) nyomaték hatására alakul ki. A „szimmetrikus terhelésnél” levezetett képlet szerint:

$$\kappa'_0 = \psi + \frac{b}{2 E_1 J_1}$$

$\Delta m_{11}$  meghatározása végett vizsgáljuk meg a  $d$  hosszú közbülső (ún. összekötő) rúd  $B$  jelű véglapjára támadó egységnyi nyomaték hatására (15. ábra) a  $B$  jelű csuklónál keletkező szögforgást. Ez az elfordulás három szögforgás összegeként alakul ki:

1. A nyomatéki ábra az összekötő rúdra rajzolt háromszög, amelynek területe:  $\frac{1 \cdot d}{2} = \frac{d}{2}$  és ennek nyomatéka a  $J$  jelű csuklópontra:  $\frac{d}{2} \cdot \frac{2}{3} d = \frac{1}{3} d^2$ . Tehát a  $B$  jelű csuklónál okozott elfordulás:

$$\Delta \varphi'_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{E_2 J_2 d} = \frac{d}{3 E_2 J_2}$$



15. ábra

2. Ugyanennek a pozitív egységnyi nyomatéknak hatására  $B$  csuklóponton  $+\Delta V = \frac{1}{d}$  nagyságú, felfelé irányuló erő ébred.  $\overline{AB}$  szakasz  $O$  jelű középpontjában felvesszük  $\pm \Delta V$  nullértékű erőpárt, amelynek a felfelé irányuló  $+\Delta V$  része folytán  $\overline{AB}$  rúd alulról konkáv módon felgömbül, és így  $B$  csuklónál  $\overline{AB}$  szakasz  $B$  véglapja

$$\Delta \varphi''_B = - \frac{cb^2}{4 E_1 J_1} \cdot \Delta V = - \frac{cb^2}{4 E_1 J_1 d}$$

elfordulásra kényszerül (lásd  $\varphi_{00}$  jelű szögnek a szimmetrikus terhelés tárgyalásánál levezetett képletét).

3. Végül az  $\overline{AB}$  szakasz  $O$  jelű súlyvonalára támadó  $\frac{b}{2} \cdot \Delta V = \frac{b}{2d}$  nagyságú nyomaték hatására az egész  $\overline{AB}$  szakasz — és ezzel együtt  $B$  véglap is —

$$\Delta \varphi''' = \frac{b}{2d} \psi$$

szöggel fordul el.

Ezek szerint

$$\begin{aligned} \Delta m_{11} &= 2 E_1 J_1 \cdot [\Delta \varphi'_B + \Delta \varphi''_B + \Delta \varphi'''_B] = \\ &= 2 E_1 J_1 \cdot \frac{b}{2d} \cdot \psi + \frac{2 E_1 J_1}{3 E_2 J_2} \cdot d - \frac{cb^2}{2d}. \end{aligned}$$

Ehhez a kifejezéshez hozzáadva  $2E_1 J_1 \alpha'_0$  formuláját, összevonás után  $m_{11}$  hatástényezőnek a fent megadott  $20a$  számú képlethez jutunk.

Ha ugyanennek az egységnyi nyomatéknak, amely a közbülső rúd  $B$  jelű véglapján támad, a törzstartó  $J$  jelű csuklójánál előidézett hatását, és pedig az erre a hatásra keletkező szögforgást vizsgáljuk meg, akkor az előbbi magyarázat értelemszerű módosításával  $m_{12}$  jelű hatástényezőnek  $20b$  számú képletét kapjuk.

\*

#### *A számítás menete*

$M_B$  és  $M_J$  nyomatékok meghatározása után kiszámítjuk a talpnyomások megoszlási ábráinak súlyponti excentricitásait:  
a baloldali alátömörített szakasz alatt

$$r = \frac{1}{1 - \delta} \cdot \left[ e_h - \delta \frac{b}{2} = \frac{M_B}{S_b} \right]$$

ugyanaz a jobboldalon

$$r' = \frac{1}{1 - \delta'} \cdot \left[ e - \delta' \frac{b}{2} = \frac{M_J}{S_j} \right].$$

Megjegyzés:

A jobboldali alávért szakaszban a koordinátarendszer kezdőpontjaként a keresztalj talpvonalának jobboldali végpontját (a 11. ábrán  $L$  jelű pontot), és  $x-x$  pozitív irányaként a jobbról balra mutató irányt kell tekinteni. Eszerint  $r'$  akkor pozitív értelmű, amikor a megoszlási ábra súlypontja az alávért szakasz középvonalától *balra* fekszik, úgyszintén  $M_J$  nyomaték akkor pozitív, amikor forgatása az óramutató járásával *ellen-  
tées* értelmű.

\*

$r$  értékének kiszámítása után, ennek felhasználásával meghatározzuk a *baloldali szakaszra* vonatkozó  $\beta$  jelű együtthatókat, és ezek alkalmazásával, valamint  $S = S_b$  és  $e = e_h$  helyettesítésével, a szimmetrikus terhelés megfelelő képleteinek mintájára felírjuk a talpnyomások, eredő erők és nyomatékok függvényeit, amelyek az aszimmetrikus terhelésű keresztalj baloldali szakaszára vonatkoznak.

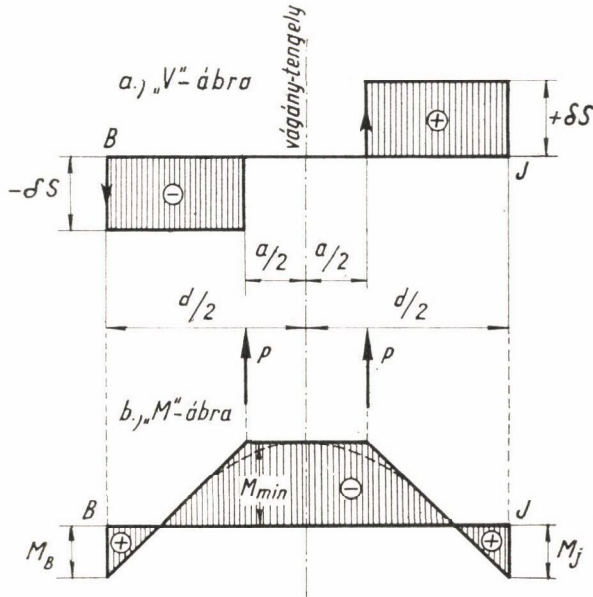
A *közbülső* ( $d$  hosszú) *szakasz* keresztmetszeteire balról ható eredő erők és nyomatékok ábráját a  $16a$  és  $b$  ábra mutatja. (A  $b$  ábra annak az esetnek felel meg, amikor  $M_B$  és  $M_J$  nyomatékok egyaránt pozitív értelműek.) Ezek szerint

$$V_{\max} = + \delta S_j = + R \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{d} \right) \quad (23a)$$

$$V_{\min} = -\delta S_b = -R \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{d} \right) \quad (23b)$$

Ugyanis az eredők pozitív értelme felfelé mutat. A nyomaték szélső értékének képlete:

$$M_{\min} = -\frac{1}{d} \cdot \left[ R \cdot \left( \frac{d^2}{4} - z^2 \right) - M_B \cdot \left( \frac{d}{2} + z \right) - M_J \cdot \left( \frac{d}{2} - z \right) \right]. \quad (24)$$



16. ábra

\*

Ezzel a kitűzött célt elértük, mert a keresztalj teljes erőjátéka a bemutatott képletsorozat alkalmazásával minden terhelési változat esetére meghatározható.

Abban a rendes esetben, amikor a keresztalj közbülső része  $B$  és  $J$  jelű keresztmetszetek között ugyanabból az anyagból készül, mint amilyen anyagból vannak a szélső szakaszai, akkor a képletek  $E_1 = E_2 = E$  helyettesítésével egyszerűsíthetők. Ugyancsak egyszerűsödnek a képletek akkor, ha a fellovágás  $\delta$  és  $\delta'$  tényezőit zérussal vesszük egyenlőknek, vagyis feltesszük, hogy nincs fellovágás ( $R = 0$ ). Evvel a változattal akkor kell számolni, amikor az alj szélső,  $b$  hosszú szakaszának mértékadó ( $V_{\max}$  és  $M_{\max}$ ) igénybevételét keressük. Ámbár — amint az I. példánál is — sok esetben a  $b$  hosszú, alátömörített részek számára is a fellovágás terhelési változata lehet a mértékadó. Viszont a közbülső,  $d$  hosszú szakasz vizsgálatát mindig a részleges fellovágás figyelembe vételével meghatározott  $V_{\min}$  és  $M_{\min}$  alapján kell elvégezni.



## II. Példa

Aszimmetrikus terhelési változatra is ugyanazt a feszített betonkeresztaljat vizsgáljuk meg, amelyeknek az adataival az I. példában számoltunk. Most terhelési feltételeként a következőket vesszük fel:

$$S = 10\,000 \text{ kg}, \quad \pm \Delta S = \pm 0,14S = \pm 1400 \text{ kg}$$

eszerint  $S_b = 11\,400 \text{ kg}$  és  $S_j = 8600 \text{ kg}$

$$H = 3500 \text{ kg}, \quad h = 24,1 \text{ cm}$$

tehát  $e_h = +2,5 - \frac{3500}{11\,400} \cdot 24,1 = -4,9 \text{ cm}$ .

A feltételezett részleges fellovágás adatai:

$$R = 2200 \text{ kg} \quad z = 5 \text{ cm}$$

eszerint  $\delta = \frac{2200}{11\,400} \cdot \left(0,5 + \frac{5}{72}\right) = 0,11$

$$\delta' = \frac{2200}{8600} \cdot \left(0,5 - \frac{5}{72}\right) = 0,11.$$

A hatástényezők 20a. és 20b. képletek szerint:

$$m_{11} = 159 \cdot 489 + 85 + \frac{2}{3} \cdot 2,92 \cdot 72 - 0,0424 \cdot \frac{85^2}{2 \cdot 72} = \underline{+1001 \text{ cm}}$$

$$m_{12} = -\frac{85}{2 \cdot 72} \cdot 489 + \frac{1}{3} \cdot 2,02 \cdot 72 + 0,0424 \cdot \frac{85^2}{2 \cdot 72} = \underline{-216 \text{ cm}}$$

A terhelési tényezők kiszámítása a 22a., és 22b. képletek szerint:

$$\frac{1}{S_b} \cdot 2EJ_1 \varphi_k = -5092 \text{ cm}, \quad \frac{1}{S_b} \cdot 2EJ_1 \varphi_d = +375 \text{ cm}^2$$

$$\frac{1}{S_b} \cdot 2EJ_1 \gamma = +297 \text{ cm}^2$$

$$m_{10} = -11\,400 \cdot [-5092 + 375 + 297] = \underline{+50\,388\,000 \text{ kgcm}^2}$$

$$\frac{1}{S_j} \cdot 2EJ_1 \varphi'_b = -1492 \text{ cm}^2, \quad \frac{1}{S_j} \cdot 2EJ_1 \varphi'_d = +452 \text{ cm}^2$$

$$-\frac{1}{S_j} \cdot 2EJ_1 \gamma = -394 \text{ cm}^2$$

$$m_{20} = -8600 \cdot [-1492 + 452 - 394] = \underline{+12\,332\,400 \text{ kgcm}^2}.$$

A nyomatékok számítása a 19a. és 19b. képletek szerint:

$$M_B = \frac{m_{12} \cdot m_{20} - m_{11} \cdot m_{10}}{(m_{11} + m_{12}) \cdot (m_{11} - m_{12})} = -55\,587 \text{ kgcm}$$

$$M_J = \frac{m_{12} \cdot m_{10} - m_{11} \cdot m_{20}}{(m_{11} + m_{12}) \cdot (m_{11} - m_{12})} = -24\,350 \text{ kgcm}$$

a 24. képlet szerint:

$$M_{\min} = -\frac{1}{72} \cdot \left[ 2200 \cdot \left( \frac{72^2}{4} - 5^2 \right) + 55\,587 \cdot \left( \frac{72}{2} + 5 \right) + 24\,350 \cdot \left( \frac{72}{2} - 5 \right) \right] = -80\,974 \text{ kgcm}$$

$$\underline{M_{\min} = -0,81 \text{ tm.}}$$

Mivel a fellovágás valamilyen szabálytalan módon megoszló ágyazási nyomás eredménye, ezért ennek a nyomatékknak az itt kiszámított elméleti csúcserőértéke a valóságban többé-kevésbé letompítva jöhet létre valahol a keresztalj közbülső részének közepe táján.

Ugyanitt az eredő erők szélső értékei a 23a. és 23b. képletek szerint:

$$V_{\max} = 2200 \cdot \left( 0,50 - \frac{5}{72} \right) = +946 \text{ kg}$$

$$V_{\min} = -2200 \cdot \left( 0,50 + \frac{5}{72} \right) = -1254 \text{ kg}$$

\*

Kiszámítjuk a baloldali alátömörített szakasz igénygevételeit annak a terhelési változatnak esetére, amikor nincs fellovágás, vagyis

$$\delta = 0 \quad \text{és} \quad \delta' = 0.$$

Ebben az egyszerűbb esetben  $m_{10}$  és  $m_{20}$  terhelési tényezők a következőképpen módosulnak:

$$\frac{1}{S_b} \cdot 2EJ_1 \varphi_b = -2525 \text{ cm}^2, \quad \frac{1}{S_b} \cdot 2EJ_1 \varphi_d = 0$$

$$\frac{1}{S_b} \cdot 2EJ_1 \gamma = +334 \text{ cm}^2$$

$$m_{10} = -11\,400 \cdot [2525 + 334] = +24\,977\,400 \text{ kgcm}^2$$

$$\frac{1}{S_i} \cdot 2EJ_1 \varphi'_b = +1075 \text{ cm}^2, \quad \frac{1}{S_j} \cdot 2EJ_1 \varphi'_d = 0$$

$$-\frac{1}{S_j} \cdot 2EJ_1 \gamma = -443 \text{ cm}^2$$

$$m_{20} = -8600 \cdot [+1075 - 443] = -5\,435\,200 \text{ kgcm}^2$$

$$M_B = \frac{-216 \cdot [-5435] - 1001 \cdot 24\,977}{725 \cdot 1,217} = -24\,951 \text{ kgcm}$$

$$r = e_h - \frac{M_B}{S_b} = -4,9 + \frac{24\,951}{11\,400} = -2,7 \text{ cm}$$

$$\beta_1 = 16,0, \quad \beta_2 = 28,2, \quad \beta_3 = 7,5, \quad \beta_4 = -4,7$$

$$q_0 = \frac{S_b}{b} = \frac{11\,400}{14} = 134 \text{ kg/cm}$$

$$q_\xi = 134 \cdot [16,0 \xi^4 - 28,2 \xi^3 + 7,5 \xi^2 + 4,7 \xi] \text{ kg/cm}$$

$$\eta = \frac{1}{2} + \frac{e_h}{b} = 0,50 + \frac{-4,9}{85} = 0,4423.$$

A külső szakaszban, ahol  $0 \leq \xi \leq 0,4423$

$$V_{\xi} = 11\,400 \cdot [3,20 \xi^5 - 7,05 \xi^4 + 2,50 \xi^3 + 2,35 \xi^2] \text{ kg}$$

$$M_{\xi} = 969\,000 \cdot [0,533 \xi^6 - 1,410 \xi^5 + 0,625 \xi^4 + 0,783 \xi^3] \text{ kgcm}$$

a belső szakaszban, ahol  $0,4423 \leq \xi \leq 1,0000$

$$V_{\xi} = 11\,400 \cdot [3,20 \xi^5 - 7,05 \xi^4 + 2,50 \xi^3 + 2,35 \xi^2 - 1,000] \text{ kg}$$

$$M_{\xi} = 969\,000 \cdot [0,535 \xi^6 - 1,410 \xi^5 + 0,625 \xi^4 + 0,783 \xi^3 - (\xi - 0,4423)]$$

(kontroll: ha  $\xi = 1,00$ , akkor  $V_{\xi} = 0$  és  $M_{\xi} = M_B$ ).

Kiszámítjuk még az elméleti csúcserőértékeket  $\xi = \eta$  helyettesítésével:

$$V_{\max} = +5248 \text{ kg} \quad \text{és} \quad V_{\min} = -6152 \text{ kg}$$

$$M_{\max} = +69\,570 \text{ kgcm.}$$

Megállapíthatjuk, hogy ez az ún. „csúcs”-érték aránylag nagyon csökkent értékűnek mutatkozik az eddig számítottakhoz képest. Ennek egyszerű magyarázata abban található, hogy ennél a terhelési változatnál a sínnyomásnak az a horizontális komponense, amely a sínkorona belső élén támad, a talpnyomások nyomatekának értelmével olyan ellentétes értelmű nyomateköt fejthet ki, amely a „csúcs”-értéket számottevő mértékben leronthatja.

## Befejezés

Az itt bemutatott módszer és a régebbi számítási eljárások között az egyik lényeges különbség a *talpnyomások megoszlási módjára* vonatkozó feltevés *alapelveiben* van. A legegyszerűbb eljárás nyilván az, amelyik merev keresztalj feltételezésével az alávert szakaszok alatt egyenletesen, illetve — excentrikus sínnyomás alatt — lineárisan megoszló talpnyomásokkal számol. Ezzel szemben igen bonyolult képletsorozathoz vezet *Zimmermann* módszere, aki az alj rugalmas behajlásának figyelembevételével a megoszlási módjának alapelveként *Winkler* elvét alkalmazta, amely szerint a keresztalj talpfelületének minden pontján a talpnyomások a besüllyedésekkel volnának arányosak. Vagyis a keresztalj elasztikus görbéje bizonyos léptékben a talpnyomások megoszlási ábrájával azonos volna.

Sok kísérleti adatból leszűrt tanulság szerint ezek közül egyik módszerrel sem lehet elfogadható pontatlansággal megközelíteni a keresztaljak valóságos erőjátékát. Mégis *Zimmermann* módszerét a vasútépítéstan elmélete elfogadta és hosszú időn át ezt tekintette pontos módszernek, az ettől eltérőt pedig közelítő eljárásnak. A téves felfogásnak ez a tartóssága egyrészt a megbízható kísérletek végzésére alkalmas mérőműszerek hiányával, másrészt azzal magyarázható, hogy a gyakorlatnak nem volt nagy szüksége olyan elméleti vizsgálatokra, amelyeknek eredményei kísérletekkel is igazolhatók, mert a százéves gyakorlat közben kialakult talpfa-méreték elméleti igazolás nélkül is megbízhatóknak bizonyultak. Viszont azóta, amióta a *vasbeton* — és legújabban a *feszített beton* — *keresztaljak* tömeges gyártása megindult, előtérbe nyomult a tervezés és ellenőrzés részéről az olyan vizsgálati módszer iránti igény, amelyik módszer alkalmas a keresztaljak valóságos erőjátékának megközelítésére az ésszerűen megkívánható pontosság határain belül.

Kísérletekkel igazolható csak az olyan számítási eljárás eredménye lehet, amely kísérleti eredmények alapjára épült. Ezért indokolt, hogy új

módszerünk alapelveként azt a talajmechanikai kísérletekkel igazolt tényt választottuk, amely szerint a talpfeszültségek megoszlása szemcsés talajban harang alakú, és ebből a mechanikai elvből kiindulva vezettük le az eredő erők és nyomatékok képleteit. Viszont a megoszlási görbe harang alakjának *koncentrációjára* vonatkozó kísérleti adatok még hiányosak. Ezek pótlása végett még több olyan kísérletre van szükség, amelyeket már jól lejárt pályában fekvő keresztaljak talpa alatt célszerű végezni.

Bármilyen harang alakú görbe matematikai kifejezésére jó megközelítéssel alkalmas az olyan *negyedfokú racionális egészfüggvény*, amelynek öt együtthatóját úgy határozzuk meg, hogy a függvény a geometriai feltételeket, valamint a sztatikai egyensúly követelményeit kielégítse. Itt a geometriai feltételek közé soroljuk a kezdeti feltételek mellett a görbe *koncentrációjának mértékére* jellemző  $q_m/q_0 = \varrho$  viszonyszámot is, ahol  $q_0$  az átlagos talpnyomást jelöli,  $q_m$  pedig az alávert szakasz középvonala alatt jelentkező talpnyomást. Eszerint a talpnyomásokat kifejező  $q_\xi$  függvény  $\beta$  jelű együtthatói amellet, hogy általában a megoszlási görbe súlyponti excentricitásának ( $r$ ) függvényei, a koncentráció  $\varrho$  tényezőjétől is függenek az erről szóló fejezetünkben kifejtett képletek szerint. Ezek mellett még az a  $c$  jelű tényező is, amelyik  $M_B$  és  $M_J$  nyomaték képletében a számláló második tagjánál szerepel, szintén függvénye  $\varrho$  tényezőnek a következő módon:

$$c = \frac{3}{28} - \frac{4}{105} \varrho.$$

Az előbb bemutatott példákban olyan  $\beta$  együtthatókkal, valamint  $c$  tényezővel számoltunk, amelyek  $\varrho = 1,7$  értékű viszonyzámnak felelnek meg. Ezt az értéket közvetlen a pályában fekvő keresztaljak talpa alatt mért adatok hiányában más nyomókísérleti eredmények felhasználásával, összehasonlítások és egyéb műszaki megfontolások alapján vettük fel *valószínű* közepes értéként.

Viszont nyilvánvaló, hogy a talpnyomások megoszlásának *koncentrációja* és az ágyazás rugalmasságára jellemző adatok valódi értéke, valamint az *ellenálló nyomaték tényezője* is igen sok körülménytől függ, tehát ugyanannál az ágyazási anyagnál is tág határok között ingadozik. Független az anyag fizikai tulajdonságaitól (pl. a szemszerkezetétől), az állapotától (tömörségétől), de ezek mellett még a nyomólap alakjától és méreteitől, valamint a terhelés változásának sebességétől is függ. Ezért csak több, tervszerűen végrehajtott kísérlet eredményeinek birtokában lehet megállapodni abban, hogy  $\varrho$ ,  $D$  kg/cm és  $\psi$  kg<sup>-1</sup>cm<sup>-1</sup> tényezőknél melyek azok a számszerű értékei, amelyekkel a legcélszerűbben számolhatunk a keresztaljak sztatikai vizsgálatánál anélkül, hogy bármelyik irányba túlzásba mennénk, vagyis anélkül, hogy a keresztaljak túl- vagy alulméreteznők.

Lényegileg itt is ugyanolyan műszaki mérlegelést kell végezni, mint a részleges felovaglás mértékét kifejező  $\delta$  tényező felvételénél, amikor  $\delta$ -nak azt a számszerű értékét kell megállapítani, amely a sztatikai vizsgálat számára — a vizsgálat gyakorlati céljának szem előtt tartásával — a legcélszerűbbnek mutatkozik. Eszerint  $\varrho$ ,  $D$  és  $\psi$  tényezők *valószínű közepes* értékeit is úgy kell megállapítani, hogy ezek megfeleljenek a pályafenntartás esetleges kisebb fogyatékoságai folytán bizonyos mértékben leromlott állapotú ágyazásra jellemző adatoknak.

Mindezeknek a tényezőknek a változása végeredményképpen a keresztalaj keresztmetszeteire ható legnagyobb eredők és nyomatékok értékeinek változásában jut kifejezésre. Új módszerünk alkalmas arra, hogy segítségével az egyes változó tényezők értékingadozásainak különféle hatásait egymástól szétválasztva vizsgálhassuk meg. Képletsorozatunkkal áttekinthetően követhetők az eredő erők és nyomatékok értékeiben várható olyan változások is, amelyek a keresztalaj bármelyik méretének (pl. az alátömörített, vagy akár az alátömörítés nélkül hagyott részei hosszának) megváltoztatásából következhetnek.

Mindezekért ez az új számítási módszer egyaránt alkalmas a sztatika vizsgálatra és tervezésre is, tehát hasznos eszköze lehet a műszaki fejlesztésnek.

## Függelék

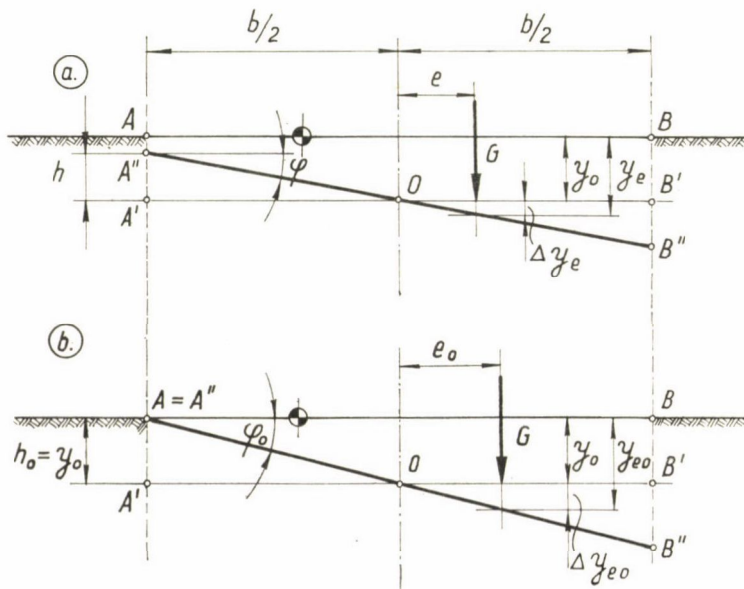
### I.

#### *Az ellenálló nyomaték tényezőjének meghatározása*

Az írásunk elején, „Az ellenálló nyomaték” című fejezetben kifejtett indokolás szerint feltehető, hogy a rugalmas ágyazásnak a nyomólap elfordulásával szemben kifejtett ellenálló nyomatéka — a gyakorlat számára figyelemre méltó értékhatárokon belül — egyszerűen arányos az elfordulás szögével, vagyis

$$M_p = - \frac{\varphi}{\psi},$$

ahol  $M_p$  kgcm a passzív, azaz ellenálló nyomaték,



17. ábra

$\varphi$  az elfordulás szöge,

$\psi$   $\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}$  az arányossági tényező, azaz az ellenálló nyomaték tényezője. Eredeti definíciónk szerint ennek a tényezőnek fizikai értelme nem más, mint annak az elfordulásnak a szöge, amelyet a talp a rugalmas ágyazásban szabadon (vagyis minden más mozgástól függetlenül) végezne a nyomófelületnek valamelyik meghatározott irányú súlyponti tengelyére támadó, egységnyi ( $M_0 = 1 \text{ kgcm}$ ), aktív nyomaték hatására.

$\psi$  tényező számszerű értékét egyszerű kísérlettel lehet megállapítani a következő *a*) fejezetben leírt módon, de kísérleti adatok hiányában ez az érték elméleti úton is megközelíthető a *b*) fejezetben bemutatásra kerülő képlet alkalmazásával.

#### a) A kísérleti érték meghatározása

Az ismert méretű ( $v$  cm széles és  $b$  cm hosszú), téglalap alakú, és közelítőleg merevnek tekinthető, vízszintes nyomólapot a nyomófelület  $O$  jelű súlypontjára támadó  $G$  kg súlyerővel az ágyazásba benyomjuk, és megmérjük az  $O$  pont  $y_0$  cm lesüllyedését. Ezután  $G$  súlyt  $O$  pontból kimozdítva fokozatosan jobbra helyezzük át valamilyen  $e$  cm távolságra, arra ügyelve, hogy a nyomólap baloldali széle eközben ne emelkedjék fel az eredeti szintnél (azaz a tehermentes állapot szintjénél) magasabbra (17a ábra). Ebben az új helyzetben  $G$  súly  $y_e$  cm mélyre süllyedt le, és  $O$  középponttól  $e$  cm távolságra toldott el. Ezt a két kísérleti adatot is megmérjük és kiszámítjuk  $\Delta y_e = y_e - y_0$  süllyedéskülönbséget.

A nyomólap ebben az elferdült helyzetében a vízszintestől  $\varphi$  szöggel hajlik el, ahol

$$\text{tg } \varphi = \frac{\Delta y_e}{e} \sim \varphi$$

(ugyanis kis szögekről lévén szó, a szög abszolút mérőszáma a tangensének értékével felcserélhető). Az új helyzetben az egyensúly folytán az ellenálló nyomaték:

$$M_p = -eG$$

tehát az ellenálló nyomaték tényezője:

$$\psi = \frac{\varphi}{-M_p} = \frac{\Delta y_e}{Ge^2}. \quad (25)$$

Vagyis  $G$  súly támadópontja excentricitásának és süllyedéskülönbségének adataiból  $\psi$  tényező kísérleti értéke egyszerű módon állapítható meg.

#### b) Az elméleti érték számítása

Abban az általános esetben, amikor kísérleti adatok hiányában meg kell elégednünk  $D$  kg/cm fajlagos erőnek (illetve  $C$  kg/cm<sup>3</sup> ágyazási együtthatónak) valamilyen becsült értékével, akkor ennek felhasználásával az ellenálló nyomaték tényezőjének *elméleti értékét* a következőkben kifejtett képlet alkalmazásával lehet számítással megközelíteni.

Azt a határesetet vizsgáljuk meg, amelyik úgy áll elő, hogy a nyomólap  $O$  pontjából kimozdított  $G$  súly addig vándorol jobb felé, amíg a nyomólap bal széle éppen a terheletlen alapsík szintjére emelkedik fel (17b ábra). Ebben a határhelyzetben a súly excentricitása  $e_0$  cm és a talpvonal elferdülésének szöge  $\varphi_0$ . A nyomólap középpontjának (azaz  $O$  jelű pontnak) lesüllyedése változatlanul  $y_0$  maradt<sub>3</sub>

$$y_0 = \frac{G}{D} = \varphi_0 \frac{b}{2}$$

$$\varphi_0 = \psi e_0 G = \psi b G \varepsilon_0,$$

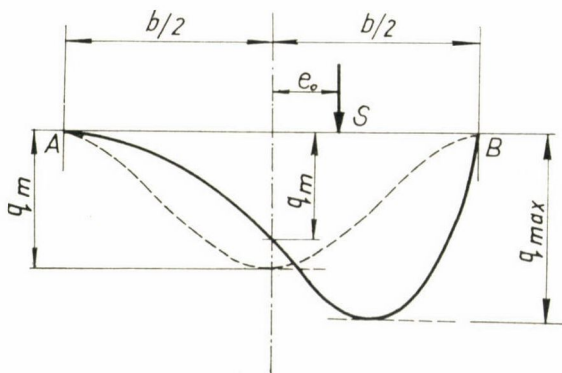
ahol  $\varepsilon_0 = e_0$  azaz az excentricitás viszonyított értéke.

$$\frac{G}{D} = \psi \frac{b^2}{2} G \varepsilon_0,$$

tehát

$$\psi = \frac{2}{Db^2 \varepsilon_0}. \quad (26)$$

$D$  kg/cm fajlagos erő becsült értéke, valamint a nyomófelület  $b$  cm hossza ismeretes, tehát  $\psi$  tényez kiszámításához csak  $\varepsilon_0$  valószínű értékét kell még megállapítani.



18. ábra

Ha a talpnyomások megoszlása lineáris volna, akkor — a közismert tétel szerint —  $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}$ -al számolhatnánk, amely esetben  $\psi = \frac{12}{Db^2}$  volna.

Ezért a további kérdés csak az, hogy az excentrikus nyomás alatt *eltorzult harang alakú* talpnyomás megoszlása folytán (18. ábra) mekkora  $\varepsilon_0$  értékkel célszerű számolni. A válasz a következő:

A harang alakú görbének kezdő és végpontjánál az ordináta mindig zérus és — általában — az érintő irányhatározója a kezdőpontban pozitív, és a végpontban negatív. Tehát (pozitív értelemben, azaz balról jobbra növe-

kedő excentricitás esetén)  $e = e_0$  határát az a geometriai feltétel szabja meg, hogy a kezdőponti érintő irányhatározója zérusig fogy  $e$  excentricitás fokozatos növekedése folytán. Vagyis annak az *analitikai feltételét*, hogy a kezdőpont, azaz a nyomólap bal széle a terheletlen alapsíkba emelkedett fel, avval lehet megadni, hogy ez a határeset akkor következik be, amikor  $q_\xi$  függvény differenciálhányadosa  $\xi = O$  helyen zérussá csökken.

A harang alakú görbének megfelelő racionális egész függvény a következő:

$$q_\xi = q_0 \cdot [\beta_1 \xi^4 - \beta_2 \xi^3 + \beta_3 \xi^2 - \beta_4 \xi], \quad (1)$$

ahol  $q_0 = \frac{S}{b}$ ,  $\xi = \frac{x}{b}$ ,  $\beta_4 = 2 \cdot \left( 30 \frac{r}{b} + 8\varrho - 15 \right)$

eszerint

$$\frac{dq_\xi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -2q_0 \cdot (30\varepsilon + 8\varrho - 15),$$

ugyanis ebben az esetben az egyensúlyi feltétel értelmében  $r = e$ .

Tehát  $\varepsilon_0$  keresett értéke a következő egyenletből számítható:

$$30\varepsilon_0 + 8\varrho - 15 = 0$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{15}\varrho \quad \text{I.}$$

$\varrho$  viszonyszám valószínű közepes értékeként 1,7-et vettük fel. Viszont a kérdés további vizsgálatánál célszerű azt is figyelembe venni, hogy  $\varrho$  nem állandó, vagyis  $\varepsilon_0$ -tól nem teljesen független viszonyszám. Ugyanis az excentricitás további növekedése folytán a talpnyomások a terhelt oldal alatt fokozottabb mértékben koncentrálnak, miközben  $q_m$  (azaz a nyomólap felező vonalában ébredő talpnyomás) csökken, vagyis  $\varrho$  értéke is csökken (18. ábra). Kisebb értékű  $\varrho$ -hoz pedig — az I. jelű képletünk szerint — nagyobb  $\varepsilon_0$  tartozik. Ezért a nyomólap terheletlen széle *késleltetve* emelkedik fel a terheletlen alapsík szintje fölé.

Másrészt viszont a harang alak eltorzulásából (vagyis az ábra súlypontjának további jobbra-tolódásából) szükségképpen az is következik, hogy a talpnyomások szélső értéke ( $q_{\max}$ ) növekedik. Itt figyelembe kell venni, hogy a keresztaljak alatt kialakuló nyomófelületek hossza ( $b$ ) a szélességének ( $v$ ) kb. a háromszorosa. Ezért a szélső érték, vagyis a koncentráció sem fokozódhat korlátlanul. Ugyanis az elméleti talpnyomások egy bizonyos határon túl már nem képesek valóban kialakulni, mert az ágyazási anyag szemcséi a rövidebb  $v$  irányban, vagyis a keresztalj keresztirányában (a vágánytengely irányában) a nagyobb ágyazási nyomás alól könnyebben kitérhetnek, mint a hosszabb  $b$  irányban. Ezért indokoltnak látszik az a feltevésünk, hogy az excentricitás növekedése folytán a terhelt oldal alatt fokozódó talpnyomások szélső értéke legfeljebb 8–10%-kal lépheti túl a kiindulásként választott  $\varrho \cdot q_0 = 1,7 q_0$  értékét. Eszerint az a mechanikai feltétel, amely alkalmas  $\varepsilon_0$  valószínű gyakorlati értékének meghatározására, a következőképpen írható fel:

$$q_{\max} = 1,08 \cdot 1,70 \cdot q_0 = 1,84 q_0. \quad \text{II.}$$



Fokozatos megközelítéssel a következő eredményhez jutunk: ha  $\rho = 1,445$  és (az I. jelű képlet szerint ennek megfelelő értékű)  $\varepsilon_0 = 0,115$ , akkor az eltorzult haranggörbének megfelelő függvény:

$$q_\xi = q_0 \cdot [-4,4 \xi^4 - 5,0 \xi^3 + 9,4 \xi^2].$$

A zárójelben levő kifejezésnek szélső értéke  $\xi = +0,692$  helyen van, és a szélső érték:

$$\frac{\bar{q}_{\max}}{q_0} = 1,84.$$

Tehát az I. és II. jelű feltételt egyaránt kielégítő viszonyított excentricitás:

$\varepsilon_0 = 0,115 = \frac{1}{8,7}$  és az ennek megfelelő  $\psi$  (a 26. képlet szerint):

$$\psi = \frac{2}{Db^2 \varepsilon_0} = \frac{17,4}{Db^2} \sim \frac{17}{Db^2}. \quad (21)$$

Ezzel indokolható az ellenálló nyomatékknak az az elméleti értéke, amelyet — kísérleti adatok hiányában — a példáink kidolgozásánál alkalmaztunk.

Ismételten hangsúlyozni kell, hogy ez a  $\psi$  csak olyan elméleti értéknek tekintendő, amellyel a megfelelő kísérleti adatok hiányában számolhatunk *nagyságrendi megközelítésként*. De ez az elmélet arra is figyelmeztet, hogy a kísérleteket nem elég egyes izolált keresztalj alatt végezni, mert a talpnyomások változásának mértékét, valamint az ezt előidéző tényezők hatását a *vágányban* fekvő alj alatt kell megvizsgálni, ahol az ágyazási nyomások az egymással szomszédos aljak alatt kölcsönös egymásrahatás közben fejlődnek ki.

## II.

### *Az egységtényezők kiegészítése a fellovágás hatását kifejező taggal*

Az egységtényezők 20a és 20b számú képleteiben nem jut teljes mértékben kifejezésre a fellovágás hatása. Ugyanis ezeket a képleteket azzal a feltetéssel vezettük le, hogy a keresztalj középső szakasza akadály nélkül lehajolhat a két véglapját támadó egységnyi nyomatékok hatása alatt. E szerint figyelmen kívül maradt a középső szakasznak a fellovágást okozó ágyazásba történő besüllyedése folytán az alj alsó felületén ébredő reakciónyomások hatása. Mivel ezek a felfelé irányuló passzív nyomások a törzstartó  $B$  és  $J$  jelű csuklóinál keletkező elfordulási szögeket, vagyis az egységtényezőket is módosítják, ezért — ha bár csak kis mértékben — befolyásolják a számítás végeredményét, azaz a mértékadó, negatív értelmű nyomaték kialakulását is.

Feladatunk annak a hibának értelmét és nagyságrendjét megvizsgálni, amely hiba abból származik, hogy az egységtényezők képletéből ennek a módosító hatásnak megfelelő tagot elhanyagoljuk. A vizsgálatot — az egyszerűség kedvéért — a szimmetrikus terhelési változat esetére végezzük el.

A szimmetrikus terhelésnél  $M_B$  (2. számú) képletének nevezőjében szereplő egységtényezők összege (feltéve, hogy  $E_1 = E_2 = E$ ) a következő:

$$m_{11} + m_{12} = 2EJ_1 \cdot \psi + b + \frac{J_1}{J_2} \cdot d.$$

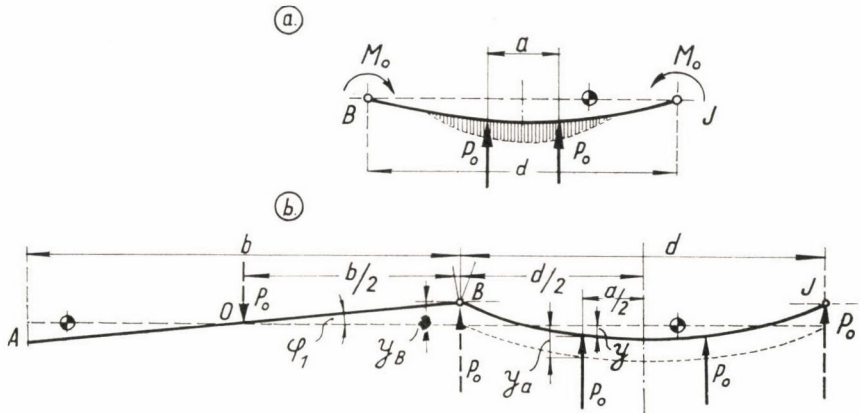
Ha figyelembe vesszük azt az ágyazási nyomást is, amely az összekötő rúd lehajlása folytán a rúd közepének környezetében ébred, akkor az egység-tényezők összegének képletét  $\Delta m$  kiegészítő taggal kell bővíteni:

$$m_{11} + m_{12} + \Delta m,$$

ahol

$$\Delta m = \left[ 2EJ_1 \psi \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \frac{J_1}{J_2} \cdot (d^2 - a^2) \right] \cdot P_0 \quad (27)$$

$$P_0 = \frac{d^2 - a^2}{2EJ_2 \psi \cdot b^2 + \frac{8EJ_2}{D_1} + \frac{1}{3} (d - a)^2 \cdot (d + 2a)} \quad (28)$$



19. ábra

$P_0$  kg a fellovágás folytán a törzstartó közbülső szakaszának (összekötő rúd) egyik felére ható ágyazási nyomások eredője, mely  $P$  erő helyén támad akkor, amikor  $B$  és  $J$  jelű csuklóknál az összekötő rúd két véglapján egyidejűleg egy-egy egységnyi nyomaték ( $M_0$ ) hat (19a ábra). Ugyanis ennek a két nyomatéknak hatása alatt behajló összekötő rúd az alatta levő ágyazásba benyomul, és így az alsó felületén kismértékű reakciónyomások ébrednek.

$$D_1 = C_1 \cdot v_1 \cdot \frac{d}{2},$$

ahol  $v_1$  cm az összekötő rúd alsó felületének szélessége, és  $C_1$  kg/cm<sup>3</sup> a fellovágást okozó ágyazás tényezője. Ennek értékét a példa kidolgozásánál a sinek alatt fekvő ágyazás tényezőjének felére vettük fel:

$$C_1 \sim \frac{C}{2}.$$

A 27. és 28. számú képletek magyarázata a következő.

Feltesszük, hogy ez alatt az „elméleti kísérlet” alatt a keresztaljnak a két szélső szakaszában a szilárdsági tengely elgörbülése elhanyagolható a középső szakasz alakváltozásához képest.

A 19b ábra a törzstartónak azt a terhelési változatát mutatja, amely  $M_0$  egységnyi nyomatékok hatására alakul ki. Az összekötő rúd behajlása folytán ébredő  $P_0$  erők a rudat — és ezzel együtt  $B$  és  $J$  csuklókat is — fel-emelik, miközben a szélső szakasz  $\varphi_1$  szöggel elfordul  $O$  középpontja körül.

Az új egyensúlyi helyzet kialakulása közben kifejlődő  $P_0$  erő meghatározása véget a következő egyenlet írható fel (a 19b ábra jelöléseinek alkalmazásával):

$$y_B = \varphi_1 \frac{b}{2} = y_a - y$$

$$\varphi_1 = \psi \cdot P_0 \cdot \frac{b}{2}, \quad y = \frac{P_0}{D_1}, \quad y_a = y'_a + y''_a,$$

ahol  $y'_a$  cm  $P_0$  erő helyének gátlás nélküli lesüllyedése volna  $M_0$  egységnyi nyomaték hatására,

$y''_a$  cm ugyanennek a pontnak vertikális elmozdulása (felfelé) a két  $P_0$  erő nyomatéka folytán.

Ezek szerint

$$y'_a = + \frac{d^2 - a^2}{8EJ_2} \cdot (1 \text{ kgcm})$$

$$y''_a = \frac{P_0}{25EJ_2} \cdot (d - a)^2 \cdot (d + 2a)$$

$$\psi \cdot \frac{b^2}{4} \cdot P_0 = y_a - \frac{P_0}{D_1}$$

$$P_0 \cdot \left[ \psi \frac{b^2}{4} + \frac{1}{D_1} + \frac{1}{24EJ_2} \cdot (d - a)^2 \cdot (d + 2a) \right] = \frac{d^2 - a^2}{8EJ_2}$$

$$P_0 = \frac{d^2 - a^2 \cdot (1 \text{ kgcm})}{2EJ_2 \psi b^2 + \frac{8EJ_2}{D_1} + \frac{1}{3} (d - a)^2 \cdot (d + 2a)}$$

Ezzel  $P_0$  erő 28. számú képletének helyességét igazoltuk. Ennek a képletnek segítségével  $P_0$  „elméleti” erő nagysága előre kiszámítható a keresztalj méreteiből és a rugalmas beágyazásra vonatkozó adatokból.

Az egyensúlyezők kiegészítő tagja:

$$\Delta m = 2EJ_1 \cdot (\Delta \kappa' + \Delta \kappa''),$$

ahol  $\Delta \kappa'$  a szélső ( $\overline{AB}$ ) szakasz véglapjának elforduláskülönbsége  $P_0$  erő hatására  $B$  csuklónál, és

$\Delta \kappa''$  a középső ( $\overline{BJ}$ ) szakasz véglapjának elforduláskülönbsége  $P_0$  erő hatására  $B$  csuklónál. Eszerint

$$\Delta z' = \varphi_1 = \psi \frac{b}{2} P_0$$

$$\Delta z'' = - \frac{d^2 - a^2}{8EJ_2} \cdot P_0.$$

Tehát

$$\Delta m = \left[ 2EJ_1 \psi \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \frac{J_1}{J_2} \cdot (d^2 - a^2) \right] \cdot P_0.$$

Ezzel a 27. számú képlet helyességét is igazoltuk.

\*

A kiegészítő tag elhanyagolásából származó hiba értelmének és nagyságrendjének megvizsgálása céljából kiszámítottuk  $P_0$  elméleti erőnek, valamint  $\Delta m$  kiegészítő tagnak számszerű értékeit a szimmetrikus terhelési változatra kidolgozott I. sz. példánk adatainak felhasználásával (a 27. és 28. számú képletek alapján). A rövidítés kedvéért ezúttal csak a számítás részeredményeit közöljük:

$$P_0 = \frac{4608 \text{ cm}^2 \cdot (1 \text{ kgcm})}{(121 + 139 + 9) \cdot 10^4 \text{ cm}^3} = 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\Delta m = [20782 - 3364] \cdot 1,71 \cdot 10^{-3} = 29,785 \sim 30 \text{ kgcm}^2.$$

Az ezzel javított számérték:

$$\frac{M_B}{S} = - \frac{2920}{784 + 30} = - 3,587 \text{ cm}$$

$$M_B = - 35870 \text{ kgcm}.$$

Tehát a keresztalj közbülső szakaszánál a vágánytengely függőleges síkjában levő keresztmetszetre balról ható nyomatéknak kijavított szélső értéke:

$$M_{\min} = - 35870 - 0,20 \cdot \frac{72 - 24}{2} \cdot 10000 = - 83870 \text{ kgcm}.$$

Ezzel szemben a kiegészítő tag elhanyagolásával az I. példában kiszámított  $M_{\min} = - 85300 \text{ kgcm}$ , tehát az elhanyagolásból származó hiba százalékos értéke (a javított értékhez viszonyítva):

$$\underline{1,7 \text{ \%}}.$$

Bár ennek az egy számpéldának az eredményét nem fogadhatjuk el tételünk teljes értékű bizonyítékeként, mégis alkalmasnak tekinthető arra, hogy a vizsgált hiba értelmére és nagyságrendjére általában is következtethessünk. Eszerint tehát megállapítható, hogy azzal a közelítő képlettel számolva, amelynél a szóban forgó kiegészítő tag hatását a végeredményre figyelmen kívül hagyjuk, olyan kis mértékű és olyan értelmű elhanyagolást követünk el, amely a gyakorlat számára annál is inkább elfogadható, mert a hiba miatt a szerkezet biztonsága nem csökken.

Érkezett 1963. március hóban.