HORVÁTH IMRE

A HASONLÓSÁGRÓL

1. Bevezetés

A kismintakísérletek elterjedése a műszaki kérdések megoldásában az utolsó század folyamán jelentős mértékben haladt előre. Az ipar és kereskedelem fejlődésével egyre több olyan kérdés merült fel, amelyeknek gazdaságos megoldása csupán a hasonlóság-elmélet segítségével lehetséges.

Így a *matematikailag körülményesen* vagy egyáltalán meg nem oldható jelenségek vizsgálatánál: pl. a vízépítésben alkalmazott hordalékos vízfolyások kismintakísérleteinél, a hídépítésben a tartórácsoknak, függőhidaknak az alakváltozások figyelembevételével történő vizsgálatánál, tartók rezgési jelenségeinek megfigyeléseinél elengedhetetlenül fontos a modellkísérlet alkalmazása. Természetesen tovább lehetne folytatni a felsorolást a hőtan, az áramlástan, a gépészet, az építészet stb. területén. Továbbmenően a modellkísérlet a hidraulikai, statikai stb. *számítások felülvizsgálatára* is alkalmas azért, mert megbizonyosodhatunk arról, hogy lényeges hibát, illetőleg tévedést nem követtünk-e el. A kismintakísérlet alkalmas ritkán előforduló jelenségek vizsgálatára. Pl. egyes vízfolyások *ritkán* bekövetkező árvizeinek részletes vizsgálatára. Végül, de nem utolsósorban, a hidraulikai, statikai stb. jelenségek *oktatásában* is elengedhetetlen a kismintakísérletezés alkalmazása.

Láthatjuk tehát, hogy a gyakorlat szempontjából a hasonlóságelmélet és a kismintakísérletezés jelentősége nagy. Alkalmazásával a kutató *teret és időt* nyer, végső soron a létesítmények működésének és üzemelésének műszaki *megbízhatósága és gazdaságossága* fokozódik.

2. Az invariáns függvény fogalma

A hidromechanikában alkalmazott klasszikus kismintatörvények — mint ismeretes — egyidejűleg csupán két-két erő működését tételezik fel. A nehézségi, súrlódási, rugalmassági és kapilláris erők egyenként a tehetetlenségi erővel való együttes működése az elmélet szerint a *Froude-*, *Reynolds-*, *Cauchy-Rayleigh-* és a *Weber*-féle modelltörvények érvényességét jelenti. Amint a *Helmholztól* származó matematikai bizonyítás mutatja, pl. a *Froude-* és *Reynolds*-féle törvények egyidejű figyelembevétele 1 : 1 méretarányú modellt eredményezne. Azaz a mintát a valósággal azonos méretűnek kellene megépíteni. Ebből következik, hogy egyidejűleg csupán egy kismintatörvényt és ennek megfelelően *csupán két erő* működését tudjuk figyelembe venni. Műszaki feladatainknál pedig *gyakran nem elégséges* ez, mivel több erő egyidejű működése áll fenn. Ez viszont azt jelenti, hogy *a klasszikus kismintatörvények elfogadható eredményű alkalmazása nem mindig lehetséges.*

A fentiekből következik, hogy egy feladat megoldásánál nem arra kell törekedni, hogy több kismintatörvény egyidejű érvényességét biztosítsuk — mert ez úgy is lehetetlen és nincs is rá szükség —, hanem arra, hogy *olyan* — a folyamatot jellemző — *dimenzió nélküli számot vagy számcsoportot alkossunk, amellyel minden működő erőt számításba vettünk.*

Egy korábbi, sajtó alatt levő tanulmányomban eljárást mutattam be, amellyel tetszőleges számú erő működését figyelembe vehetjük kismintakísérleteinkben [2, 3]. Sőt a klasszikus kismintatörvények e módszerrel is logikusan értelmezhetők. Megjegyzem, hogy a bemutatott módszer értelemszerűen alkalmazható statikai, hőtani, elektromos, kémiai stb. jelenségek vizsgálatára, csupán mindig a kérdéses folyamatra jellemző alapegyenleteket kell figyelembe venni.

Nevezett tanulmányom alapgondolatát és a szivárgási folyamatok vizsgálatára történő alkalmazását 1962. október 24-én a Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztálya „Kismintavizsgálatok a vizgazdálkodásban" tárgyú ankétján hozászólásomban is ismertettem. Az alábbiakban azonban mégis célszerűnek tartom a bevezetett módszer lényegét ismertetni, mivel ezt a későbbiek érthetősége indokolja.

*

Mint ismeretes, a *Newton*-féle általános hasonlósági törvényt, amely az ún. mechanikai hasonlóság esetén érvényes bármely időpillanatban, bármely erőnél és bármilyen hosszaknál, matematikai formában a

$$\frac{P_i}{\varrho \cdot l^2 v^2} = N \tag{1}$$

egyenlőséggel írhatjuk fel, ahol

P_i a folyamatra jellemző erő,
ϱ sűrűség,
l jellemző hosszméret,
v jellemző sebesség,

N *Newton*-szám.

A speciális kismintatörvényeknek a *Newton*-törvényből történő levezetésekor a számlálóban csupán *egyetlen* erőt — a kérdéses folyamatra leginkább jellemző erőt — helyettesítjük. A jelenségeket viszont kettőnél több erő is befolyásolhatja.

A továbbiakban *tekintsük a dinamika vetületi egyenleteit és osszuk végig azokat a tehetetlenségi erővel.* Ily módon természetesen egy, a *Newton*-számhoz hasonló összefüggéshez jutunk. Eltérés csupán a számlálóban van. Most *a számláló nem egyetlen erő, hanem az adott jelenségre jellemző erők eredője.* Ha a számlálóba az erők algebrai számértékét helyettesítjük be, akkor ahány erőből áll a számláló, a nevezővel történő osztás után ugyanannyi dimenzió nélküli számot kapunk:

$$\frac{\Sigma P_i}{\varrho \cdot l^2 v^2} = N \,. \tag{2}$$

Tehát *Newton* második tétele alapján a működő összes erők figyelembevételével kaptunk egy *dimenzió nélküli függvényt*, amely a kérdéses folyamatra jellemző.

Vizsgáljuk meg a továbbiakban az eljárás *fizikai* lényegét.

Egy tetszőleges természeti folyamat egyértelmű leírását annak alapvető egyenletei adják meg. Az egyenletek matematikai alakja lehet véges mennyiségekkel felírható algebrai egyenlet, differenciál vagy integrál egyenlet, vagy szukcesszív approximációval felírt, zárt alakban ki nem fejezhető végtelen sor. Egyes esetekben, ha egyenlet alakjában nem jellemezhető a folyamat, a függőség táblázatosan is megadható. A továbbiakban egy tetszőleges természeti folyamatot minimális számú változóval egyértelműen leíró egyenletet a kérdéses folyamat *alapegyenletének* nevezünk. *Bármilyen matematikai formában is adott a kérdéses folyamat, az alapegyenlet vagy táblázat dimenzió nélküli alakra hozható.* Nevezzük a továbbiakban a *minimális* számú változóval felírt dimenzió nélküli egyenleteket *invariáns függvényeknek*. (Dimenzió nélküli egyenleteken olyan összefüggéseket értünk, amelyekben a változók dimenzió nélküli csoportok, mint a *Froude*-szám, *Reynolds*-szám stb. ,,Invariáns''-nak a továbbiakban azt a csoportot tekintjük, amelynek számértéke a különböző méretarányú berendezések esetében állandó.) Ha az eredeti alapegyenlet a kérdéses folyamatot jellemezte — már pedig e tény fennáll —, úgy *kell, hogy dimenzió nélküli alakja is jellemző legyen*. Tehát következik, hogy például a hidrodinamikai folyamatoknál a hasonlóság feltételét a működő erőkre felírható vetületi egyenlet, illetőleg az energiamegmaradási egyenlet dimenzió nélküli alakja adja meg a folytonosság megteremtése mellett.

A (2) dimenzió nélküli függvénnyel definiált hasonlósági feltétel értelemszerűen még általánosabb formában is felírható. Ez abból a meggondolásból adódik, hogy a működő erők közül tetszőleges erőt tekinthetünk eredőnek, azaz mindegy, hogy közülük melyiket írjuk az egyenlet jobb oldalára. Más szóval, mindegy, hogy melyik erővel, illetőleg energiával osztjuk végig az egyenletet. Az irodalom általában az inercia erőt tekinti eredő erőnek *Newton* második törvénye nyomán. De általános esetben egy természeti folyamatra az energiamegmaradás elve alapján írhatjuk:

$$\frac{\Sigma E_n}{E_i} = K, \tag{3}$$

ahol E_i tetszőlegesen választott, a folyamatra jellemző energiafajta, K pedig állandó. Attól függően, hogy az alapegyenletet melyik tagjával osztjuk végig, *eltérő alakú* invariáns függvényeket kapunk ugyanazon folyamat leírására, de kell, hogy mindegyik a folyamatot jellemezze. (Megjegyzem, hogy teljes általánosságban egy korábbi tanulmányomban csoportelméleti alapon igazoltam, hogy a működő erők, illetőleg energiák közül bármelyik írható a (2), illetőleg a (3) összefüggés nevezőjébe [3].)

A fentiekben csupán a dinamikai folyamatokat tekintettük, de általában *egy kérdéses természeti folyamat alapvető egyenletének alkalmazásával a jellemző dimenzió nélküli függvénykapcsolat megállapítható.* Ez egyúttal a kérdéses folyamatot jellemző differenciál-egyenletnek a hasonlóság-elmélet segítségével történő megoldását is jelenti. Az esetben, ha egy folyamat alapegyenletét nem ismerjük, kísérletekből kapott adatokból írható fel egy dimenzió nélküli függvény-kapcsolat. (Pl. a *Colebrook—White*-féle összefüggés.) Ily módon a kísérletet használtuk fel a jellemző folyamat egyenletének felírására, ami a kérdéses differenciál-egyenlet integrálását is jelenti egyúttal.

A fentieket *összefoglalva* :

1. A klasszikus kismintatörvények alkalmazásai alapvető *ellentmondásokat* rejtenek magukban.

2. Az ellentmondásokat, illetőleg azok *okait* vizsgálva megállapíthatjuk, hogy

a) a fenti kismintatörvények csupán két-két erő egyidejű működését tételezik fel,

b) a két főerőn kívül működő egyéb erők elhanyagolásával egyidejűleg a kismintán az eredő erő által meghatározott kinematikai és hidraulikai mennyiségeket tudjuk csupán mérni. Például egy kísérletnél, ahol a *Froude*-törvényt alkalmazzuk hasonlósági feltételként, csupán a tehetetlenségi és nehézségi erőket vesszük figyelembe. A kisminta tetszőleges pontjában mért sebesség viszont az összes működő erők hatására alakul ki vagy változik.

3. Két kismintatörvény egy feladat megoldásánál történő egyidejű alkalmazásának kísérlete minden esetben helytelen és eredménytelen.

4. Nem arra kell törekedni tehát, hogy egyidejűleg több kismintatörvényt érvényesítsünk, hanem arra, hogy olyan — a kérdéses folyamatot jellemző — kismintatörvényt alkossunk, amellyel minden működő erőt számításba vettünk.

5. Egy *tetszőleges természeti folyamatot jellemző kismintatörvénynek a jelenséget egyértelműen leíró, minimális számú változót tartalmazó alapegyenlet dimenzió nélküli alakját tekintjük a dimenzió nélküli kerületi feltételek figyelembevétele mellett.* Ezt *invariáns függvénynek* nevezzük.

6. Hidrodinamikai folyamatokat egyértelműen a tömegmegmaradás (kontinuitás-tétel) és az energiamegmaradás (*Bernoulli*-, illetve *Navier—Stokes*-egyenletek) tételei jellemzik. Ezeknek minimális számú változót tartalmazó dimenzió nélküli alakjait tekintjük a hidrodinamika kismintatörvényének. (Megjegyezzük azt, hogy a *Navier—Stokes*-egyenletből az ismert hagyományos módszer szerint a *Froude*- és a *Reynolds*-számok levezethetők. Javasolt módszerünk ettől elvileg és gyakorlatilag is egyaránt független, hiszen hasonlósági feltételként nem csupán dimenzió nélküli számokat képezünk, hanem azoknak *jellemző függvény-kapcsolatát.)*

7. Az invariáns függvényekkel a klasszikus kismintatörvények egyértelműen és logikusan értelmezhetők. E kismintatörvények az invariáns függvénynek csupán speciális esetei.

8. Az invariáns függvényekkel meghatározhatók a kérdéses folyamatot befolyásoló dimenzió nélküli számok és azok matematikai kapcsolata. A kísérleti állandók mérésekkel állapíthatók meg.

9. Az invariáns függvényekben szereplő *minimális számú változó kiválasztása* fizikai megfontolásokon túlmenően — amint a későbbiekben igazoljuk — csoportelméleti megfontolások alapján lehetséges.

10. A fentiek értelemszerűen alkalmazhatók tetszőleges természeti folyamatra és annak minden részjelenségére (mechanika, kémia, elektromosságtan stb.), a kérdéses alapegyenlőségek figyelembevételével.

*

Benedek Pál és *László Antal* 1961-ben alkalmazta először a csoportelméletet a hasonlósági kérdések vizsgálatánál [1]. Dimenziós és dimenziómentes rendszerek esetében igazolták, hogy a változók torziómentes, szabad *Abel*-féle csoportot alkotnak.

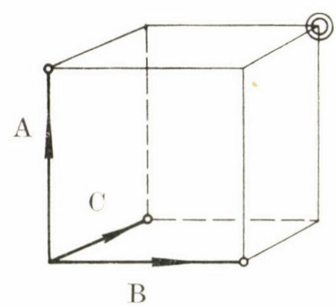
Egy tetszőleges folyamatot jellemző változók a csoport elemei. A változók közül kiválasztható minimális számú elem, amellyel a folyamat egyértelműen leírható. Ezek a csoport *bázisrendszerét* képezik. A csoportot *geometriailag* egy p dimenziós pontrács rácspontjai képezik, ahol p a bázis elemeinek a száma. (A csoportelmélet alaptételeivel ezúttal nem foglalkozunk, mivel ez a vonatkozó szakirodalomban megtalálható [1, 7, 8, 10].)

A továbbiakban a korábban bevezetett *invariáns függvényt definiáljuk a csoportelmélet segítségével* [3].

Tételezzük fel, hogy egy vizsgálandó folyamat a

$$f(\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_i \ldots \pi_{n-k}) = 0 \tag{4}$$

dimenzió nélküli függvénykapcsolattal felírható, ahol π_i a folyamat dimenzió nélküli báziselemei, n a dimenzióval bíró változók száma, k a dimenziómatrix rendszáma. E függvénykapcsolat minden esetben felírható, akár elméleti, fél-



1. ábra

empirikus vagy empirikus összefüggés formájában. Mivel a π_i változók rendszere bázisrendszert képez, az $(n-k)$ számú változó egyértelműen jellemzi a folyamatot.

Azonban az alábbiak szerint *igazolható, hogy a bázisrendszer elemei közti függvénykapcsolat meghatározásával a változók számát eggyel csökkenthetjük.*

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk olyan dimenzió nélküli rendszereket, amelyek három báziselemet reprezentálnak, tehát a rendszerek változói — mint csoportelemek — háromdimenziós pontrács rácspontjaiként determinálhatók. Legyenek a bázis elemei A, B és C. *(1. ábra)* A térbeli pontrács elemi celláját felfeszítő vektorok ily módon ábrázolhatók. A bázisrendszer elemei egyenként egy rácspontot határoznak meg. (Az ábrán körrel jelölve.) Továbbmenően *az a tény, hogy a bázis elemei között összefüggést írhatunk fel, ismét egy rácspont meghatározását jelenti.* (Az ábrán kettős körrel jelölve.) Ebből a csoportelméleti axiómák figyelembevételével következik, hogy *p számú báziselem esetén $(p-1)$ változó szükséges és elégséges az összefüggés kifejezésére.* Ennek algebrai bizonyítását *Benedek Pál* és *László Antal* tanulmányukban megadták [1]. E változó csökkenés egyébként belátható abból is, hogy a *$(p-1)$* számú változóból álló összefüggés egy kötöttséget jelent, illetőleg egy változót teljesen meghatároz. Amikor a rendszer dimenzióval bíró változóiból dimenziómatrixot képezünk, a dimenziómatrix sorai által képezett, egymástól független homogén lineáris egyenletek száma, azaz a dimenziómatrix rendje adja meg a dimenzióval bíró változókról a dimenziómentes változókra történő áttérés esetén fellépő változószám csökkenést. A fentiek szerint azonban belátható, hogy *a báziselemek közti összefüggés, mint egy újabb egyenlőség*, a változók számát további eggyel csökkenti.

Az invariáns függvény fogalmának bevezetésénél azt úgy definiáltuk, mint egy tetszőleges folyamatot minimális számú változóval leíró alapegyenlet (differenciál-, integrálegyenlet stb.) dimenzió nélküli alakját. Fenti csoportelméleti meggondolásaink segítségével *a minimális számú változó meghatározható. A változók száma általánosságban* : $(n - k - 1)$. Ily módon *az invariáns függvény definíciója* :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_i \dots \pi_{n-(k+1)}) = 0 \tag{5}$$

egyenlőséggel adható meg.

Pl. ha egy folyamat bázisrendszerét a *Froude*- és a *Reynolds*-számok alkotják, és a köztük levő összefüggés

$$c_1 Fr + c_2 Re = 0$$

alakú, akkor a Re számmal történő végigosztás után a

$$c_1 \frac{Fr}{Re} + c_2 = 0$$

egyetlen dimenzió nélküli változót tartalmazó összefüggést kapjuk (c_1 és c_2 kísérletekkel meghatározható állandók).

Az invariáns függvény gyakorlati *példákon* történő alkalmazására ezúttal nem térek ki, de korábbi dolgozataimban már néhány példát bemutattam [2, 3]. Így igazoltam, hogy a $\lambda \cdot Re = \text{const}$ összefüggés a lamináris áramlás invariáns függvénye (ahol λ az ún. ellenállási tényező). A *Colebrook—White*-féle összefüggés a teljes turbulencia tartományára adja meg az invariáns függvényt. Ezen összefüggésekből a kérdéses folyamatra a méretnövelés feltételei meghatározhatók.

A fentiek szerint a *hasonlóság* fogalmát a következőképpen értelmezzük:

Az invariáns függvény alkalmazásakor nem követeljük meg azt, hogy az alkotó dimenzió nélküli számok egyúttal invariánsok is legyenek. Hiszen ezt gyakorlati esetben általában nem is tudjuk megvalósítani. Csupán azt követeljük meg, hogy a függvény legyen invariáns. Ezen feltételből pedig az ún. átszámítási tényezők meghatározhatók [2, 3]. (Tehát a dimenzió nélküli számok ezúttal nem kismintatörvények. *Kismintatörvények a dimenzió nélküli számok függvénykapcsolatai, az invariáns függvények.)* Természetesen, ha adott esetben az invariáns függvényt alkotó dimenzió nélküli számok is invariánsok, akkor *a klasszikus hasonlóság-elmélet értelmezése szerint is hasonlóság áll fenn.* Ha az invariáns függvény csak egyetlen dimenzió nélküli számot tartalmaz (pl. a *Froude*- vagy *Reynolds*-számot stb.), akkor az invariáns függvény speciális esetéhez, egy klasszikus kismintatörvényhez jutottunk.

3. Néhány megjegyzés az úgynevezett rokon jelenségek fogalmához

Dr. Ivicsics Lajos az *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 1962/3. kötetében közölte a „Gondolatok a fizika rokonjelenségeinek fogalmáról" című, nagy érdeklődést keltő dolgozatát. A tanulmánnyal kapcsolatban — fenti elgondolásaim alapján — néhány megjegyzést kívánok tenni.

1. A Szerző az ún. rokon jelenségek fogalmát az

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) = \Phi(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n) = \Psi(\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_{n-k}) \quad (6)\text{-}$$

összefüggéssel definiálja általánosságban, ahol x_1, $x_2 \ldots x_n$ a folyamatot jel lemző mennyiségeket jelenti, ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_n$ az x_1, x_2, x_n mennyiségek meghatározott függvényei, π_1, $\pi_2 \ldots \pi_{n-k}$ dimenzió nélküli számok, k a dimenziómatrix rendszáma, f, φ, Φ és ψ függvények jelölései. Az egyenlőség utolsó tagja szerint $(n - k)$ számú dimenzió nélküli változóval írja fel a kérdéses folyamat alapváltozói közti összefüggést. Fenti csoportelméleti meggondolásaink szerint ezen összefüggés — a rokon jelenségek definíciója — *nem minimális számú változóból áll az általam bevezetett invariáns függvény fogalmához viszonyítva.* A minimális számú változó alkalmazásának gyakorlati és kísérleti előnyei közismertek.

2. A továbbiakban a Szerző megállapítja azt, hogy a „*Froude*-szám, *Reynolds*-szám stb. kismintatörvényként való alkalmazása lényeges, bár nem alapvető hiányossága a kismintavizsgálatok elméletének". E kérdéssel kapcsolatban nézzük meg azt, hogy *nevezhetjük-e a Froude-, Reynolds-, Cauchy—Rayleigh- és Weber-számokat kismintatörvénynek.*

Tekintsünk olyan rendszereket, amelyekre csupán a nehézségi és tehetetlenségi erők működnek. A rendszerek hasonlóságának algebrai leírását a *Froude*-szám adja meg. Azzal, hogy a v^2/gl invariánst az *Fr*-jellel azonosítottuk, csupán az algebrai kifejezést *szimbolizáltuk*. De a *Froude*-szám fizikai jelentése egyáltalán nem a jelölés módjában van. A fizikai jelentés abban áll, hogy a v^2/gl dimenzió nélküli invariáns hasonló rendszereknél a nehézségi és tehetetlenségi erő együttes működése esetén állandó, és ebből a feltételből az ún. átszámítási tényezők meghatározhatók.

Ebben a fizikai értelemben a *Froude*-szám véleményem szerint *kismintatörvénynek tekinthető* [4]. Az invariáns függvény definíciója még inkább rámutat a törvényszerűségre (pl. a *Froude*-szám a *Bernoulli*-törvény speciális alakja a tehetetlenségi és nehézségi erők együttes működése esetén).

Tehát végső soron *nem indokolt a klasszikus kismintatörvények törvényszerűségét kétségbevonni.*

Érkezett 1963. március hóban.

IRODALOM

[1] *Benedek Pál—László Antal :* A szabadsági fokról. *A Veszprémi Vegyipari Egyetem Közleményei,* 1961.

[2] *Horváth Imre :* Az általános kismintatörvényről. *Hidrológiai Közlöny,* 1962. (Sajtó alatt).

[3] *Horváth Imre :* A dinamikai hasonlóságról. *Fizikai Szemle,* 1963.

[4] *Horváth Imre :* A vízgazdálkodási tudományos kutatás és a materialista filozófia kapcsolata, 1962. VITUKI Pályázat. (Kézirat.)

[5] *Ivicsics Lajos:* Gondolatok a hidromechanikai kismintavizsgálatok elméletével kapcsolatban. *Hidrológiai Közlöny,* 1961. 5.
[6] *Ivicsics Lajos:* Gondolatok a fizika rokonjelenségeinek fogalmáról. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények,* 1962/3.
[7] *Fleischman, F.:* Begriffsmischungen in der Physik. *Die Naturwissenschaften.* Jg. 41. H. 6. 1954.
[8] *Fleischman, F.:* Das physikalisches Begriffssystem als mehrdimensionales Punktgitter. *Zeitschrift für Physik.* Bd. 138. 1954.
[9] *Langhaar, H. L.:* Dimensional Analysis and Theory of Models. New York—London, 1951.
[10] *Specht, W.:* Gruppentheorie. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.