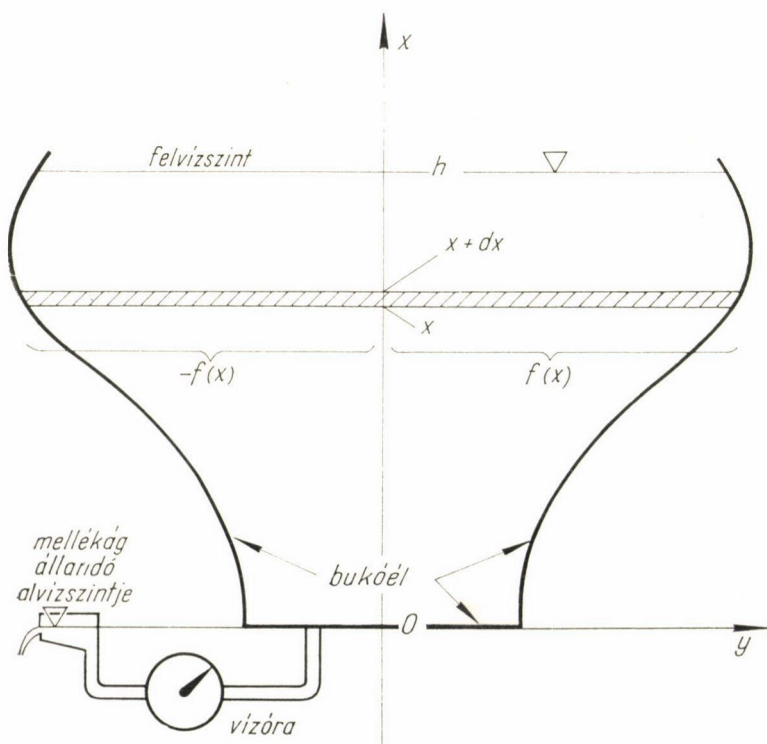


## A KVADRATIKUS BUKÓ PROBLÉMÁJA

MELLÉKÁRAMÚ VÍZMENNYISÉGMÉRÉS A SZABAD FELSZÍN  
MEGSZAKÍTÁSA NÉLKÜL

A vízmennyiség mérésére (tehát az időegységenként átfolyó vízhozamnak az időben való összegezésére) számos módszer ismeretes. Ezek közül egyszerűsége folytán tűnik ki a *mellékáramkörű vízmennyiségmérés* [1], amely tiszta vízben minden további nélkül, szennyezett vízben pedig megfelelő szűrőberendezéssel használható.

A mellékáramkörű mérés alkalmazhatóságának feltétele, hogy a *vízórát működtető nyomáskülönbség a főágban folyó vízhozammal közelítőleg négyzetes*



1. ábra. Elvi vázlat a kvadratikus bukó alakjának levezetéséhez

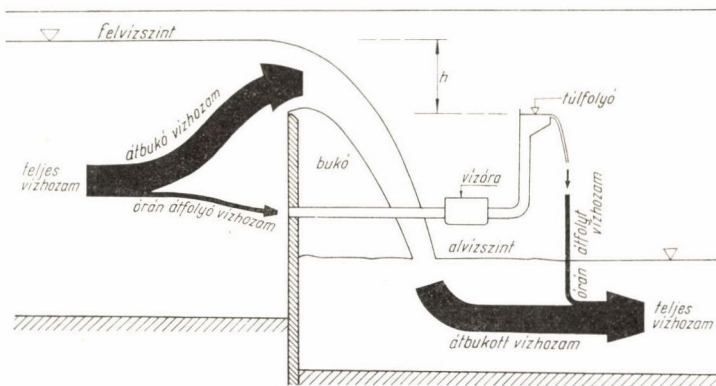
*kapcsolatban legyen.* Ebben az esetben a mellékágon át állandóan az összes vízhozammal arányos vízhozam folyik, függetlenül a vízhozam nagyságától. Ez azt jelenti, hogy a mellékágon bizonyos idő alatt átfolyt, a vízóra által mért vízmennyiségből a teljes vízmennyiséget az arányossági tényezővel tör-ténő egyszerű szorzással kapjuk. Elképzelhető a mellékágbeli vízóra számlap-jának olyan beosztása is, hogy róla közvetlenül a teljes vízmennyiség legyen leolvasható.

Olyan berendezés, amely *zárt csővezetékben* vagy nyílt felszínű vízfolyásba helyezett *zárt szelvény* segítségével a vízhozammal négyzetes arányban levő nyomáskülönbséget állít elő, számos — sőt elvileg végtelen sok — ismeretes. *Ha a vízfolyás nyílt felszínét nem akarjuk zárt szelvénnel megszakítani* — amit például a felszíni uszadék fennakadásának elkerülése indokolhat —, a probléma megoldását az ún. *kvadratikus bukó* megalkotása jelentheti.

A kvadratikus bukó alakját, az 1. ábra jelöléseivel, a következő integrál-egyenlet határozza meg:

$$Q = \left[ 2 \mu \sqrt{2g} \int_0^h f(x) \sqrt{h-x} dx = B \sqrt{h} \right]. \quad (1)$$

Ebben az összefüggésben  $Q$  a vízhozam,  $\mu$  az állandónak tekintett vízhozamtényező,  $g$  a nehézségi gyorsulás,  $f(x)$  a bukó fél szélessége a bukó alsó élétől számított  $x$  magasságban,  $h$  a  $Q$  vízhozamhoz tartozó átbukási magas-ság,  $B$  arányossági tényező.



2. ábra. A kvadratikus bukó és a vízóra elvi elrendezése a vízfolyás hossz-szelvényében

Az 1. ábrán, valamint a rendszer működését világosabban szemléltető 2. ábrán bejelöltük a mellékáramú vízóra elhelyezésének módját is. Eszerint a mellékág valahonnan a mindenkori felvízszint alól ágazik ki, s a rajta átfolyó víz a bukó alsó élével színelő szabad kifolyón ömlik vissza a főcsatornába. Ily módon az órát működtető nyomáskülönbség a mindenkori átbukási magas-ság. Minthogy ez a vízhozammal négyzetes kapcsolatban van, mellékáramú vízóra működtetésére alkalmas. A vízóra ellenállása ugyanis a rajta átfolyó vízhozamnak ugyancsak a második hatványával arányos, tehát a két vízhozam aránya állandó.

Az (1) integrálegyenlet néhány megoldását, köztük a két gyakorlatilag megvalósítható megoldást is, régebben sikerült meghatározni, és ezekről bizonyos mértékben a nyilvánosság előtt is történt említés [1, 2]. Az egyenlet általános megoldását *Dux Erik*\* határozta meg. A következőkben ennek közöljük bizonyos módosított alakját, és az említett két gyakorlati megoldást is ebből vezetjük le.

A megoldást legcélszerűbb

$$f(x) = \frac{B\sqrt{h}}{2\mu\sqrt{2g}\sqrt{h-x}} g(x) \quad (2)$$

alakban felírni, ahol a már ismert jelöléseken kívül  $g(x)$  olyan tetszőleges függvény, amelynek a  $(0, h)$  intervallumban vett határozott integrálja 1, azaz

$$\int_0^h g(x) dx = 1. \quad (3)$$

Valóban, ha (2)-t behelyettesítjük (1)-be,

$$2\mu\sqrt{2g} \int_0^h \frac{B\sqrt{h}}{2\mu\sqrt{2g}} g(x) dx = B\sqrt{h} \int_0^h g(x) dx. \quad (4)$$

Ez pedig (3) figyelembevételével

$$Q = B\sqrt{h} \int_0^h g(x) dx = B\sqrt{h}, \quad (5)$$

vagyis valóban az (1) egyenlet előírt jobb oldalát kapjuk.

Mint hogy olyan  $g(x)$  függvény, amelynek integrálja a  $(0, h)$  intervallumban 1, végtelen sok van, ezért az (1) egyenletnek is végtelen sok megoldását kaptuk.

A továbbiakban néhány függvénysereget írunk fel, és megvizsgáljuk a megoldás alkalmazhatóságát a gyakorlat szempontjából.

$$1. \quad g(x) = \frac{1}{c}, \quad \text{ha } 0 \leq x \leq c \quad (6)$$

$$g(x) = 0, \quad \text{ha } c < x \leq h. \quad (7)$$

Valóban (3)-ba behelyettesítve

$$\int_0^h g(x) dx = \int_0^c \frac{1}{c} dx + \int_c^h 0 dx = 1 + 0 = 1.$$

Magának a bukóélnak az alakja tehát (2) alapján

$$f(x) = \frac{B\sqrt{h}}{2\mu\sqrt{2g}c\sqrt{h-x}}, \quad \text{ha } 0 \leq x \leq c, \quad (8)$$

\* A Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Kara Matematikai Tanszékének adjunktusa.

illetve

$$f(x) = 0, \quad \text{ha } c < x \leq h. \quad (9)$$

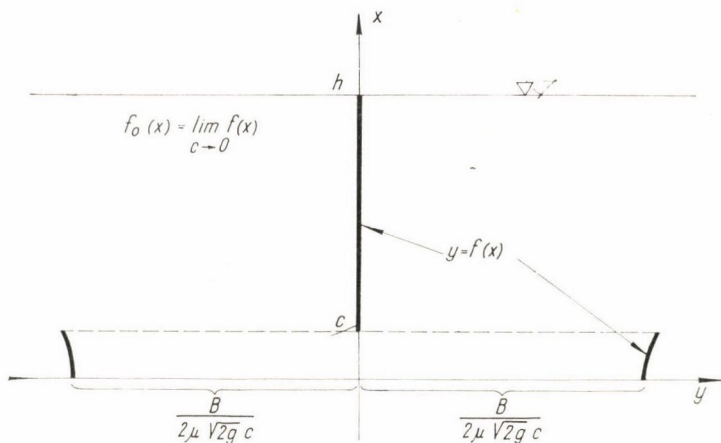
Ez a bukóél-alak azonban, mint (8)-ból látható, függ a mindenkori átbukási magasságtól,  $h$ -tól, gyakorlatilag tehát általában nem alkalmazható. Egyébként nem valódi bukót, hanem *nyílást* ad.

Ennek a megoldásnak a határértéke azonban esetleg a gyakorlat szempontjából is érdekes lehet. Jelöljük  $f(x)$  határértékét  $f_0(x)$ -szel, ha  $c \rightarrow 0$ .

$$f_0(x) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{B \sqrt{h}}{2\mu \sqrt{2g} c \sqrt{h-x}} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{B}{2\mu \sqrt{2g} c}, \quad \text{ha } 0 \leq x \leq c \quad (10)$$

$$f_0(x) = 0, \quad \text{ha } c < x \leq h \quad (11)$$

$f_0(x)$  első része nyilvánvalóan a végtelenhez tart, ha  $c$  tart a 0-hoz, viszont  $h$ -tól függetlenné válik. A „bukó” tehát tulajdonképpen végtelen széles, végtelen alacsony nyílás (3. ábra), amelyen keresztül a nyíláson való kifolyásnak megfelelően, azaz a  $Q = B\sqrt{h}$  összefüggéssel megadott módon folyik ki a víz.



3. ábra. A kvadrátikus „bukó” egyik megvalósítható alakja

Ez a „bukó”-alak érdekes határhelyzete a

$$Q = ah^n \quad (12)$$

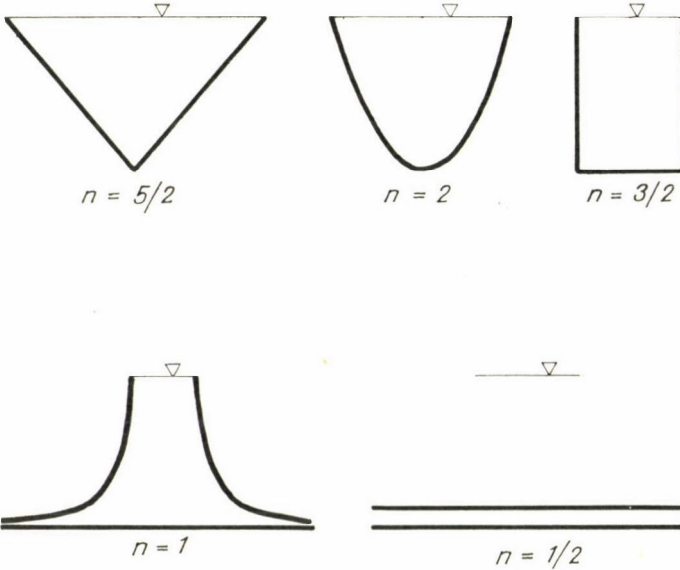
egyenlettel jellemzett, különböző  $n$  értékekhez tartozó közismert bukóalakok sorozatának (4. ábra). Ezek között a  $Q = ah^2$  egyenlettel jellemzett parabolikus bukó semmi különös nevezetességgel nem bír, a „parabolikus” elnevezés egyébként is jól jellemzi, a *kvadrátikus* elnevezést tehát indokolt a  $Q = B\sqrt{h}$  egyenlettel jellemzett bukóra lefoglalni.

A levezetett „bukó”-típus a gyakorlatban is megvalósítható hosszú vízszintes nyílás formájában, melynek  $c$  magassága az előforduló legkisebb átbukási magassághoz viszonyítva nem jelentős.

2. 
$$g(x) = \frac{n+1}{h^{n+1}} (h-x)^n. \quad (13)$$

Ez az összefüggés egymagában is végtelen sok megoldást képvisel.  $n$  értéke tetszőleges, de  $n \neq -1$ , mert ekkor  $g(x)$  és vele együtt határozott

$$Q = ah^n$$



4. ábra. Nevezetesebb bukó-alakok

integrálja is zérussá válik. Egyéb  $n$  értékekre valóban (3)-nak megfelelően

$$\begin{aligned} \int_0^h g(x) dx &= \int_0^h \frac{n+1}{h^{n+1}} (h-x)^n dx = \frac{n+1}{h^{n+1}} \left[ \frac{(h-x)^{n+1}}{-(n+1)} \right]_0^h = \\ &= \frac{n+1}{h^{n+1}} \cdot \frac{-h^{n+1}}{-(n+1)} = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

A bukóél alakját a (2) képletbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{B\sqrt{h}}{2\mu\sqrt{2g}\sqrt{h-x}} \cdot \frac{n+1}{h^{n+1}} (h-x)^n \\ &= \frac{B(n+1)}{2\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{(h-x)^{n-\frac{1}{2}}}{h^{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (15)$$

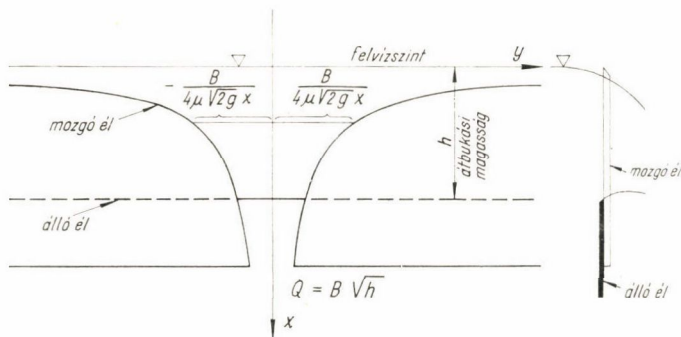
Ez a megoldás-sereg rögzített  $n$  esetén minden  $h$  értékre más-más bukóalakot ad. Gyakorlati megvalósításának tehát nincs értelme, sőt szinte lehetősége sem. Kivételt jelent az  $n = -\frac{1}{2}$ -hez tartozó megoldás:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{B \cdot \frac{1}{2}}{2\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{(h-x)^{-1}}{h^0} \\ &= \frac{B}{4\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{h-x}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ez ugyanis olyan bukóélt ad, amelynek alakja nem, csupán helyzete változik az átbukási magassággal. Ez a változás is igen egyszerű: a hiperbola vízszintes aszimptotója mindig  $h$  magasságban van, azaz a felvízszinthez van kötve, azzal együtt mozog. Ezért, ha a koordináta rendszer  $y$  tengelye a felvízszintbe esik, és az  $x$  tengely lefelé mutat, a (16) egyenlet a következő még egyszerűbb alakot ölti:

$$f(x) = \frac{B}{4\mu\sqrt{2gx}} \quad (17)$$

(5. ábra). Megfelelő úszókhoz erősítve ez a bukóél a gyakorlatban is alkalmazható. Problémát okoz még vízszintes irányú végtelen kiterjedése. Ezen



5. ábra. Hiperbola alakú, mozgó kvadratikus bukó

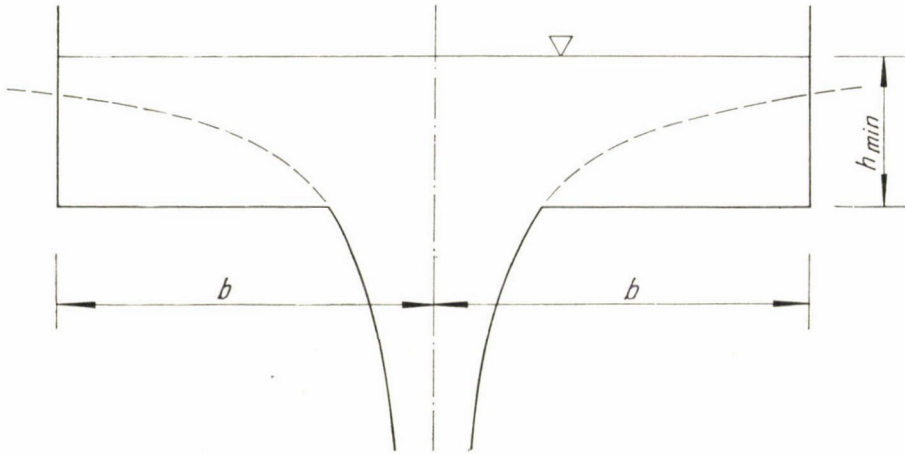
azonban könnyen lehet segíteni, ha a mérni kívánt vízhozam alsó határát nem zérusnak vesszük, hanem bizonyos véges értéknek. Erre lehetőségünk van pusztán az alkalmazott vízóra alsó mérési határa miatt is. A gyakorlatban ugyanis a vízóra nem indul meg, illetve nem megfelelően mutat, ha a ráható nyomáskülönbség bizonyos minimális értéket nem ér el. Ez az érték vízoszlopban kifejezve 1–2 cm nagyságú. A hiperbola felső 1–2 cm magasságú szakaszát tehát olyan derékszögű bukóalakokkal helyettesíthetjük, melynek nemcsak magassága, hanem vízszállítása is a hiperbola felső szakaszáéval azonos. A 6. ábra jelöléseivel a derékszögű szakasz  $b$  szélessége, az óra vagy más szempontok által meghatározott minimális átbukási magasságból számítható:

A hiperbolikus bukóél felső szakasza által szolgáltatott vízhozam,

$$Q_{\min} = B \sqrt{h_{\min}} \quad (18)$$

egyenlő kell, hogy legyen a derékszögű szelvény által átengedett vízhozammal:

$$\begin{aligned} Q_{\min} &= 2 \mu \sqrt{2g} b \int_0^{h_{\min}} \sqrt{h_{\min} - x} dx \\ &= \frac{4}{3} \mu \sqrt{2g} b h_{\min}^{3/2}. \end{aligned} \quad (19)$$



6. ábra. A mozgó hiperbolikus bukó véges kialakítással

(18) és (19) egyenlőségéből megkapjuk a derékszögű szakasz vízszintes  $b$  méretét:

$$b = \frac{3 B}{4 \mu \sqrt{2g} h_{\min}}, \quad (20)$$

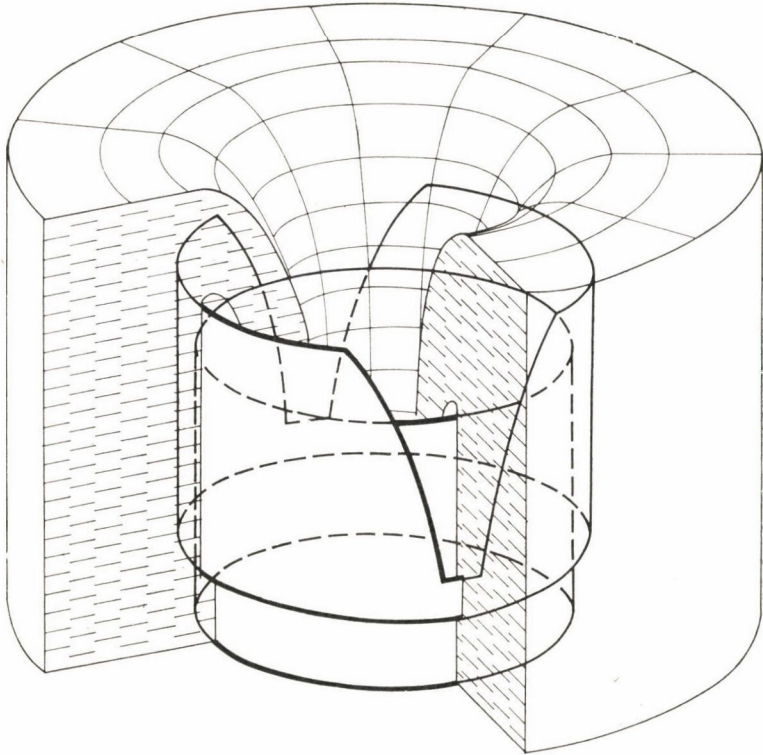
illetve  $Q_{\min}$ -nal kifejezve

$$b = \frac{3 B^3}{4 \mu \sqrt{2g} Q_{\min}^2}. \quad (21)$$

A véges hiperbolikus bukó vízszintes irányú legnagyobb méretét tovább csökkenthetjük, ha nem sík, hanem henger formájában valósítjuk meg. A henger kerülete elvileg egyenlő  $2b$ -vel. Az átbukási szelvényt két vagy több, egyenletesen elosztott hiperbolikus bevágással célszerű létrehozni, hogy a hengerre ható oldalnyomás eredője zérus legyen, és a henger be ne feszüljön. Ezt a megoldást ortogonális axonometriában, bizonyos mértékig idealizált vízfelszínnel, a 7. ábrán vázoltuk. A bukólemezt úszók tartják, ezeket az ábra

bonyolításának elkerülése érdekében elhagytuk. Hengerfelület helyett természetesen hasábfelület is alkalmazható.

$$3. \quad A \quad g(x) = \frac{n+1}{h^{n+1}} x^n \quad (22)$$



7. ábra. A véges méretű hiperbolikus bukó hengeres kialakítással

függvénysereg az előzőhöz hasonlóan az  $n \neq -1$  kikötés mellett végtelen sok megoldást ad. Mivel azonban a bukó alakja mindig függ  $h$ -tól, a gyakorlat számára nincs jelentősége. Egyébként hasonlóan csupán matematikai jelentőségű megoldást akárhányat alkothatunk. Bármely olyan függvényből, melynek tetszőleges  $(x_1, x_2)$  szakaszon vett határozott integrálja véges, a két tengely mentén végrehajtott megfelelő nyújtásokkal és eltolásokkal olyan  $g(x)$  függvény állítható elő, amely a (3) feltételt kielégíti. Csak példaként említjük, hogy az  $y = \sin x$  függvény integrálja a  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  szakaszon az egység-gel egyenlő. A belőle kétirányú nyújtással alkotott

$$y = \frac{\pi}{2h} \sin \frac{\pi x}{2h}$$

függvény valóban  $g(x)$ -nek tekinthető, mert határozott integrálja 0 és  $h$  között 1.

\*

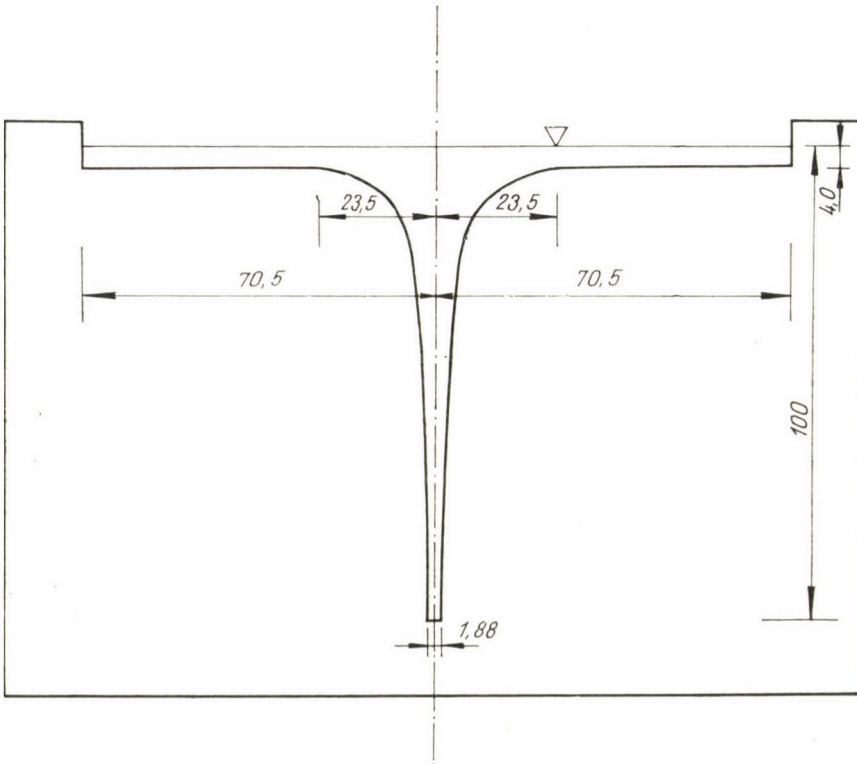
*Példa.* Határozzuk meg annak a kvadratikus bukónak a méreteit, amelyek jellemző adatai a következők:

$$Q_{\max} = 0,1 \text{ m}^3/\text{sec}, \quad h_{\max} = 1 \text{ m}, \quad \mu = 0,6, \quad Q_{\min} = 0,02 \text{ m}^3/\text{sec},$$

és ebből számíthatóan  $h_{\min} = 0,04 \text{ m}$ .

A  $B$  együttható (1) alapján:

$$B = \frac{Q}{\sqrt{h}} = \frac{0,1}{1} = 0,1.$$



8. ábra. A példa megoldása

A felső derékszögű szakasz  $b$  szélessége (19) alapján:

$$b = \frac{3 \cdot 0,1}{4 \cdot 0,6 \cdot 4,43 \cdot 0,04} = 0,705 \text{ m}.$$

A hiperbolikus szakasz egyenlete (17) alapján:

$$f(x) = \frac{0,1}{4 \cdot 0,6 \cdot 4,43 x} = \frac{0,0094}{x}.$$

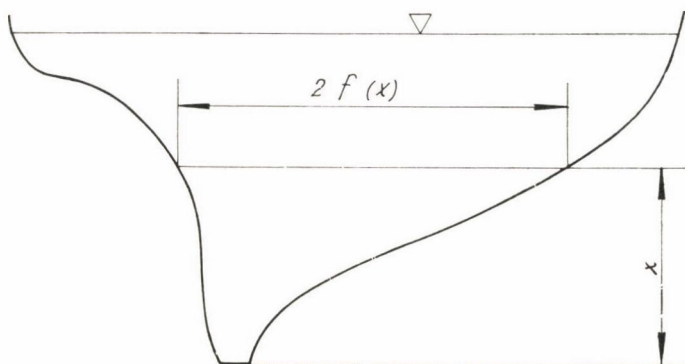
A bukó mérethelyes rajzát a 8. ábrán mutatjuk be.

Ez a bukó a 7. ábrán vázolt hengerszerű kivitelben esetleg célszerűbben megvalósítható. A henger átmérője, ha az átbukó felszint bordák nem szakítják meg, és ha a  $\mu$  tényező módosulását elhanyagoljuk,

$$d = \frac{2 \cdot 0,705}{\pi} = 0,449 \text{ m.}$$

\*

Az előzőekben ismertettük a kvadratikus bukó alakjának általános elméleti megoldását, továbbá két, a gyakorlatban is megvalósítható alakját is levezettük.



9. ábra. Jelölés aszimmetrikus bukónyílás esetén

A számítás során szimmetrikus bukóalakot tételeztünk fel, de ez természetesen egyáltalán nem szükségszerű. A hidraulikában használatos egyszerűsített levezetésben ugyanis a bukónyílás szimmetriája nem játszik szerepet, csupán a nyílásnak a bukóél alsó pontja fölött, ill. a felvízszint alatt bizonyos, egyébként azonban tetszőleges mélységben mérhető szélessége. A mi esetünkben ez  $2f(x)$ -szel egyenlő. Levezetéseink aszimmetrikus bukónyílásra is érvényesek, ha  $f(x)$ -et az előbbieknél megfelelően a 9. ábra szerint értelmezzük.

### Összefoglalás

A tanulmány olyan bukó-alak meghatározásával foglalkozik, amelynek vízátbocsátó képessége a  $Q = B\sqrt{h}$  egyenletnek tesz eleget. Ez a bukó-alak lehetővé teszi a bukóval párhuzamosan felszerelt mellékáramú vízóra alkalmazását, azaz a bukón átfolyó vízhozamnak tetszés szerinti időszak alatt való egyszerű összegezését. A bukó alakját az 1. és a 2. ábra jelölésével az (1) integrálegyenlet határozza meg. A megoldás (2) alakú, ahol a benne szereplő  $g(x)$  függvénynek csupán a (3) kikötést kell teljesítenie. Ilyen módon végtelen sok megoldás adódik.

Nevezetes megoldás a (10) és (11) egyenletpárral adott bukóalak, amely valójában nem bukó, hanem végtelen széles, végtelenül alacsony nyílás

(3. ábra), vagyis érdekes határhelyzete a  $Q = h^n$  egyenlettel jellemzett bukónyílások sorozatának (4. ábra). Véges méretekkel megközelíthető.

A másik gyakorlatilag megvalósítható bukóalakot a (16), ill. (17) egyenlet szolgáltatja. Ez hiperbola alakú mozgó bukóél, melynek vízszintes aszimptótája a mindenkori vízszínnel színel (5. ábra). Zérustól különböző minimális átbukási magasság (ill. vízhozam) megadása esetén a hiperbola felső, végtelen kiterjedésű szakasza véges derékszögű nyílással helyettesíthető (6. ábra). Az így véges kiterjedésűvé tett bukót hengerszerű kialakítással is megvalósíthatjuk (7. ábra).

Az (1) egyenlet többi megoldása az átbukási magassággal változtatja alakját, és ezért a gyakorlat számára nem használható.

A mozgó bukóélre kidolgozott példa eredményét a 8. ábra mutatja.

A levezetések aszimmetrikus bukónyílásra is érvényesek a 9. ábra szerinti értelmezéssel.

#### IRODALOM

- [1] *Haszpra Ottó*: A mellékáramkörű vízmennyiségmérés elmélete és alkalmazásai, Vízügyi Közlemények, 1959/4.
- [2] *Haszpra Ottó*: Kismintavizsgálatok az öntözés fejlesztésének szolgálatában. Előadás az MTA 1962. október 24-i Kismintavizsgálatok a vízgazdálkodásban c. ankétján. Az MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei. (Sajtó alatt.)