

HÉJÍVEK OLDALIRÁNYÚ STABILITÁSA ANTIMETRIKUS TEHERRE

KOLLÁR LAJOS

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
BUDAPESTI VÁROSÉPÍTÉSI ÉS TERVEZŐ IRODA

GÁRDONYI ZOLTÁN

ÚT, VASÚTTERVEZŐ VÁLLALAT, BUDAPEST

[Beérkezett 1967. február 2-án]

A dolgozat görbetengelyű, vékonyfalú rugalmas ívtartók (héjívek) antimetrikus teher hatására bekövetkező oldalirányú kihajlását vizsgálja energia-módszerrel. Kétféle megtámasztási esetre részletesen tárgyalja a megoldást, s bemutatja az antimetrikus és szimmetrikus terhek együttes hatásának figyelembevételét is. Adatokat közöl az elérhető pontosságra vonatkozóan. Számpéldán szemlélteti a módszer gyakorlati alkalmazhatóságát.

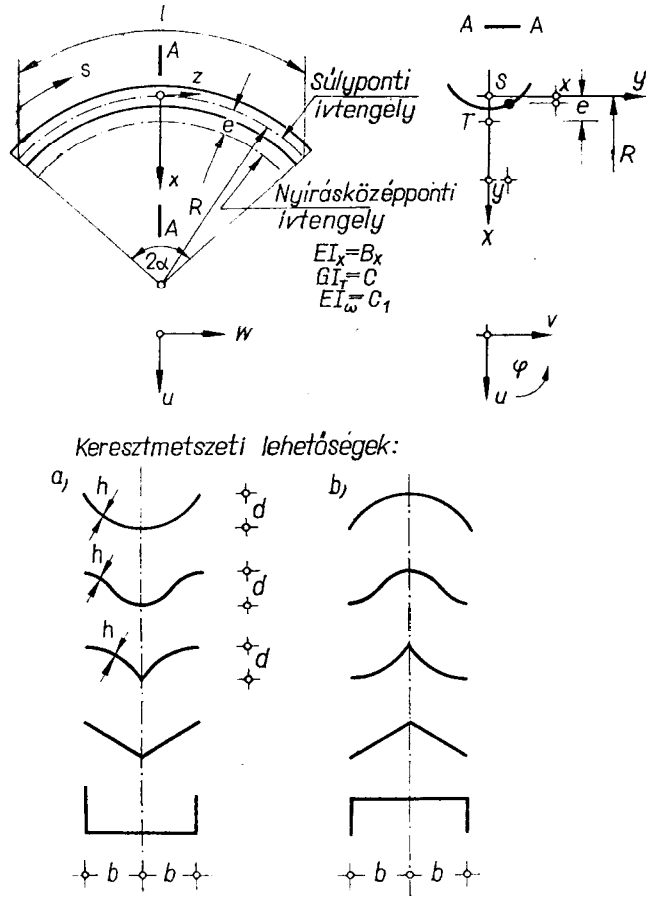
1. A feladat kitűzése

A csarnokok lefedésére igen jól használható héjívek (vékonyfalú, héjkeresztmetszetű görbe rudak, 1. ábra) stabilitását nemcsak az ív síkjában, hanem oldalirányban is meg kell vizsgálni. Korábbi dolgozatainkban két terhelési alapesetre oldottuk meg az oldalirányú stabilitás problémáját: központos nyomásra (2a. ábra), valamint tiszta hajlításra (2b. ábra). Mind a két eset állandó igénybevételt okoz az ív tengelye mentén. Oldalirányban csuklósan megtámasztott ívre az egyensúlyi-módszert használtuk [1, 3], más módon megtámasztott ívekre pedig az energia-módszert [4].

A gyakorlatban azonban e két terhelési alapeset közül csak a központos nyomás fordul elő (totálisan terhelt ív esetén), a tiszta hajlítás nem. E helyett az íveket féloldalas hőteher, vagy antimetrikus szélteher hajlítja. A gyakorlat igényeinek kielégítése céljából meg kell tehát vizsgálnunk a héjívek oldalirányú stabilitását antimetrikus teherre, valamint antimetrikus és szimmetrikus teher együttes hatására.

2. Kiinduló feltevések

Az energia-módszerhez [4] mindenképpen szükséges, hogy a héjív *anyaga* tökéletesen rugalmas legyen, de egyébként a módszer tetszőleges alakú, terhelésű és megtámasztású héjívek oldalirányú stabilitásvizsgálatára is alkalmas. Mi azonban az egyszerűség kedvéért a következő megkötésekkel fogunk élni:



1. ábra

a) Az ív *hossztengelye* körív, *keresztmetszete* állandó. A keresztmetszet d magassága az ívtengely R görbületi sugarához képest kicsi ($d \ll R$).

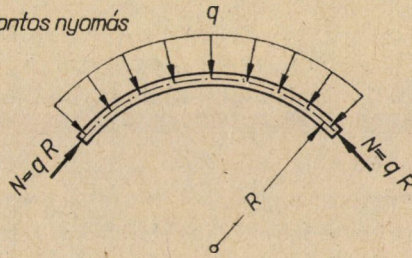
b) Terhelése a 3a. ábrának megfelelő *antimetrikus radiális teher*, mely az ív *hossztengelye* mentén

$$p = p_2 \sin \frac{2\pi}{l} s$$

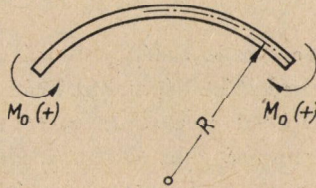
törvényszerűség szerint változik. Ezenkívül feltételezzük, hogy az ív a saját síkjában kétesuklós, tehát nyomóerő- és nyomatékábrája a 3b–c. ábrák szerint alakul.

Az egyidejűleg ható *totális* teherről kikötjük, hogy egyenletesen megoszló és radiális irányú legyen (2a. ábra). A terhek kihajlás közben is megtartják eredeti irányukat.

a, Központos nyomás

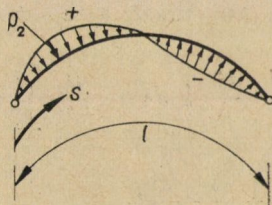


b, Tiszta hajlítás



2. ábra

a,



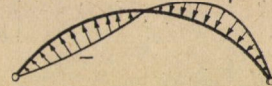
$$\rho = p_2 \cdot \sin \lambda_2 \cdot s = +M_2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right) \sin \lambda_2 s$$

b, + (Nyomás)



$$N_p = \frac{M_2}{R} \sin \lambda_2 s$$

c,



$$M_p = -M_2 \sin \lambda_2 s$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{l}$$

$$M_2 = \frac{p_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2}$$

3. ábra

c) Az ív megtámasztása oldalirányban tetszőleges lehet. Részletesen azonban csak kétféle esetre fogjuk bemutatni a megoldást: oldalirányban csuklós, szabad végű ív, valamint oldalirányban befogott, diafragmás végű ív esetére.

d) Végül a részletes levezetésben feltételezzük, hogy az ív oldalirányú hajlítási merevségét végtelen nagynak vehetjük a csavarási merevséghez képest. Vizsgálataink szerint ez a feltevés az 1. ábrán feltüntetett keresztmetszetű héjívек esetén gyakorlatilag mindig teljesül, l. [1—4]-et.

3. Az energia-módszer egyenletei totális és antimetrikus teherre

Az energia-módszerhez szükséges belső és külső munka kifejezéseit először az általánosság kedvéért véges oldalirányú hajlítási merevséggel írjuk fel, s csak a 4. fejezettől kezdve vesszük ezt végtelen nagynak. A levezetéshez szükséges geometriai mennyiségeket és elmozdulás komponenseket az 1. ábrán tüntettük fel. A $z(w)$ tengely iránya mindig érinti az ívtengelyt. $\varphi(s)$ -sel az egyes keresztmetszetek elcsavaródását jelöljük, $v_T(s)$ -sel pedig a T nyírás-középpontok oldalirányú eltolódását.

Totális (q) teherre [4] szerint a következő kifejezés adja meg a belső munkát:

$$L_b = \frac{C}{2} \int_0^l \vartheta_T^2 ds + \frac{C_1}{2} \int_0^l \left(\frac{d\vartheta_T}{ds} \right)^2 ds + \frac{B_x}{2} \int_0^l \kappa_{Tx}^2 ds. \quad (1)$$

Itt

$$\vartheta_T = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv_T}{ds} \quad (2)$$

a fajlagos elcsavaródás,

$$\kappa_{Tx} = \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v_T}{ds^2} \quad (3)$$

pedig az oldalirányú meggörbülés.

A külső munka két részből tevődik össze. Az egyik rész a nyomóerő munkája:

$$L_k^{(Ns)} = qR \int_0^l \left\{ \left(-\frac{e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \varphi^2 + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_T}{ds} \right)^2 - e \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} \right\} ds; \quad (4a)$$

a másik rész pedig a teher radiális eltolódásából származó munka:

$$L_k^{(q)} = q \int_0^l \frac{t}{2} \varphi^2 ds. \quad (4b)$$

Antimetrikus p teherre a *belső* munka kifejezése teljesen megegyezik (1)-gyel. A *külső* munka felírásához azonban figyelembe kell vennünk, hogy a változó p teherből nemcsak nyomóerő, hanem hajlítónyomaték is ébred, mégpedig az ívtengely mentén változó nagysággal. Így az állandó igénybevételekre [4]-ben levezetett munkaképleteket úgy használhatjuk fel, hogy a teher, a nyomóerő, valamint a hajlítónyomaték kifejezését bevisszük az integráljel alá.

Ezt könnyen beláthatjuk, ha meggondoljuk, hogy a *külső* munka kifejezései eredetileg

$$\int \sigma \frac{\partial w}{\partial s} ds \text{ alakúak,}$$

ahol w az ívtengelyirányú eltolódás (lásd pl. [6] 8.4. pontjában vagy [4]-ben). Amikor σ (vagyis az igénybevétel) állandó az ívtengely mentén, kiemelhetjük az integráljel alól, ha azonban változik, vissza kell tennünk.

Ily módon a *külső* munkákat a következőképpen írhatjuk fel (felhasználva (4a–b)-n kívül az állandó nyomatéokra [4]-ben levezetett kifejezést is)

$$L_k^{(N_p)} = \int_0^l N_p \left\{ \left(-\frac{e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \varphi^2 + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_T}{ds} \right)^2 - e \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} \right\} ds, \quad (5a)$$

$$L_k^{(p)} = \int_0^l p \frac{t}{2} \varphi^2 ds, \quad (5b)$$

$$L_k^{(M_p)} = \int_0^l M_p \left\{ \frac{1}{2R} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \varphi^2 - \frac{1}{2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left(\frac{dv_T}{ds} \right)^2 + \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} \right\} ds. \quad (5c)$$

Itt j_x és j_y az ív geometriai adataitól függő mennyiségek, lásd [3]-ban vagy [4]-ben.

A következőkben felhasználjuk a 2. pontban szereplő d közelítést: a B_x oldalirányú hajlítási merevséget végtelenül nagynak tekintjük. Emiatt $\kappa_{Tx} \approx 0$ lesz, azaz (3) szerint v_T kifejezhető φ -vel:

$$v_T = \frac{1}{R} \iint \varphi ds ds + k_1 s + k_2. \quad (6)$$

A k_1 és k_2 integrálási állandókat a megtámasztási feltételek szabják meg. A *belső* munka (1) kifejezése így a következő alakúra egyszerűsödik:

$$L_b = \frac{C}{2} \int_0^l \vartheta_T^2 ds + \frac{C_1}{2} \int \left(\frac{d\vartheta_T}{ds} \right)^2 ds. \quad (7)$$

A 2. pont *b*) megkötésének megfelelően az antimetrikus terhet a 3. ábra szerint vesszük fel. A görbe rudak elméletéből (pl. [5] 397. o.) könnyen levezethető, hogy az igénybevételek a következő alakot öltik (ha minden mennyiséget a hajlítónyomaték maximális M_2 értékével fejezünk ki):

$$p = p_2 \sin \lambda_2 s = + M_2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right) \sin \lambda_2 s, \quad (8a)$$

$$N_p = + \frac{M_2}{R} \sin \lambda_2 s, \quad (8b)$$

$$M_p = - M_2 \sin \lambda_2 s, \quad (8c)$$

ahol

$$M_2 = \frac{P_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2}. \quad (8d)$$

A (8a–c) kifejezéseket behelyettesítjük (5a–c)-be és összevonjuk a (4)–(5) részmunkákat. Ennek során két tag összege zérust ad, egyéb tagok pedig a 2. pont *a*) megkötése ($d \ll R$) folytán elhanyagolhatóan kicsik más tagokhoz képest. Így a következő kifejezést kapjuk a külső munkára:

$$\begin{aligned} L_k = qR \cdot & \left\{ \left(\frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \int_0^l \varphi^2 \cdot ds + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_T}{ds} \right)^2 ds - e \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} ds \right\} + \\ & + \frac{M_2}{R} \cdot \left\{ \left[\frac{tR}{2} \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \varphi^2 \cdot ds + \right. \\ & \left. + \frac{R}{2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds - \right. \\ & \left. - R \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} ds \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Ezek után a $\varphi(s)$ elcsavarodásfüggvényt kell a megtámasztási feltételeknek megfelelően felvennünk, s a belső és külső munkák kifejezésébe helyettesítve, meghatározhatjuk a kritikus teherintenzitást.

4. Oldalirányban csuklósan megtámasztott, szabadon öblösödő végű héjív kifordulásvizsgálata

4.1. Az egyenletek levezetése általános terhelési esetre

[6] vagy [4] szerint, ha az ívet oldalirányban csuklósan támasztjuk meg s a végkeresztmetszetek öblösödését nem gátoljuk meg sem diafragmával,

sem más módon, akkor az alábbi peremfeltételek érvényesek:

$$v_T = 0, \quad (10a)$$

$$\kappa_{Tx} = \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0, \text{ azaz (10c) miatt:}$$

$$\frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0, \quad (10b)$$

$$\varphi = 0, \quad (10c)$$

$$\frac{d\vartheta_T}{ds} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0, \text{ azaz (10b) miatt:}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0. \quad (10d)$$

Ezeket a következő elcsavarodásfüggvény elégíti ki:

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \sin \lambda_n s \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

ahol

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{l}. \quad (12)$$

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a (6) alapján meghatározott v_T is kielégíti ezeket a peremfeltételeket, ha $k_1 = k_2 = 0$.

Ezzel a *belső* munka (7) kifejezése a következő alakot ölti:

$$L_b = \frac{l}{2} \left\{ \frac{C}{2} \sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 + \frac{C_1}{2} \sum_n \varphi_n^2 \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \right\}. \quad (13)$$

A *külső* munka (9) képlete pedig így alakul:

$$\begin{aligned} L_k = qR \frac{l}{2} & \left\{ \left(\frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \sum_n \varphi_n^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \sum_n \varphi_n^2 \lambda_n^2 + \frac{1}{2R^2} \sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} + \frac{e}{R} \sum_n \varphi_n^2 \left. \right\} + \\ & + \frac{M_2}{R} \frac{l}{2} \left\{ + \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_3^2 \right) \sum_{n < k} J_{n,k}^1 \cdot \varphi_n \varphi_k \right\} + \\ & + \frac{R}{2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \sum_{n < k} (J_{n,k}^{11} \cdot \varphi_n \lambda_n \varphi_k \lambda_k) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n < k} \left[J_{n,k}^{11} \cdot \varphi_n \varphi_k \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k}{\lambda_n} \right) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Itt $J_{n,k}^I$ -val és $J_{n,k}^{II}$ -val a következő integrálokat jelöltük:

$$\begin{aligned} J_{n,k}^I &= \frac{4}{l} \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \sin \lambda_n s \cdot \sin \lambda_k s \cdot ds = \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n - \lambda_k} + \frac{1}{-\lambda_2 + \lambda_n + \lambda_k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_n + \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n + \lambda_k} \right] \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} J_{n,k}^{II} &= \frac{4}{l} \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \cos \lambda_n s \cdot \cos \lambda_k s \cdot ds = \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_n - \lambda_k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_n + \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n + \lambda_k} \right]. \end{aligned} \quad (14b)$$

E képletekben $n = 1, 2, 3, \dots$ és $k = 1, 2, 3, \dots$, de mind $J_{n,k}^I$, mind $J_{n,k}^{II}$ zérus, ha $n + k =$ páros, tehát a J -ket tartalmazó szummázásokat csak a páratlan összeget adó $n + k$ -kra kell kiterjeszteni.

A továbbiakban tehát úgy kell eljárunk, hogy φ (11) sorából kellő számú tagot veszünk és behelyettesítjük (13)-ba és (14)-be. Mivel az M_2/qR^2 arány a valóságban adva van, ezt a továbbiakban ismert állandónak tekintjük s így az energia-módszer szabályai szerint [4] az egyes φ_n -ek szerint differenciálva az egyenlővé tett belső és külső munkát, homogén lineáris egyenletrendszert kapunk a φ_n -ekre. Ennek determinánsát zérussal egyenlővé téve anyiadfokú egyenlet adódik $(qR)_{kr} = N_{qkr}$ -ra, ahány tagot vettünk φ sorából.

Ez a módszer azonban általában hosszadalmas számítást igényel. A minimális tagszám, amit φ -re fel kell vennünk, legalább kettő. Az antimetrikus nyomtérképra miatt ugyanis kell legalább egy antimetrikus tag is, viszont szimmetrikus tagra is szükség van, mert tiszta antimetrikus elcsavarodásfüggvénnyel mind az antimetrikus, mind a szimmetrikus (totális) teher zérus külső munkát szolgáltat. Ezt szemléletesen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ív a legkönnyebben egy félhullámban hajlik ki.

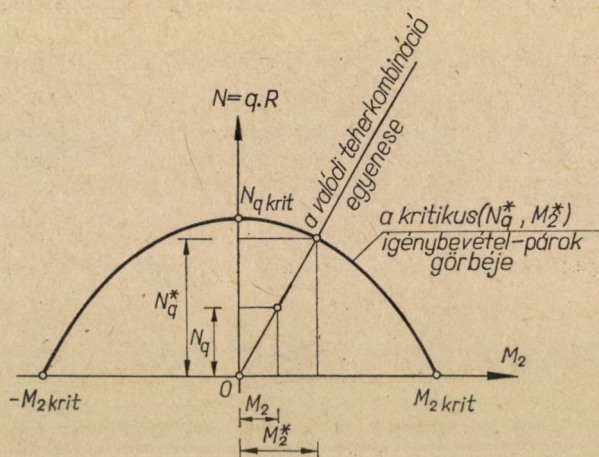
Két φ -taggal azonban általában még igen pontatlan eredményt kapunk. Két szimmetrikus és két antimetrikus φ -taggal már gyakorlatilag elfogadható a közelítés, hat taggal pedig pontosnak mondható. Ez azonban negyed-, ill. hatodfokú egyenlet megoldását kívánja meg, de ettől eltekintve is igen terjedelmes a számítás.

A következő gondolatmenet alapján azonban lényegesen egyszerűsíthetjük a számítási munkát:

A kihajlást okozó, különböző q/p arányokhoz tartozó (N_q^*, M_2^*) igénybevétel-párok az (N_q, M_2) koordináta-rendszerben ábrázolva a 4. ábrán látható görbét adják. Ha fel tudjuk rajzolni ezt a görbét, a következőképpen kaphatjuk meg az adott (q, p) teherkombinációhoz tartozó kritikus (N_q^*, M_2^*) igénybevétel-párt:

A valóságban működő q és p terhekből meghatározzuk az ívre ható

$$N_q = qR \text{ és } M_2 = \frac{P_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2}$$



4. ábra

igénybevételeket. Feltételezve, hogy a teherintenzitások növekedése közben nem változik a q/p arány, a 4. ábra origóján és az (N_q, M_2) ponton átmenő egyenes ábrázolja a növekvő intenzitású valódi terheknek megfelelő igénybevétel-párt. Ahol ez az egyenes metszi a kritikus (N_q^*, M_2^*) -igénybevétel-párok görbét, annak a pontnak a koordinátái adják meg a vizsgált q/p aránynak megfelelő kritikus igénybevételeket. A kritikus (N_q^*, M_2^*) igénybevétel-párok görbét csak meglehetősen hosszadalmas számítással lehet meghatározni. Minden számítás nélkül is megállapíthatjuk azonban, hogy e görbe szimmetrikus az N_q tengelyre, hiszen az ív stabilitása szempontjából közömbös, hogy melyik felén ébred pozitív és melyiken negatív nyomaték. A görbe tehát vízszintes érintővel metszi az N_q -tengelyt. Az M_2 -tengelyt azonban nem metszheti függőleges érintővel, mert az ívre ható nyomóerő nyilvánvalóan csökkenti a kritikus nyomatékot, a húzóerő viszont növeli. Az érintőnek tehát az N_q -tengely nyomást jelentő ága felé kell hajlania. Mindezekből következik, hogy a görbe közel áll egy másodfokú parabolához (4. ábra).

A továbbiakban tehát azt a közelítést fogjuk alkalmazni, hogy meghatározzuk a pontos (N_q^*, M_2^*) -görbének az N_q és M_2 tengelyekkel való

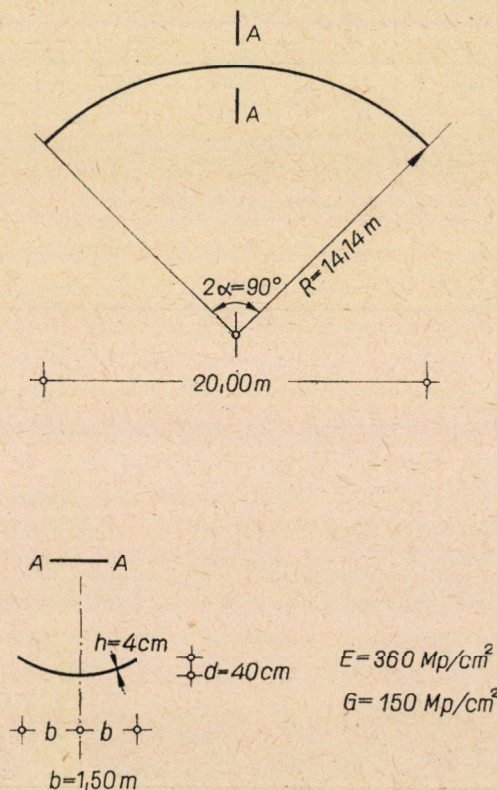
metszéspontjait, s másodfokú parabolát fektetünk át ezeken a pontokon. Ellenőrzésképpen a 4.3. pontban kiszámítjuk a kritikus (N_q^* , M_2^*) igénybevétel-párt a pontos módszerrel is, és összehasonlítjuk a másodfokú parabola adta értékkel.

A görbének az N_q -tengellyel való metszéspontját, N_{qkr} -t már korábbi dolgozatainkban [1, 4] meghatároztuk. A következőkben tehát a tiszta antimetrikus teherhez tartozó M_{2kr} meghatározásával fogunk foglalkozni.

4.2. A tiszta antimetrikus p teherből származó M_{2kr} meghatározása

A tiszta antimetrikus teherből származó M_{2kr} kritikus hajlítónyomatékot úgy kaphatjuk meg, hogy a (13) és (14) kifejezésekből elhagyjuk a q -t tartalmazó tagokat. Így lényegesen egyszerűbbé válik a számítás, mert négy vagy öt tag esetén is még csak másodfokúra redukálódik a megoldandó egyenlet, hat tag esetén pedig harmadfokúra.

Az 5. ábrán vázolt számpéldára kiszámítottuk $q = 0$ esetén M_{2kr} értékét különböző φ -tagszámokkal, annak tisztázására, hogy hány tagot kell figyelem-



5. ábra

be vennünk φ sorából a megfelelően pontos eredmény eléréséhez. Az eredményeket az I. táblázat negyedik oszlopában foglaltuk össze.

A táblázat azt mutatja, hogy négy tagra már valóban elég jó egyezést kapunk, hatnál több tagot pedig nem érdemes figyelembe vennünk.

Kiszámítottuk ugyanerre a szám példára a kritikus M_2 hajlítónyomatékot *kiegyenesített rúdtengely* (azaz $\alpha = 0$) esetére, 2–5 φ -tagra. Az eredmények azt mutatták, hogy a konvergencia nem sokat javul az $\alpha = 45^\circ$ -os esethez képest.

I. táblázat

Antimetrikus p teher okozta kritikus M_2 hajlítónyomaték

A φ -tagok száma összesen	A szimmetrikus tagok száma	Az anti-metrikus tagok száma	M_{2kr} (Mpm)	A megoldáshoz szükséges egyenlet
2	1	1	198,53	tiszta másodfokú
3	2	1	54,00	tiszta másodfokú
4	2	2	33,55	vegyes másodfokú
5	3	2	32,08	vegyes másodfokú
6	3	3	31,71	harmadfokú

A gyakorlati számításokhoz az alábbiakban adjuk meg *négy* figyelembe vett φ -tag esetére az M_{2kr} meghatározására szolgáló, M^2 -ben másodfokú egyenlet együtthatóit:

$$A \cdot M_{2krit}^4 + B \cdot M_{2krit}^2 + C = 0, \tag{15}$$

$$A = (c_1 c_3 - c_2 c_4)^2, \tag{16a}$$

$$B = -(c_1^2 a_3 a_4 + c_2^2 a_1 a_4 + c_3^2 a_1 a_2 + c_4^2 a_2 a_3), \tag{16b}$$

$$C = a_1 a_2 a_3 a_4, \tag{16c}$$

ahol

$$a_n = \frac{l}{2} \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_n^2} + C_1 \right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \tag{16d}$$

$$c_1 = 0,3395 \frac{l}{R} \left(\frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_2^2 \right) + 1,6755 \frac{1}{l} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) - 0,1273 \frac{l}{R}, \tag{16e}$$

$$c_2 = 0,2425 \frac{l}{R} \left(\frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_2^2 \right) + 10,7712 \frac{1}{l} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 0,1516 \frac{l}{R}, \tag{16f}$$

$$c_3 = 0,2263 \frac{l}{R} \left(\frac{b^2 j_y}{dR} + tR\lambda_2^2 \right) + \\ + 23,4571 \frac{1}{l} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 0,1862 \frac{l}{R}, \quad (16g)$$

$$c_4 = -0,09701 \frac{l}{R} \left(\frac{b^2 j_y}{dR} + tR\lambda_2^2 \right) - \\ - 6,2233 \frac{1}{l} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) - 0,5729 \frac{l}{R}. \quad (16h)$$

Tájékoztató számítások céljára közöljük még az $1 + 1$ és a $2 + 1$ paramétert tartalmazó megoldást, amelyeket ugyan sokkal egyszerűbben számíthatunk, de az I. táblázat tanúsága szerint számottevően nagyobb értéket szolgáltatnak a pontosnál:

$$M_{2kr}^{1+1} = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{c_1}, \quad (17a)$$

$$M_{2kr}^{2+1} = \sqrt{\frac{a_1 a_2 a_3}{c_1^2 a_3 + c_2^2 a_1}}. \quad (17b)$$

Az a és c állandókat most is a (16d–g) képletekből kell számítani.

4.3. A kritikus (N_q^* , M_2^*) igénybevétel-párok görbéje

E görbének másik jellegzetes pontját, a központos nyomáshoz tartozó N_{qkr} kritikus nyomóerőt már [1]-ben meghatároztuk és a következő kifejezésből számíthatjuk:

$$N_{qkr} = \frac{\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \cdot (C + C_1 \lambda_1^2)}{\frac{1}{R^2} + \lambda_1^2 \left(2 \frac{e}{R} - \frac{i_x^2}{R^2} \right) + (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \lambda_1^4}. \quad (18)$$

Magát a görbét a 4.1. pontban mondottak szerint közelítésképpen másodfokú parabolával fogjuk helyettesíteni.

E közelítés helyességének ellenőrzésére kiszámítottuk a pontos (13)–(14) egyenletekből az 5. ábra adataival a kritikus terhet, mégpedig az

$$\frac{M_2}{N_q} = \frac{32,1}{3,98} \approx \frac{M_{2kr}}{N_{qkr}}$$

aránynak megfelelő teherkombináció esetére. A II. táblázatban megadjuk e számítás eredményeit különböző figyelembe vett φ -tagszámok esetére. Ezután

meghatároztuk a kritikus terhet úgy is, hogy az $M_{2kr} = 32,1$ Mpm és $N_{qkr} = 3,98$ Mp pontokon át fektetett másodfokú parabolát elmetszettük a fenti teherkombináció egyenesével. Eredményül a következőt kaptuk:

$$N_{qkr}^* = 2,46 \text{ Mp}, M_{2kr}^* = 19,83 \text{ Mpm}.$$

II. táblázat

Totális q és antimetrius p teher okozta kritikus $N_q^* = qR$ és M_q^* igénybevétel-pár

A φ -tagok száma összesen	A szimmetrikus tagok száma	Az antimetrius tagok száma	N_q^* , Mp	M_q^* , Mpm	A megoldáshoz szükséges egyenlet fokszáma
2	1	1	3,90	31,45	2
3	2	1	3,85	31,05	3
4	2	2	2,64	21,27	4
5	3	2	2,60	20,93	5
6	3	3	2,57	20,70	6

Amint látjuk, a közelítő módszerrel ebben az esetben 4,3%-kal kaptunk kisebb eredményt a pontosnál, ami igen jó egyezésnek mondható, s a biztonság javára tér el.

Ha nagyobb pontosságra tartunk igényt, vagy a bemutatott számpélda arányaitól erősen eltérő ívet számítunk, természetesen alkalmazhatjuk a pontosabb módszert képviselő (13)–(14) egyenleteket is.

5. Oldalirányban befogott, öhlösödésében meggátolt (diafragmás) végű héjív kifordulásvizsgálata

A peremfeltételek erre az esetre így írhatók fel [4, 6]:

$$v_T = 0, \quad (19a)$$

$$\frac{dv_T}{ds} = 0, \quad (19b)$$

$$\varphi = 0, \quad (19c)$$

$$\vartheta_T = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv_T}{ds} = 0, \text{ azaz (19b) miatt:}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (19d)$$

A φ elcsavarodásfüggvényt most két részben írjuk fel. A *szimmetrikus* részt célszerű

$$\varphi_{\text{szimmetr}} = \sum_n \varphi_n (1 - \cos \lambda_n s), \quad (n = 2, 4, 6, \dots) \quad (20)$$

alakúra választani. (19a–b) teljesítéséhez (6) szerint előállítjuk v_T -t. A k_1 és k_2 integrálási állandókat úgy határozzuk meg, hogy $s = 0$ és $s = l$ esetére teljesüljön (19a):

$$v_T = - \sum_n \frac{\varphi_n}{R} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n s) + \frac{s}{2} (l - s) \right],$$

a (19b) peremfeltétel pedig akkor teljesül, ha fennáll a

$$\sum_n \varphi_n = 0 \quad (21)$$

egyenlet. Ennek folytán (20) a következő alakúra egyszerűsödik:

$$\varphi_{\text{szimmetr}} = \sum_n \varphi_n \cdot \cos \lambda_n s, \quad (n = 2, 4, 6, \dots) \quad (22)$$

Az antimetrikus elcsavarodás-részt viszont

$$\varphi_{\text{antimetr}} = \sum_m \Phi_m \sin \lambda_m s, \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad (23)$$

alakban vesszük fel. Ez csak a (19a) és (19c) feltételeknek felel meg. A másik két követelmény kielégítése céljából, (6)-ot felhasználva, a következő egyenleteket kell felírunk:

$$\sum_m \Phi_m \lambda_m = 0, \quad (24)$$

$$\sum_m \frac{\Phi_m}{\lambda_m} = 0. \quad (25)$$

• Mindebből az következik, hogy akkor lesz mind a szimmetrikus, mind az antimetrikus részben egy-egy szabad paraméterünk, ha $\varphi_{\text{szimmetr}}$ -ből két, $\varphi_{\text{antimetr}}$ -ből pedig három tagot veszünk fel. Minden további tag egy további szabad paramétert jelent.

Az elcsavarodásfüggvény két részét most behelyettesítjük a belső és a külső munka (7) és (9) képletébe. A (21), (24) és (25) megkötések alapján kifejezzük valamelyik φ_n együtthatót és két Φ_n együtthatót a többivel, majd elvégezzük a φ_n és Φ_n szerinti deriválásokat. Végül most is annyi egyenletünk lesz, ahány ismeretlen φ_n és Φ_m paraméterünk van együttvéve.

A *belső munka* (7) képlete a következő alakot ölti:

$$L_b = \frac{l}{2} \left\{ \frac{C}{2} \left[\sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 + \sum_m \frac{\Phi_m^2}{\lambda_m^2} \left(\lambda_m^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \right] + \frac{C_1}{2} \left[\sum_n \varphi_n^2 \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 + \sum_m \Phi_m^2 \left(\lambda_m^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (26)$$

A külső munka (9) pedig így alakul:

$$\begin{aligned}
 L_k = qR \frac{l}{2} & \left\{ \left(\frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \left(\sum_n \varphi_n^2 + \sum_m \Phi_m^2 \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \left(\sum_n \varphi_n^2 \lambda_n^2 + \sum_m \Phi_m^2 \lambda_m^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{2R^2} \left(\sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} + \sum_m \frac{\Phi_m^2}{\lambda_m^2} \right) + \frac{e}{R} \left(\sum_n \varphi_n^2 + \sum_m \Phi_m^2 \right) \left. \right\} + \\
 & + \frac{M_2}{R} \frac{l}{2} \left\{ \left[\frac{tR}{2} \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] \sum_{n=2,4,6,\dots} (\varphi_n \Phi_{n+2} - \varphi_{n+2} \Phi_n) + \right. \\
 & + \frac{R}{2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \sum_{n=2,4,6,\dots} \lambda_n \lambda_{n+2} (\varphi_n \Phi_{n+2} - \varphi_{n+2} \Phi_n) + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=2,4,6,\dots} \left(\frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+2}} \right) (\varphi_n \Phi_{n+2} - \varphi_{n+2} \Phi_n) \right\}. \tag{27}
 \end{aligned}$$

A továbbiakban a 4. pont szerint járunk el: $q = 0$ esetre tiszta anti-metrikus teherre határozzuk meg M_{2krit} -t. A konvergencia vizsgálatához kiszámítottuk az 5. ábra héjívére különböző tagszámú elcsavarodásfüggvény-nyel M_{2krit} nagyságát. Az eredményeket a III. táblázatban mutatjuk be.

III. táblázat

A figyelembe vett		A független		M_{2krit} (Mpm)	A megoldáshoz szükséges egyenlet
szimmetrikus	anti-metrikus	szimmetrikus	anti-metrikus		
tagok száma		tagok száma			
2	3	1	1	89,39	} tiszta másodfokú
3	3	2	1	68,85	
3	4	2	2	62,10	} vegyes másodfokú harmadfokú
4	4	3	2	61,67	
4	5	3	3	61,51	

Amint látjuk, valamivel jobb a konvergencia, mint az oldalirányban csuklás, szabadvégű ívnél volt. Így gyakorlatilag most is megelégedhetünk a φ -ben is, Φ -ben is két független paramétert tartalmazó megoldással. A (15) alakú, M^2 -ben másodfokú egyenlet együtthatói most a következők:

$$A = (c_1 c_2 - c_3 c_4)^2, \tag{28a}$$

$$\begin{aligned}
 B = & 2 a_{12} a_3 c_2 c_4 - 2 a_{12} a_{34} c_1 c_2 - 2 a_{12} a_{34} c_3 c_4 + \\
 & + 2 a_{12} a_4 c_1 c_3 + 2 a_1 a_{34} c_2 c_3 + 2 a_2 a_{34} c_1 c_4 - \\
 & - a_1 a_3 c_2^2 - a_1 a_4 c_3^2 - a_2 a_3 c_4^2 - a_2 a_4 c_1^2, \tag{28b}
 \end{aligned}$$

$$C = (a_1 a_2 - a_{12}^2) (a_3 a_4 - a_{34}^2), \tag{28c}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{l}{2} \left\{ \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + \left(\lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) \right\}, \\
 a_2 &= \frac{l}{2} \left\{ \left(\lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) + \left(\lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) \right\}, \\
 a_{12} &= \frac{l}{2} \left(\lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right), \\
 a_3 &= \frac{l}{2} \left\{ \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + 41,3265 \left(\lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 20,8980 \left(\lambda_8^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_8^2} + C_1 \right) \right\}, \\
 a_4 &= \frac{l}{2} \left\{ \left(\lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) + 6,6122 \left(\lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2,0408 \left(\lambda_8^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_8^2} + C_1 \right) \right\}, \\
 a_{34} &= \frac{l}{2} \left\{ 16,5306 \left(\lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 6,5306 \left(\lambda_8^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_8^2} + C_1 \right) \right\}, \\
 c_1 &= \frac{l}{4} \left\{ 4,5714 \left[t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 219,4286 \frac{\pi^2}{l^2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 9,5238 \frac{1}{R} \right\}, \\
 c_2 &= \frac{l}{4} \left\{ 3,0 \left[t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 106,2857 \frac{\pi^2}{l^2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 6,3809 \frac{1}{R} \right\}, \\
 c_3 &= \frac{l}{4} \left\{ 12,0 \left[t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 381,7143 \frac{\pi^2}{l^2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 25,9524 \frac{1}{R} \right\}, \\
 c_4 &= \frac{l}{4} \left\{ -0,5714 \left[t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 36,5714 \frac{\pi^2}{l^2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) - 1,6905 \frac{1}{R} \right\}.
 \end{aligned}$$

Most is megadjuk az $1 + 1$ paraméteret tartalmazó egyszerűen számítható megoldást, ismét megjegyezve, hogy a pontosnál lényegesen nagyobb kritikus nyomatókat szolgáltat, de előzetes számításokhoz célszerűen használható, tájékozódás céljából.

$$M_{2kr} = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{c_1}, \quad (29)$$

ahol

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{l}{2} \left\{ \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + \left(\lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) \right\}, \\ a_2 &= \frac{l}{2} \left\{ \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + 10,24 \left(\lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3,24 \left(\lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left(\frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) \right\}, \\ c_1 &= \frac{l}{4} \left\{ 4,0 \left[t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 60,8 \frac{\pi^2}{l^2} \left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 9,4 \frac{1}{R} \right\}. \end{aligned}$$

Ha $p = 0$, akkor a kritikus központos nyomóerőt [4] alapján egy szabad paramétert tartalmazó q -sorral a következő képlet szolgáltatja:

$$(qR)_{kr} = N_{qkr} = \frac{A}{B}, \quad (30)$$

ahol

$$\begin{aligned} A &= C \left[\lambda_2^2 + \lambda_4^2 - \frac{4}{R^2} + \frac{1}{R^4} \left(\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_4^2} \right) \right] + \\ &\quad + C_1 \left[\lambda_2^4 + \lambda_4^4 - \frac{2}{R^2} (\lambda_2^2 + \lambda_4^2) + \frac{2}{R^4} \right], \\ B &= 2 \left(\frac{t - e}{R} - \frac{i_x^2}{R^2} \right) + (i_x^2 + i_y^2 + e^2) (\lambda_2^2 + \lambda_4^2) + \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_4^2} \right) + 4 \frac{e}{R}. \end{aligned}$$

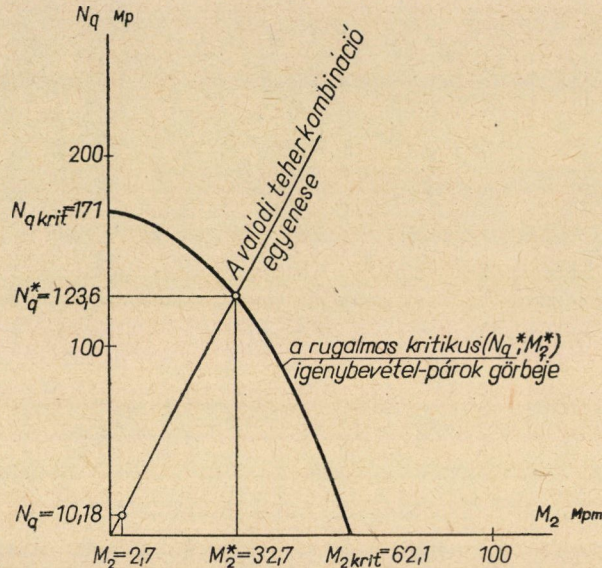
(Két szabad paraméterrel valamivel pontosabb eredményt kapunk, lásd [4]-ben.)

Mivel a 4.1. pontban mondottak erre a megtámasztási esetre is érvényesek, most is az M_{2kr} és N_{qkr} pontokon átmenő parabolával helyettesítjük a kritikus teherkombinációk pontos görbéjét.

6. Számpélda

Ellenőrizzük az 5. ábrán vázolt héjív oldalirányú stabilitását 200 kp/m² állandó teher, 32 kp/m² antimetrikus szélteher, valamint 80 kp/m² féloldali hőteher együttes hatására.

Az ív két vége diafragmás és oldalirányban befogott, az igénybevételek számításához azonban saját síkjában csuklósnak tekintjük. A geometriai és szilárdsági segédmenyiségeket lásd [3]-ban vagy [4]-ben.



6. ábra

Az egyszerűség kedvéért eltekintünk attól, hogy a terhek nem radiálisak és az antimetrikus teher nem szinusz-törvény szerint oszlik meg. Kiszámítjuk a megadott terhekből keletkező nyomóerőt és az ívnegyedben keletkező hajlítónyomatékot, s ezeket N_q -nak és M_2 -nek tekintve határozzuk meg a rugalmas kihajlással szemben fennálló biztonságot.

Az igénybevételek közelítően a következők:

Központos nyomás:

$$N_{\text{állandó}} \approx q \cdot R = 3 \text{ m} \cdot 200 \text{ kp/m}^2 \cdot 14,14 \text{ m} \approx 8,49 \text{ Mp}$$

$$N_{\text{hó}} \approx \frac{1}{2} pR = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 80 \cdot 14,14 = 1,69 \text{ Mp}$$

$$N_q = 10,18 \text{ Mp.}$$

Hajlítás:

$$M_2^{\text{szél}} \approx \frac{pL^2}{32} = \frac{3 \cdot 32 \cdot 20^2}{32} = 1,2 \text{ Mpm}$$

$$M_2^{\text{hó}} \approx \frac{pL^2}{64} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 20^2}{64} = 1,5 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = 2,7 \text{ Mpm.}$$

A héjív M_{2kr} kritikus nyomatékát már az 5. pontban kiszámítottuk. A II. táblázat adatai közül a 2 + 2 szabad paraméterrel számított $M_{2kr} = 62,10$ Mpm értéket használjuk fel.

A központos nyomóerő kritikus értéke a (30) képlettel 171 Mp-ra adódott [4].

A másodfokú parabolával végzett stabilitásvizsgálatot a 6. ábrán mutatjuk be.

A kritikus igénybevétel-pár a következő értékre adódott:

$$N_q^* = 123,6 \text{ Mp,}$$

$$M_2^* = 32,7 \text{ Mpm.}$$

A rugalmas kihajlással szemben fennálló biztonság tehát

$$n = \frac{N_q^*}{N_q} = \frac{M_2^*}{M_2} = 12,1\text{-szeres.}$$

IRODALOM

1. KOLLÁR, L.: Torsional Buckling of Thin-walled Curved Bars (Shell-Arches). *Acta Techn. Hung.* 40 (1962.), 337–353.
2. KOLLÁR, L.: Lateral Buckling of Thin-Walled Curved Bars (Shell-Arches). *Acta Techn. Hung.* 45 (1964), 297–314.
3. KOLLÁR, L.: Lateral Buckling of Bent Shell-Arches, Taking into Account Non-linear Stress Distribution. *Bulletin of the IASS*, No. 19 (1964).
4. KOLLÁR, L.—IVÁNYI, GY.: Kippen und Biegedrillknicken von Schalenbogen mit Hilfe der Energiemethode. *Bautechnik-Archiv* (1966).
5. LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover Publ., New York (1944).
6. TIMOSHENKO, S.—GERE, J.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York (1961).